

文章编号: 1004- 4574( 2010) 05- 0164- 06

## 二维溃坝洪水波传播的高精度数值模拟

刘玉玲<sup>1, 2</sup>, 王玲玲<sup>1</sup>, 周孝德<sup>2</sup>, 戎贵文<sup>2</sup>

(1 河海大学 水利水电学院, 江苏 南京 210024 2 西安理工大学 水利水电学院, 陕西 西安 710048)

**摘 要:**建立了二维浅水方程的高分辨率数学模型。求解浅水方程时,将方程做空间差分算子分裂,并沿各空间方向采用有限体积法积分方程,应用二阶上风 TVD 格式确定有限体积交界面处的物理量通量。应用该模型对矩形明渠坝体瞬间全溃的洪水波进行了计算,并将计算值与理论解进行了比较;最后用该模型对大坝瞬间局部溃倒所致的洪水演进过程进行了数值模拟,对模拟结果进行了定性分析,并与其它算法进行了比较,表明该模型对模拟溃坝洪水波是有效的。

**关键词:**有限体积方法; TVD 格式; 溃坝波

**中图分类号:** TV 131 **文献标识码:** A

## High - resolution numerical simulation of 2D dam - break flood waves

LIU Yu-ling<sup>1, 2</sup>, WANG Ling-ling<sup>1</sup>, ZHOU Xiao-de<sup>2</sup>, RONG Gu-wen<sup>2</sup>

(1 Institute of Water Conservancy and Hydraulic Engineering Hohai University, Nanjing 210024 China

2 Institute of Water Conservancy and Hydraulic Engineering Xi'an University of Technology, Xi'an 710048 China)

**Abstract** This paper is concerned with a High-Resolution mathematical model for 2D shallow water equations. The 2D shallow water equations were split into two systems of equations in  $x$  and  $y$  directions by using the strange type operator splitting method and were solved with the one-dimensional upwind TVD (total variation diminishing) schemes and FVM method (finite volume method). This model is used to predict 1D flood process caused by an instantaneous total dam-break, and compare with the analytic solutions of the problem. And this model is also used to predict a 2D flood evolution process caused by the instantaneous partial dam-break, and the simulating results were analyzed qualitatively. The computed results indicate that this model is fairly effective on simulating dam-break flood waves.

**Key words** finite volume method (FVM); total variation diminishing (TVD) scheme; dam-break wave

溃坝计算的主要内容是要算出溃坝坝址的流量和水位过程线,以及下游洪水演进过程中沿程各处的流量、水位、流速、波前和洪峰到达的时间等,而问题最终归结为求解控制水流运动的双曲型偏微分方程组的有间断问题。

随着计算空气动力学的发展,20世纪80年代中期发展起来的各种高分辨率格式,对于求解欧拉方程,解决分离涡、激波等复杂流场的数值计算问题效果十分显著。其中由 Harten 提出的 TVD (total variation diminishing) 格式<sup>[1]</sup>,具有激波分辨率高,计算流场质量好等优点,已越来越得到广泛重视和应用。国内外的学者也应用此格式求解双曲型浅水方程模拟大坝瞬间全溃或瞬间局部溃倒的洪水演进过程,并对其作了大

收稿日期: 2009- 03- 25 修订日期: 2010- 05- 11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(项目编号: 59579013)

作者简介: 刘玉玲(1969-),女,副教授,博士,主要从事环境水力学研究。E-mail: liuyuling@xaut.edu.cn

量研究<sup>[3-8]</sup>。本文应用 Strang<sup>[2]</sup> 差分算子分裂法剖分方程, 再采用有限体积法积分方程, 结合二阶 TVD 格式, 求解溃坝问题。

## 1 数学模型

### 1.1 水流运动的控制方程

描述溃坝洪水演进的二维控制方程为浅水方程<sup>[3-8]</sup>, 在笛氏坐标系下, 其守恒形式为:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{E})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{E})}{\partial y} = \mathbf{Q}(\mathbf{E}). \quad (1)$$

这里

$$\mathbf{E} = (h, q_x, q_y)^T, \quad (2a)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{E}) = \left[ q_x, \frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2, \frac{q_x q_y}{h} \right]^T, \quad (2b)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{E}) = \left[ q_y, \frac{q_x q_y}{h}, \frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right]^T, \quad (2c)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{E}) = [0, gh(s_{0x} - s_{fx}), gh(s_{0y} - s_{fy})]^T. \quad (2d)$$

式中:  $h$  为水深;  $g$  为重力加速度;  $q_x$  和  $q_y$  分别为  $x, y$  方向的单宽流量;  $q_x = hu, q_y = hv$ ,  $u$  和  $v$  分别为  $x, y$  方向的流速分量;  $S_{0x}$  和  $S_{0y}$  分别是河床沿  $x, y$  方向坡降;  $S_{fx}$  和  $S_{fy}$  分别是摩阻沿  $x, y$  方向的坡降。  $S_{0x}, S_{0y}, S_{fx}$  和  $S_{fy}$  的表达式分别为

$$S_{0x} = \frac{\partial z_b}{\partial x}, S_{0y} = \frac{\partial z_b}{\partial y}, \quad (3a)$$

$$S_{fx} = \frac{n^2 q_x}{h^{4/3}} \sqrt{\frac{q_x^2 + q_y^2}{h}}, S_{fy} = \frac{n^2 q_y}{h^{4/3}} \sqrt{\frac{q_x^2 + q_y^2}{h}}, \quad (3b)$$

式中:  $z_b$  为河底高程;  $n$  为糙率系数。

应用局部特征方法, 方程 (1) 可以表示为如下形式:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = \mathbf{Q}(\mathbf{E}). \quad (4)$$

流动量的雅可比矩阵为

$$A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - \frac{q_x^2}{h^2} & 2\frac{q_x}{h} & 0 \\ -\frac{q_x q_y}{h^2} & \frac{q_y}{h} & \frac{q_x}{h} \end{bmatrix}, \quad (5a)$$

$$B = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{q_x q_y}{h^2} & \frac{q_y}{h} & \frac{q_x}{h} \\ c^2 - \frac{q_y^2}{h^2} & 0 & 2\frac{q_y}{h} \end{bmatrix}. \quad (5b)$$

这里,  $c$  为波速,  $c^2 = gh$ 。

向量矩阵  $A$  和  $B$  的特征值为

$$\mathbf{e}_A = (q_x/h + c, q_x/h, q_x/h - c)^T, \quad (6a)$$

$$\mathbf{e}_B = (q_y/h + c, q_y/h, q_y/h - c)^T. \quad (6b)$$

知道  $A$  和  $B$  的特征值后,  $A$  和  $B$  可以表示为下列形式:

$$A = \mathbf{R}_A \mathbf{e}_A \mathbf{R}_A^{-1}; B = \mathbf{R}_B \mathbf{e}_B \mathbf{R}_B^{-1}. \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B$  分别为  $A$  和  $B$  的右特征向量, 形式如下:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{q_x}{h} + c & 0 & \frac{q_x}{h} - c \\ \frac{q_y}{h} & c & \frac{q_y}{h} \end{pmatrix}, & \mathbf{R}_A^{-1} &= \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} -\left(\frac{q_x}{h} - c\right) & 1 & 0 \\ -2\frac{q_y}{h} & 0 & 2 \\ \left(\frac{q_x}{h} + c\right) & -1 & 0 \end{pmatrix}; & (8a\ b) \\
 \mathbf{R}_B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{q_x}{h} & \frac{q_x}{h} & c \\ \frac{q_y}{h} + c & \frac{q_y}{h} - c & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{R}_B^{-1} &= \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} -\left(\frac{q_x}{h} - c\right) & 0 & 1 \\ \left(\frac{q_y}{h} + c\right) & 0 & -1 \\ -2\frac{q_x}{h} & 2 & 0 \end{pmatrix}. & (8c\ d)
 \end{aligned}$$

1.2 控制方程的离散与求解

求解控制方程时,应用 Strang<sup>[2]</sup>差分算子分裂法将浅水方程 (1) 分别沿  $x$ 、 $y$  方向剖分,再采用有限体积法积分,有限体积交界面处的物理量通量采用二阶上风 TVD 格式确定。方程 (1) 可写为

$$E_{ij}^{n+2} = L_x(\Delta t)L_y(\Delta t)L_a(\Delta t)L_a(\Delta t)L_y(\Delta t)L_x(\Delta t)E_{ij}^n. \tag{9}$$

式中:

$$L_x E_{ij}^n = E_{ij}^* = E_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n), \tag{10a}$$

$$L_y E_{ij}^* = E_{ij}^{**} = E_{ij}^* - \frac{\Delta t}{\Delta y}(G_{j+1/2}^* - G_{j-1/2}^*), \tag{10b}$$

$$L_a E_{ij}^{**} = \frac{1}{2}[E_{ij}^{**} + \bar{E}_{ij} - \Delta t \cdot Q(\bar{E}_{ij})], \tag{10c}$$

$$\bar{E}_{ij} = E_{ij}^{**} - \Delta t \cdot Q(E_{ij}^{**}). \tag{10d}$$

这里,  $\Delta t$  是时间步长;  $\Delta x$  和  $\Delta y$  分别是  $x$  和  $y$  方向的空间步长;  $F_{i+1/2}$  和  $G_{j+1/2}$  分别是  $x$  和  $y$  方向有限体积交界面  $(i+1/2, j)$  和  $(i, j+1/2)$  处的物理量数值通量 (如图 1 所示); 微分算子  $L_a$  采用二阶时间精度的 Euler 预测-校正方法。物理量数值通量  $F_{i+1/2}$  定义为:

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}[F(E_{ij}) + F(E_{i+1j}) + R_{i+1/2} \Phi_{i+1/2}]. \tag{11}$$

式中:  $R_{i+1/2}$  为流动物理量的雅可比矩阵  $\partial F / \partial E$  的右特征向量;  $R_{i+1/2} \Phi_{i+1/2}$  代表人工粘性项,用于修正一阶精度的物理量数值通量的过度扩散,从而产生高阶精度的 TVD 格式。物理量数值通量  $G_{j+1/2}$  的定义方法与此类似。

对 Yee-Harten 二阶上风 TVD 格式的有限体积离散式,向量  $\Phi_{i+1/2}$  的元素  $(\phi_{i+1/2}^l)^u$  为

$$(\phi_{i+1/2}^l)^u = \sigma(\alpha_{i+1/2}^l)(g_{i+1/2}^l) - \Psi(\alpha_{i+1/2}^l + \gamma_{i+1/2}^l)\alpha_{i+1/2}^l, \quad l = 1, \dots, 4 \tag{12}$$

式中:  $(\alpha_{i+1/2}^l)$  是  $x$  方向的雅可比矩阵的特征值;  $\alpha_{i+1/2}^l$  是向量  $\alpha_{i+1/2} = R_{i+1/2}^{-1}(E_{i+1/2} - E_{ij})$  的元素,指当地特征变量的差分;  $g_{i+1/2}^l$  是限制器。

函数  $\sigma(z)$  和  $\gamma_{i+1/2}^l$  分别定义为

$$\sigma(z) = \frac{1}{2} \left[ \Psi(z) - \frac{\Delta t z^2}{\Delta x} \right], \tag{13}$$

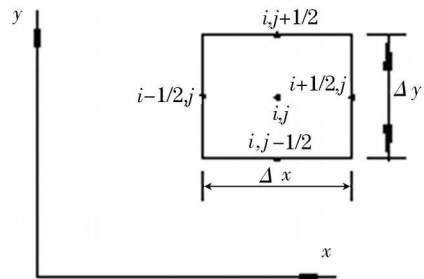


图 1 控制体积示意图

Fig 1 Sketch of a finite control volume element

$$Y_{i+1/2}^i = \sigma(a_{i+1/2}^i) \begin{cases} (g_{i+1}^i - g_i^i) / \alpha_{i+1/2}^i & \alpha_{i+1/2}^i \neq 0 \\ 0 & \alpha_{i+1/2}^i = 0 \end{cases} \quad (14)$$

修正后的熵函数  $\Psi(z)$  定义为

$$\Psi(z) = \begin{cases} |z|, & |z| \geq \varepsilon \\ (z^2 + \varepsilon^2) / 2\varepsilon, & |z| < \varepsilon \end{cases} \quad (15)$$

其中  $\varepsilon$  为小正数,  $\varepsilon_{i+1/2j} = \max[0, \alpha_{i+1/2j} - \alpha_{ij}, \alpha_{i+1j} - \alpha_{i+1/2j}]$ .

有多种限制器函数  $g_b^i$ , 本文应用的形式如下:

$$g_b^i = S \cdot \max[0, \min[2|\alpha_{i+1/2}^i| S \cdot \alpha_{i-1/2}^i], \min[|\alpha_{i+1/2}^i| 2S \cdot \alpha_{i-1/2}^i]]; S = \text{sgn}(\alpha_{i+1/2}^i). \quad (16)$$

### 1.3 边界条件

边界条件分两种类型, 即固体边界条件和水边界条件。固体边界条件: 采用不可穿入条件, 即固体边界的法向单宽流量为零,  $q_n = 0$  水边界条件: 进口断面给定水深  $h$  和流速  $u, v$ , 急流出口断面认为变量  $h, u$  和  $v$  沿流向梯度为零, 而缓流出口断面处给定水深  $h_0$ 。

### 1.4 稳定条件

上述数值格式属于时间步进法, 时间步长的选取受控于 Courant 条件, 即

$$\Delta t = \min(DT_1, DT_2). \quad (17)$$

这里,

$$DT_1 = \frac{\Delta x}{|u| + \sqrt{gh}} \quad DT_2 = \frac{\Delta y}{|v| + \sqrt{gh}}$$

实际计算时所取的时间步长  $\Delta t' = \alpha \Delta t$   $\alpha$  在 0.6~0.8 之间。

## 2 模型验证

这里计算了如图 2 所示的坝体瞬间全溃问题。坝址位于等宽矩形断面河道的 100m 处, 河道底坡  $S_0 = 0$  摩阻  $S_f = 0$  溃决前上下游均为静水, 上游水深  $H = 10\text{m}$ , 下游水深  $h = 1\text{m}$ , 取计算域长 200m。大坝瞬间溃倒, 在坝的上、下游将形成非恒定急变流——不连续波。下游因流量增加, 水位迅速上涨, 形成涨水顺波向下游传播, 上游则因下泄流量突然增加水位急剧下降形成降水逆波向上游传播。

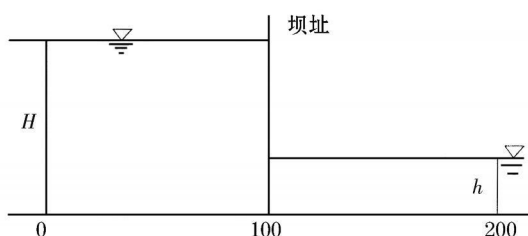


图 2 溃坝示意图

Fig 2 Sketch of a dam-break

溃坝后 7s 时计算所得的水位与流速分布如图 3(a), (b) 所示, 经与 Stoker 理论解<sup>[9]</sup> 的比较可以看出, 数值解在间断波附近没有出现数值振荡, 水位、流速大小符合较好, 表明这类格式精度高, 稳定性性能好。

## 3 二维溃坝洪水流预测

计算区域如图 4 所示, 长 200m, 宽 200m, 平底。上游水深 10m, 下游水深 5m。坝址在距上游 100m 处。坝宽 4m。突然有一段 75m 长的坝体倒塌, 要求模拟瞬时溃坝后水波的演进过程。该问题已被很多学者研究过<sup>[3-8]</sup>。

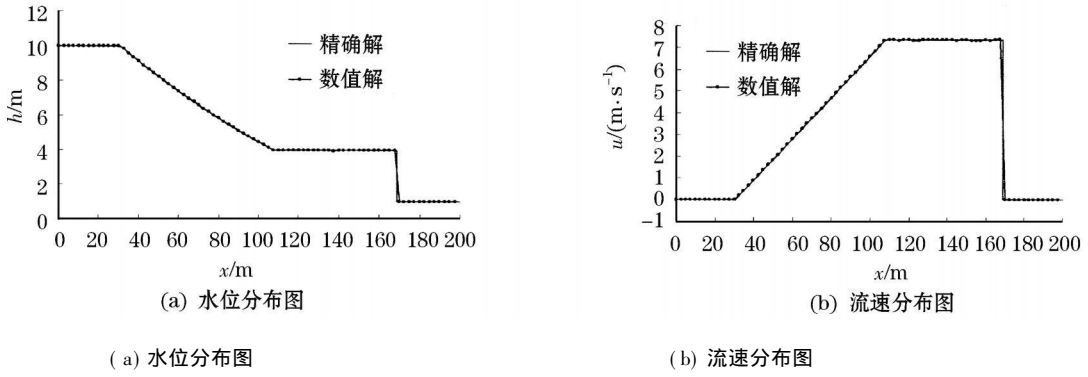


图 3 溃坝后 7s 水位和流速分布图

Fig 3 Distribution of water level and flow rate at 7th second after dam-break

计算时空间步长  $\Delta x = \Delta y = 4m$ , 时间步长  $\Delta t = 0.2s$ , 无摩阻。图 5 图 6 分别是瞬时溃坝后 7.2s 时刻的流场和水面线的模拟结果图。从模拟结果可以看出：坝体瞬时溃坏时，形成了正、负水波。正波向下游传播，负波向上游传播，而且受负波影响水域的水深下降。溃口下游两边的水深小于中部的水深。水流向两边扩散，并形成回流。模拟结果表明，物理量的分布符合物理规律。计算结果与文献 [6-8] 中的结果一致。

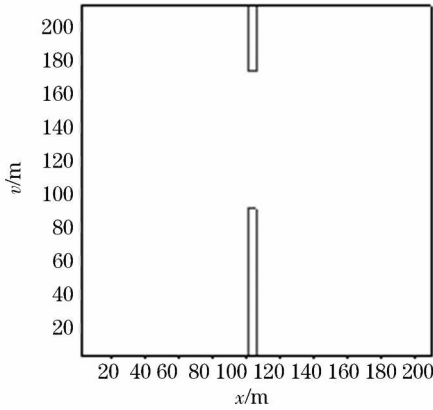


图 4 计算区域图

Fig 4 Diagram of region for calculation

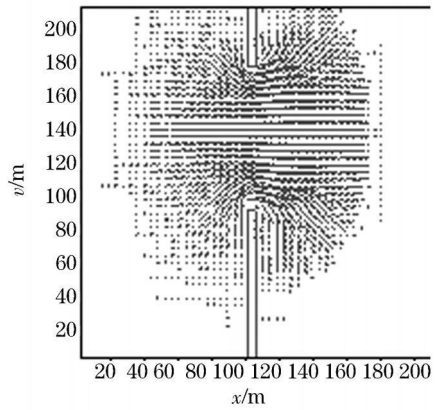


图 5 模拟流场图

Fig 5 Diagram of simulated flow field

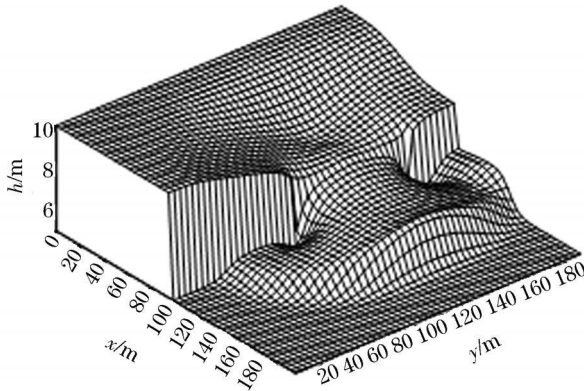


图 6 水面的模拟结果

Fig 6 Simulated result of water surface

### 4 结论

有限体积法 (FVM) 是集有限差分法和有限元方法之优点而发展起来的一种数值方法, 其物理概念明

确,并具有积分守恒特性。该方法与 TVD 格式相结合,具有自动捕捉激波的能力,在间断解处可以较好的抑制数值的振荡,且有很高的分辨率,是模拟溃坝洪水波的有效方法。该模型能够为溃坝引起的灾害分析及防灾减灾等工程问题提供科学依据。

## 参考文献:

- [ 1 ] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws[ J]. J Comput Phys 1983, 49: 357 - 393
- [ 2 ] G. Stang. On the construction and comparison of difference schemes[ J]. J Numer Anal 1968, 5: 506 - 516
- [ 3 ] 魏文礼,郭永涛. 基于加权本质无振荡格式的二维溃坝水流数值模拟 [ J]. 水利学报, 2007, 38 ( 5): 596 - 600
- [ 4 ] 胡四一,谭维炎. 溃坝涌波的数值模拟 [ J]. 水动力学研究与进展. 1990, ( 2): 90 - 98
- [ 5 ] 槐文信,曾小辉,杨中华. 一维和二维溃坝波的混合有限分析解 [ J]. 华中科技大学学报, 2006, 34 ( 9): 49 - 50
- [ 6 ] MINGHAM C G, CAUSON DM. High resolution finite- volume method for shallow water flows[ J]. J Hydr Engg , ASCE, 1998, 124 ( 6): 605 - 614
- [ 7 ] ALCRUDO E, GARCIA- NAVARRO P. A High resolution Godunov- type scheme in finite volumes for 2D shallow water equations[ J]. Int J. Number Methods in Fluids 1993, 16 ( 6): 489 - 505
- [ 8 ] FENNEMA R J, CHAUDHRY M H. Explicit methods for 2D transient free surface flows[ J]. J Hydr Engg ASCE, 1990, 116 ( 8): 1013 - 1034
- [ 9 ] Stoker J J. Water waves[ M ]. Interscience Publishers Wiley and Sons New York, 1957.