

文章编号:1004-4574(2013)01-0045-07

成层土中考虑衰变作用的污染物迁移规律分析

余 闯,徐江伟,陈樟龙,蔡晓庆,方冬芳

(温州大学 防灾减灾工程研究所,浙江 温州 325035)

摘 要:针对一些有机污染物溶质具有衰变的性质以及土质衬里和地基土等存在着成层性的特点,建立了成层土中考虑衰变作用的污染物迁移计算模型,采用分离变量法获得了解析解,编制了相应的程序。通过对典型算例的计算,并与经典的 GAEA Pollute 软件的计算结果进行了对比分析,两者结果基本一致,证明了所提方法的正确性和可靠性。所提分析方法可供污染物填坑衬里初步设计参考。

关键词:污染物迁移;成层土;衰变;解析解

中图分类号:TU4

文献标志码:A

Pollutant migration in layered soil with consideration of decay

YU Chuang, XU Jiangwei, CHEN Zhanglong, CAI Xiaoqing, FANG Dongfang

(Institute of Engineering Disaster Prevention and Mitigation, Wenzhou University, Wenzhou 325035, China)

Abstract: In view of the decay characteristics of some organic pollutants solute and layered effect of soil liner and ground, a one-dimensional computational model was established to calculate the migration of pollutants in the layered soil with consideration of decay effect. Separation of variables method was used for solving the analytical solution and the corresponding program was compiled. From calculations of a typical example, the results from the classic numerical software GAEA Pollute are consistent with that from the presented method, which proves the validity and reliability of the proposed method. The analytical method proposed can give a reference to preliminary design of landfill liner.

Key words: pollutant migration; layered soil; decay; analytical solution

卫生填埋是世界上应用最广的城市固体废弃物处理方法之一,目前我国已建成近 500 座正规垃圾填埋场,3000 座以上简易填埋场,更有数以万计的垃圾堆放场地^[1-2]。在上覆压力、雨水入渗、垃圾的压缩和降解作用下,将产生大量渗滤液,其中含有大量有毒有害的无机和有机污染物。由于国内垃圾尚未经过严格的分类和筛选,填埋场垃圾的厨余含量比较大导致渗滤液中的有机酸含量非常大。在压力、水头、对流、扩散、弥散等因素作用下,污染物很容易渗漏到填埋场周边土体中,影响到土体的工程性质和环境特性,造成严重的环境工程地质问题。据报道,有很多垃圾填埋场对周边水体或土体造成了明显的污染,我国填埋场对周围环境亦构成了严重的威胁^[3-4],因此迫切需要对污染场地进行环境评估和工程处治。

粘土是填埋场或其衬里系统的重要组成部分也是很多污染场地地基土的主要类型。污染物在粘土中的迁移有物理(对流-扩散、物理吸附)、化学(化学吸附、离子交换吸附、化学反应等)和生物等作用(微生物增长、降解等作用)^[5-6]的影响,运输过程较为复杂。对有机污染物而言,在粘土中主要以挥发态、自由态、溶解

收稿日期:2012-04-25; 修回日期:2012-07-15

基金项目:国家自然科学基金项目(41002091);浙江省 151 人才专项经费;温州市国际合作项目(H20100047)

作者简介:余闯(1977-),男,副教授,博士,主要从事环境岩土、地基处理等研究。E-mail:3945735@qq.com

态和固态等 4 种形态存在,而且绝大多数有机污染物都属于挥发性有机污染物。这些挥发性有机污染物通过挥发、淋浴和由浓度梯度产生扩散等在土壤中迁移或逸入空气、水体中,或被生物吸收迁出土体之外,而且有机物极容易与其他重金属发生螯合反应,因此在分析有机物的迁移规律问题,必须考虑有机污染物溶质的衰变效应,从而提高预估污染物迁移规律的精度。

Foose^[7]建立了有机污染物在复合衬垫中的一维扩散模型并得到了半无限空间边界下的解。陈云敏等^[8-9]建立了污染物通过任意层复合衬垫的一维扩散模型,并在有限厚度边界下得到了解析解。Rowe^[10-11]用 Laplace 变换方法求解了成层土中自由上边界条件和底部有潜水层的下边界条件,并开发了模拟污染物迁移规律的 GAEA Pollute 系列软件。李育超等^[12]考虑污染物的对流和扩散作用,建立一维迁移模型,借鉴双层地基因结理论,给出了污染物迁移的理论解答。谢海建等^[13]以垃圾填埋场衬里系统为研究对象,建立了有机污染物迁移的扩散-吸附模型,分析了不同衬垫系统的渗透特性。栾茂田等^[14]等假设污染源的生物降解效应和含水层中土颗粒对污染物的吸附性,在有限深度条件下基于对流、弥散和地球化学反应等污染物运移机理,提出了填埋场污染物运移过程数值模拟的一维计算模型。

综上所述,可以发现目前尚未对成层粘土中考虑污染物衰变作用的污染物迁移问题展开相关的研究工作。对于实际填埋场衬里系统和地基中受污染影响的土层通常是有限厚的,同时具有成层性。在分子扩散作用在污染物迁移中占主导地位的假设下,本文考虑了可发生衰变的污染物在成层土介质中的扩散问题,建立了一维扩散模型,并利用分离变量法求得解析解,编制了相关的计算程序,得到了考虑污染物衰变的迁移规律。

1 污染物扩散模型

本文建立的成层土中考虑污染物衰变影响的一维扩散模型主要基于以下假设:(1)成层土为均质、饱和的;(2)第 i 层土中阻滞因子和有效扩散系数是常数,不随时间、空间而变化;(3)污染物的扩散是一维的,并且污染源在土层上部,不考虑其他外部污染源;(4)渗滤液中污染物的扩散仅有污染物的溶度梯度引起,忽略水力传导的作用,同时考虑土颗粒对污染物的线性吸附作用;(5)考虑污染物扩散过程中的衰变影响。

在上述基本假设的前提下,简化污染物在土层中的迁移方程,得到了成层土中考虑衰变作用的污染物的一维扩散模型,如图 1 所示。对于成层土中第 i 层,污染物的扩散方程为

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \frac{D_i}{R_i} \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} - \lambda_i C_i. \quad (1)$$

式中: $C_i(z,t)$ 为第 i 层土中的污染物浓度,单位:mg/L; R_i 为第 i 层土对渗滤液中污染物的阻滞因子,无量纲量; D_i 为第 i 层土中污染物扩散的扩散系数,单位: m^2/a ; λ_i 为第 i 层土中污染物的衰变系数, $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$; $T_{1/2}$ 为污染物在土层中半衰期,单位:a; n_i 为第 i 层土的孔隙率,无量纲量; z 为深度,单位:m; t 为时间,单位:a。

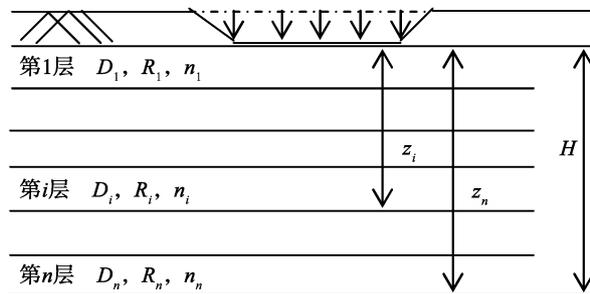


图 1 成层土中污染物一维扩散示意图

Fig. 1 Sketch of one-dimensional diffusion of pollutant migration in layered soil

边界条件可表示为

$$z = 0: C_1(0, t) = C_0, \quad t \geq 0; \quad (2)$$

$$z = H: C_n(H, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

假设在有污染源之前,该土层没有被污染,初始条件可描述为

$$t=0: C_1(z,0)=0, \quad (i=1,2,\dots,n). \quad (4)$$

成层土交界面上浓度和通量的连续条件可分别表示为

$$C_i(z_i,t)=C_{i+1}(z_i,t); \quad (5)$$

$$n_i D_i \frac{\partial C_i(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=z_i} = n_{i+1} D_{i+1} \frac{\partial C_{i+1}(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=z_{i+1}}. \quad (6)$$

2 模型求解

为便于求解,可把非齐次边界条件的定解问题求解转化为另一未知函数的齐次边界条件定解问题求解。利用叠加原理,令:

$$C_i(z,t) = u_i(z) C_0 + \omega_i(z,t), \quad (7)$$

将式(7)代入式(1),得到

$$\frac{\partial \omega_i(z,t)}{\partial t} = \frac{D_i}{R_i} \frac{\partial^2 \omega_i(z,t)}{\partial z^2} - \lambda \omega_i + \frac{D_i}{R_i} C_0 u_i''(z) - \lambda_i C_0 u_i(z). \quad (8)$$

式(8)的求解可化为以下两个定解问题进行求解,分别描述如下:

定解问题 1:

$$\frac{D_i}{R_i} u_i''(z) - \lambda u_i(z) = 0; \quad (9)$$

定解问题 2:

$$\frac{\partial \omega_i(z,t)}{\partial t} = \frac{D_i}{R_i} \frac{\partial^2 \omega_i(z,t)}{\partial z^2} - \lambda_i \omega_i. \quad (10)$$

下面求解定解问题 1:

由式(9)可解得:

$$u_i(z) = k_{i1} e^{r_i z} + k_{i2} e^{-r_i z}, \quad (11)$$

式中, $r_i^2 = \frac{\lambda_i R_i}{D_i}$ 。

由边界条件式(2),(3)和根据交界面的连续条件式(5),(6),可得下列递推关系式:

$$\begin{bmatrix} k_{i+1,1} \\ k_{i+1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\alpha_i) e^{(r_i-r_{i+1})z_i} & \frac{1}{2}(1-\alpha_i) e^{-(r_i+r_{i+1})z_i} \\ \frac{1}{2}(1-\alpha_i) e^{(r_i+r_{i+1})z_i} & \frac{1}{2}(1+\alpha_i) e^{(r_{i+1}-r_i)z_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

式中, $\alpha_i = \frac{n_i D_i r_i}{n_{i+1} D_{i+1} r_{i+1}}$ 。

设

$$\begin{bmatrix} k_{i+1,1} \\ k_{i+1,2} \end{bmatrix} = N_i \begin{bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

则

$$\begin{bmatrix} k_{n1} \\ k_{n2} \end{bmatrix} = M_{n-1} \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

式中,记 $M_{n-1} = N_{i-1} N_{i-2} \cdots N_1 = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ 。 M_{n-1} 由各土层的参数得到,是确定的。

其中:

$$\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{r_n H} M_{12} + e^{-r_n H} M_{22}}{e^{r_n H} (M_{12} - M_{11}) + e^{-r_n H} (M_{22} - M_{21})} \\ \frac{e^{r_n H} M_{11} + e^{-r_n H} M_{21}}{e^{r_n H} (M_{11} - M_{12}) + e^{-r_n H} (M_{21} - M_{22})} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

至此,由式(14)、(15)可求得任意土层系数 k_{i1} 和 k_{i2} 。将它们代入式(11),即得 $u_i(z)$ 的解。

下面求解定解问题 2:

参考文献[15]的求解思路,设,

$$\omega_i(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m [A_{mi} \sin(\mu_i \lambda_m \frac{z}{H}) + B_{mi} \cos(\mu_i \lambda_m \frac{z}{H})] e^{-\beta_m t}. \quad (16)$$

将式(16)代入式(10),可得:

$$\beta_m = \frac{D_i}{R_i} (\frac{\mu_i \lambda_m}{H})^2 + \lambda_i = \frac{D_1}{R_1 H^2} \lambda_m^2 + \lambda_i, \quad (17)$$

式中, $\mu_i = \sqrt{\frac{D_1 R_i}{R_1 D_i}}$ 。

由交界面的连续条件式(5),(6)可知:

$$A_{mi} \sin(\mu_i \lambda_m \frac{z_i}{H}) + B_{mi} \cos(\mu_i \lambda_m \frac{z_i}{H}) = A_{m,i+1} \sin(\mu_{i+1} \lambda_m \frac{z_i}{H}) + B_{m,i+1} \cos(\mu_{i+1} \lambda_m \frac{z_i}{H}) \quad (18)$$

$$n_i D_i \frac{\mu_i \lambda_m}{H} A_{mi} \cos(\mu_i \lambda_m \frac{z_i}{H}) - B_{mi} n_i D_i \frac{\mu_i \lambda_m}{H} \sin(\mu_i \lambda_m \frac{z_i}{H}) =$$

$$n_{i+1} D_{i+1} \frac{\mu_{i+1} \lambda_m}{H} A_{m,i+1} \cos(\mu_{i+1} \lambda_m \frac{z_i}{H}) - n_{i+1} D_{i+1} \frac{\mu_{i+1} \lambda_m}{H} B_{m,i+1} \sin(\mu_{i+1} \lambda_m \frac{z_i}{H}). \quad (19)$$

记: $\bar{A}_i = \sin(\mu_{i+1} \lambda_m \frac{z_i}{H})$, $\bar{B}_i = \sin(\mu_i \lambda_m \frac{z_i}{H})$, $\bar{C}_i = \cos(\mu_{i+1} \lambda_m \frac{z_i}{H})$, $\bar{D}_i = \cos(\mu_i \lambda_m \frac{z_i}{H})$, $\gamma_i = \frac{n_i D_i \mu_i}{n_{i+1} D_{i+1} \mu_{i+1}}$,

将式(18),(19)写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_i & \bar{D}_i \\ \gamma_i \bar{D}_i & -\gamma_i \bar{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mi} \\ B_{mi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_i & \bar{C}_i \\ \bar{C}_i & -\bar{A}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m,i+1} \\ B_{m,i+1} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

从而可以得到递推式:

$$\begin{bmatrix} A_{m,i+1} \\ B_{m,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_i \bar{B}_i + \gamma_i \bar{C}_i \bar{D}_i & \bar{A}_i \bar{D}_i - \gamma_i \bar{B}_i \bar{C}_i \\ \bar{B}_i \bar{C}_i - \gamma_i \bar{A}_i \bar{D}_i & \bar{C}_i \bar{D}_i + \gamma_i \bar{A}_i \bar{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mi} \\ B_{mi} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

记

$$S_i = \begin{bmatrix} \bar{A}_i \bar{B}_i + \gamma_i \bar{C}_i \bar{D}_i & \bar{A}_i \bar{D}_i - \gamma_i \bar{B}_i \bar{C}_i \\ \bar{B}_i \bar{C}_i - \gamma_i \bar{A}_i \bar{D}_i & \bar{C}_i \bar{D}_i + \gamma_i \bar{A}_i \bar{B}_i \end{bmatrix},$$

由边界条件式(2)可知:

$$\begin{bmatrix} A_{m1} \\ B_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由边界条件式(3)可知:

$$[\sin(\mu_n \lambda_m) \cos(\mu_n \lambda_m)] \cdot S_{n-1} \cdot S_{n-2} \cdots S_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (22)$$

根据式(22)可求得无穷多个特征值 λ_m 。

由初始条件式(4)知:

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m [A_{mi} \sin(\mu_i \lambda_m \frac{z}{H}) + B_{mi} \cos(\mu_i \lambda_m \frac{z}{H})] = -u_i(z) C_0. \quad (23)$$

记,

$$g_{mi}(z) = A_{mi} \sin(\mu_i \lambda_m \frac{z}{H}) + B_{mi} \cos(\mu_i \lambda_m \frac{z}{H}), \quad (24)$$

由准正交函数的正交性质^[16-18]可知:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{z_{i-1}}^{z_i} n_i R_i g_{mi} g_{ni} dz = 0 \quad (m \neq n). \tag{25}$$

所以求得:

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \int_{z_{i-1}}^{z_i} -u_l(z) C_0 n_i R_i g_{mi} dz}{\sum_{i=1}^{\infty} \int_{z_{i-1}}^{z_i} n_i R_i g_{mi}^2 dz} \tag{26}$$

将以上所求系数代入式(16),即得 $w_i(z, t)$ 。至此求得了 $C_i(z, t)$ 的解。进一步可求得污染物的通量计算式为

$$f_i(z, t) = -n_i D_i \frac{\partial C_i}{\partial z} = -n_i D_i r_i (k_{i1} e^{r_i z} - k_{i2} e^{-r_i z}) - \frac{n_i D_i \mu_i}{H} \sum_{m=1}^{\infty} C_m \lambda_m [A_{mi} \cos(\mu_i \lambda_m \frac{z}{H}) - B_{mi} \sin(\mu_i \lambda_m \frac{z}{H})] e^{-\beta_m t}. \tag{27}$$

3 算例分析与验证

基于上述解析解,笔者编制了相应的计算程序。采用了文献[8]中提供的基本参数,如表 1 所示,对层状土中污染物的一维迁移问题典型算例进行了计算。边界条件为顶部浓度为 1.0,底部为 0。本文模型在 $\lambda = 0$ 时,可退化到文献[8]的模型,此时两者结果完全一致。同时,本文的计算结果与著名的污染物分析软件 GAEA Pollute V7 得出的结果进行了对比,如图 2 中所示,无论是考虑衰变还是不考虑衰变作用,土层中不同时期沿深度分布的污染物浓度数据都基本吻合,这也说明本文解答及所编写程序的可靠性。

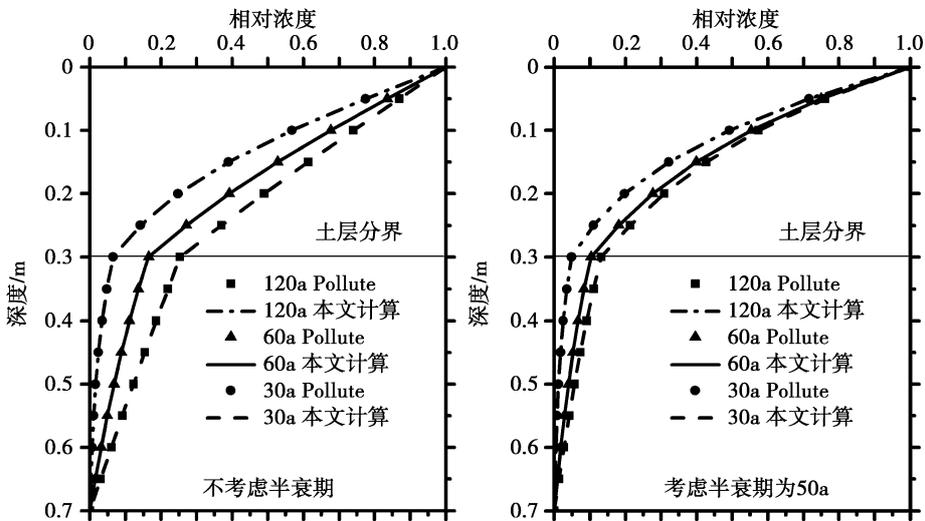


图 2 本文计算与数值计算结果对比

Fig. 2 Comparisons of results from presented method and numerical calculation

表 1 土层性质参数

Table 1 Property parameters of soil layers

土层类型	孔隙率 n	扩散系数 $D / (m^2 \cdot s^{-1})$	阻滞因子 R	土层厚度 h/m
土层 1	0.3	6.5×10^{-11}	4.0	0.3
土层 2	0.5	1.3×10^{-10}	2.0	0.4

图 3 中给出了土层 1 和 2 顺序改变后 30 a,60 a 和 120 a 后污染物浓度的分布情况,可见土层的分布对污染物浓度的分布有影响,扩散系数较小的在上层的时候,土层中某时刻的污染物浓度相对会比较低。图 4 给出了 120 a 时,考虑不同半衰期和不考虑半衰期污染物浓度沿深度的变化规律,可见半衰期的大小对污染

物浓度的分布影响较大。

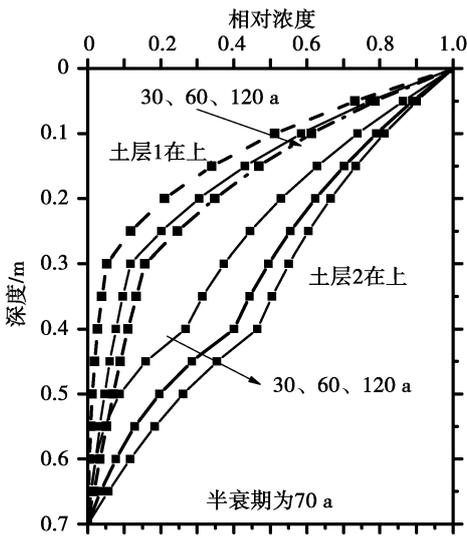


图3 土层条件对污染物浓度的影响
Fig. 3 Effect of layered soil condition on pollutant concentration

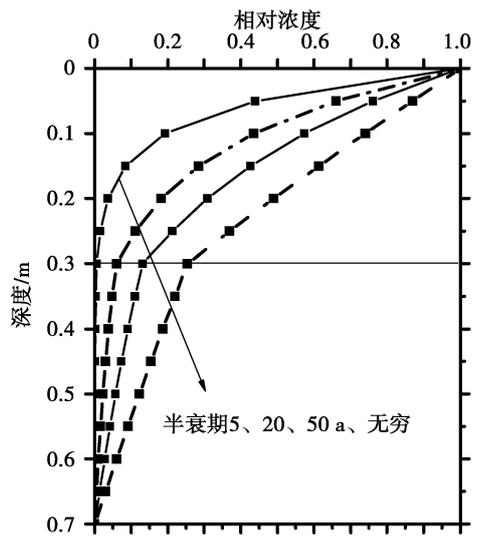


图4 不同半衰期对浓度的影响(120 a)
Fig. 4 Effect of half-life on pollutant concentration after 120 years

图5给出了半衰期为50 a的时候,不同深度处浓度随时间的变化关系,可见污染物浓度随深度衰减很快,在60 a左右时污染物浓度相对比较稳定。图6给出了不同半衰期深度0.1m处浓度随时间的变化,随着半衰期的缩短,污染物浓度降低明显,且污染物浓度稳定的时间也较短,当半衰期为5 a,10 a左右污染物的浓度就相对比较稳定,即上部污染物引起的扩散和土层的衰变作用两者基本平衡。

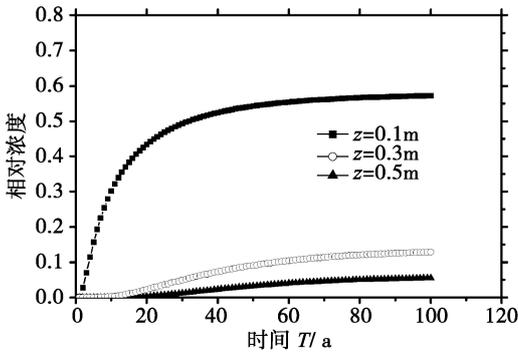


图5 半衰期为50 a时不同深度浓度-时间关系
Fig. 5 Concentration-time relationship for different depths with half-life being 50 years

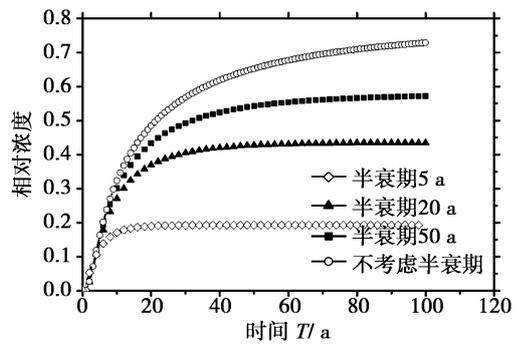


图6 不同半衰期 z=0.1m 深度处浓度-时间关系
Fig. 6 Concentration-time relationship for different half-life at depth z=0.1 m

4 结论

本文建立了考虑衰变作用的成层土中污染物的一维扩散模型,采用分离变量法,利用准正交函数的正交性质获得了解析解,编制了相应的程序。通过对典型算例的计算,并与经典的 GAEA Pollute 软件的计算结果进行了对比分析,两者结果基本一致,证明了本文所提方法的可靠性和正确性。考虑半衰期的作用,土层中污染物的浓度有较大降低;在成层土中,上层土具有较好的防渗性能可以有效地降低土层中污染物的浓度。本文的解析解可作为具有衰变性质污染物的迁移模型解答和作为填埋场衬里设计的初步参考。本文的计算模型较为简化,比如可以进一步考虑对流和粘土的非线性吸附作用,将另文阐述。

参考文献:

- [1] 杜延军,金飞,刘松玉,等. 重金属工业污染场地固化/稳定化处理研究进展[J]. 岩土力学,2011,32(1): 116 - 124.
DU Yanjun, JIN Fei, LIU Songyu, et al. Review of stabilization/solidification technique for remediation of heavy metals contaminated lands[J]. Rock and soil mechanics, 2011,32(1): 116 - 124. (in Chinese)
- [2] 陈云敏,林伟岸,詹良通,等. 城市生活垃圾抗剪强度与填埋龄期关系的试验研究[J]. 土木工程学报, 2009,42(3):11 - 117.
CHEN Yunmin, LIN Weian, ZHAN Liangtong, et al. A study on the relationship between the shear strength of municipal solid waste and the fill age [J]. China Civil Engineering Journal, 2009, 42(3): 111 - 117. (in Chinese)
- [3] 查甫生,许龙,崔可锐. 水泥固化重金属污染土的强度特性试验研究[J]. 岩土力学,2012,33(3):652 - 657.
ZHA Fusheng, XU Long, CUI Kerui. Strength characteristics of heavy metal contaminated soils stabilized/solidified by cement[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012,33(3):652 - 657. (in Chinese)
- [4] DU Y J, HAYASHI S. A laboratory study on migration of k + in a two - layer landfill liner system [J]. Waste Management & Research, 2005, 23: 439 - 447.
- [5] Rowe R K, QUIGLEY R M, Brachman R W L, et al. Barrier Systems for Waste Disposal [M]. London And New York: Spon Press, 2004.
- [6] 郑春苗. 地下水污染物迁移模拟[M]. 高等教育出版社,2009.
ZHENG Chunmiao. Applied Contaminant Transport Modeling [M]. High Education Press, 2009.
- [7] Foose G J. Transit - time design for diffusion through composite liners [J]. J Geotech Geoenviron, 2002, 128: 590 - 601.
- [8] 陈云敏,谢海建,柯瀚,等. 层状土中污染物的一维扩散解析解[J]. 岩土工程学报,2006,28(4): 521 - 524.
CHEN Yunmin, XIE Haijian, KE Han, et al. Analytical solution of contaminant diffusion through multi - layered soils [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(4):521 - 524. (in Chinese)
- [9] 谢海建,唐晓武,陈云敏,等. 原始土层影响下成层介质污染物一维扩散模型[J]. 浙江大学学报:工学版,2006,40(12): 2191 - 2195.
XIE Haijian, TANG Xiaowu, CHEN Yunmin, et al. One - dimensional model for contaminant diffusion through layered media [J]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science, 2006,40(12): 2191 - 2195. (in Chinese)
- [10] Rowe R K. Long - term performance of contaminant barrier systems [J]. Geotechnique,2005,55(9): 631 - 677.
- [11] Rowe R K, Booker J R. POLLUTE Ver. 7 Reference Guide[M]. GAEA Technologies Ltd., 2004.
- [12] LI Yuchao, CLEALLJOHN Peter. Analytical solutions for advective - dispersive solute transport in double - layered finite porous media[J]. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 2011;35:438 - 460.
- [13] XIE Haijian, CHEN Yunmin, KE Han, et al. Analysis of diffusion - adsorption equivalency of landfill liner systems for organic contaminants [J]. Journal of Environmental Sciences, 2009, 21:552 - 560.
- [14] 栾茂田,张金利,杨庆. 污染物运移过程的一维数值分析[J]. 岩土工程学报,2005,27(2): 185 - 190.
LUAN Maotian, ZHANG Jinli, YANG Qing. One - dimensional numerical analyses of migration processes of pollutants through a clay liner considering sorption of aquifer [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(2): 185 - 190. (in Chinese)
- [15] Lee P K K, Xie K H, Cheung Y K. A study on one dimensional consolidation of layered systems [J]. Int J for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1992, 16: 815 - 831.
- [16] Schiffman R L, Stein J R. One - dimensional consolidation of layered systems [J]. Jsmfd Asce, 1970, 96(4): 1499 - 1504.
- [17] Bulavin, P E, Kashcheev V M. Solution of the non - homogeneous heat conduction equation for multilayered bodies [J]. International Chemical Engineering, 1965, 5:112 - 115.
- [18] Tittle C W. Boundary value problems in Composite Media: quasi - orthogonal functions [J]. Journal of Applied Physics, 1965, 36:1486 - 1488.