

# 空-空导弹微分对策 最佳导引律的研究

西北工业大学 侯明善

## 摘 要

本文研究空-空导弹微分对策最佳导引问题中目标加速度及导弹加速度对制导精度的影响。根据推得的三类制导律讨论了指标中权系数的选择原则,并给出了剩余飞行时间(time-to-go)的两种估计方案。仿真结果表明:导弹侧向加速度作为制导信号对导引精度有十分明显的提高,如果目标加速度不大,在制导过程中引入目标加速度则效果不显著。

## 一、引 言

比例导引方法由于简单易行而获得了广泛的应用,但对高机动目标的导引效果则大为下降<sup>[1,2]</sup>。改进的比例导引方法并没有克服比例导引的固有缺陷,实施的难度增大,因此很少应用于实际。

从60年代开始,人们开始利用现代控制理论设计新型导引规律,线性二次调节理论首先得到应用,相继又出现了微分对策制导,奇异摄动制导,可达集制导等方法。大量的研究工作表明,现代制导律比古典的比例导引法性能远为优越,如可以对付高机动目标,全向发射能力强,内发射边界小,具有最小的终端脱靶等<sup>[2,3]</sup>。不过,在现代制导律中,首先必须准确地估计剩余飞行时间(time-to-go,简记为 $t_{go}$ ),因为它对现代制导律的性能影响最为严重<sup>[3]</sup>,目前对此还没有成熟的方案可寻。其次,现代制导律还要求知道目标的加速度,它影响制导律对目标机动性的反应能力。在实用上不可能测得目标的加速度,只能依靠估计的方法,在仅可获得视线角和角速率的情况下,建立目标加速度模型是目前研究的一个重要课题。然而在短程空-空弹上实施这些方案是否可行却值得怀疑。导弹自动驾驶仪及弹体动态延迟,侧向过载限制,气动特性时变性是影响导引精度的另一大问题。本文利用微分对策制导律研究了某型空-空导弹的侧向加速度和目标加速度对制导性能的影响,比较了它们之间作用的差异,并就指标中权系数的选择方法和 $t_{go}$ 的估计方法给予了讨论。

## 二、最佳制导律及选参讨论

为了问题的分析方便,考虑导弹和目标同处于一个平面的最佳制导。拦截几何关系见图1。图中 $M$ 代表导弹, $T$ 代表目标; $V_M$ , $V_T$ 分别为导弹和目标的速速, $\theta_M$ , $\theta_T$ 分

1986年11月10日收到

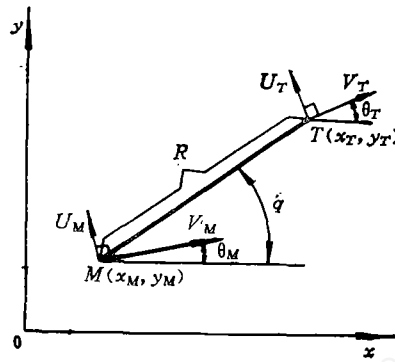


图 1 拦截几何关系

别为其速度方向角,  $R$  为相对距离;  $U_M, U_T$  为导弹和目标的控制量。  $xoy$  为初始参考坐标系;  $(x_M, y_M), (x_T, y_T)$  为导弹和目标的位置坐标。假定在  $xoy$  坐标系下导弹和目标在两坐标轴方向状态和控制分别解耦, 且完全可控, 其动态特性均可用一阶环节代表, 时间常数分别为  $\frac{1}{\lambda}$  和  $\frac{1}{\omega}$ 。

令  $x = x_T - x_M, y = y_T - y_M, V_x = \dot{x}, V_y = \dot{y}$   
 记  $X = [x, y]^T, V = [V_x, V_y]^T, a_M = [a_{Mx}, a_{My}]^T,$   
 $a_T = [a_{Tx}, a_{Ty}]^T, U_M = [U_{Mx}, U_{My}]^T, U_T = [U_{Tx}, U_{Ty}]^T,$  则

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= V \\ \dot{V} &= a_T - a_M \\ \frac{1}{\lambda} \dot{a}_M &= -a_M + U_M \\ \frac{1}{\omega} \dot{a}_T &= -a_T + U_T \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

上式中,  $a_{Mx}, a_{My}$  为导弹加速度沿两坐标轴的分量, 其控制量分别为  $U_{Mx}, U_{My}$ ;  $a_{Tx}, a_{Ty}, U_{Tx}, U_{Ty}$  则是对目标而言的。取性能指标如下

$$J = \frac{1}{2} a X(t_f)^T X(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (b_M U_M^T U_M - b_T U_T^T U_T) dt \quad (2)$$

式中  $t_f$  为拦截的终端时间, 假设给定。  $a, b_M, b_T$  为权系数。利用双边极值原理可推得三类显式制导表达式。

### I 类导引律

在方程 (1) 中, 令  $\omega \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow \infty$ , 则

$$\left. \begin{aligned} U_{Mx} &= N(t) [x(t) + t_{go} \cdot V_x(t)] / b_M \\ U_{My} &= N(t) [y(t) + t_{go} \cdot V_y(t)] / b_M \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{Tx} &= N(t) [x(t) + t_{go} \cdot V_x(t)] / b_T \\ U_{Ty} &= N(t) [y(t) + t_{go} \cdot V_y(t)] / b_T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\text{式中} \quad N(t) = a \cdot t_{go} / [1 + a K t_{go}^3 / 3] \quad (5)$$

$K = 1/b_M - 1/b_T, t_{go} = t_f - t$  为剩余飞行时间。

## I 类导引律

在方程 (1) 中, 令  $\omega \rightarrow \infty$ , 则

$$\left. \begin{aligned} U_{Mx} &= P(t)[x(t) + t_{go} \cdot V_x(t) + g(t)a_{Mx}]/b_M \\ U_{My} &= P(t)[y(t) + t_{go} \cdot V_y(t) + g(t)a_{My}]/b_M \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{Tx} &= P'(t)[x(t) + t_{go} \cdot V_x(t) + g(t)a_{Mx}]/b_T \\ U_{Ty} &= P'(t)[y(t) + t_{go} \cdot V_y(t) + g(t)a_{My}]/b_T \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中  $g(t) = (1 - \lambda t_{go} - e^{-\lambda t_{go}})/\lambda^2$

$$P(t) = -a\lambda g(t) / \left[ 1 + \frac{K}{3} at_{go}^3 - \frac{a}{b_M \lambda} t_{go}^2 + \frac{a}{b_M \lambda^2} t_{go} (1 - 2e^{-\lambda t_{go}}) + \frac{1}{2b_M \lambda^3} (1 - e^{-2\lambda t_{go}}) \right]$$

$$P'(t) = t_{go} P(t) / (g(t) \cdot \lambda), \quad K = 1/b_M - V/b_T$$

## II 类导引律

在方程 (1) 中令  $\lambda \rightarrow \infty$ , 则

$$\left. \begin{aligned} U_{Mx} &= Q(t)[x(t) + t_{go} \cdot V_x(t) + h(t)a_{Tx}]/b_M \\ U_{My} &= Q(t)[y(t) + t_{go} \cdot V_y(t) + h(t)a_{Ty}]/b_M \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{Tx} &= Q'(t)[x(t) + t_{go} \cdot V_x(t) + h(t)a_{Tx}]/b_T \\ U_{Ty} &= Q'(t)[y(t) + t_{go} \cdot V_y(t) + h(t)a_{Ty}]/b_T \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中  $h(t) = (\omega t_{go} - 1 + e^{-\omega t_{go}})/\omega^2$

$$Q(t) = at_{go} / \left[ 1 + \frac{K}{3} at_{go}^3 + \frac{a}{b_T \omega} t_{go}^2 + \frac{a}{b_T \omega^2} t_{go} (2e^{-\omega t_{go}} - 1) + \frac{1}{2b_T \omega^3} (e^{-2\omega t_{go}} - 1) \right]$$

$$K = 1/b_M - 1/b_T$$

$$Q'(t) = \omega Q(t) h(t) / t_{go}$$

现在讨论权系数  $a, b_M, b_T$  及  $\lambda, \omega$  的选择。

(1)  $a$ 

$a$  主要反映对终端脱靶的要求, 如要求零脱靶, 则取  $a$  趋于无穷。也可取  $a$  为有限大常数, 以限制终端指令幅度。

(2)  $b_M, b_T$  的关系

$b_M, b_T$  的关系视导引律的类型而定, 下面分别讨论。

对 I 类导引律

由 (3) 式和 (4) 式知  $U_{Mx} \cdot b_M = U_{Tx} \cdot b_T$ , 考虑到  $U_{Mx} = a_{Mx}, U_{Tx} = a_{Tx}$  以及  $a_{Mx} \propto A_{Mmax}, a_{Tx} \propto A_{Tmax}$  ( $A_{Mmax}, A_{Tmax}$  分别为导弹和目标的非法向加速度), 故可得

$$b_T = \left( \frac{A_{Mmax}}{A_{Tmax}} \right) b_M \quad (10)$$

同时, 为保证导引收敛,  $N(t)$  应满足  $N(t) > 0$ , 在  $a \rightarrow \infty$  时可知有

$$b_T > b_M \quad (11)$$

对 II 类导引律

由 (6) 式和 (7) 式可以推得

$$b_T = \left( \frac{A_{M_{max}}}{A_{T_{max}}} \right) b_M \lambda t_{go} / (\lambda t_{go} - 1 + e^{-\lambda t_{go}}) \quad (12)$$

同前面一样, 从  $P(t) > 0$  并考虑  $a \rightarrow \infty$  则

$$b_M < b_T f(t_{go}) \quad (13)$$

而

$$f(t_{go}) = [\lambda^2 t_{go}^2 - 3\lambda t_{go} + 3(1 - 2e^{-\lambda t_{go}})] / \lambda^2 t_{go}^2$$

由 (13) 式易知  $f(t_{go})$  应为正, 并由计算知有关系; 对于  $f(t_{go})$  在  $(0, \infty)$  上,  $\inf(f) = 0$ ,  $\sup(f) = 1$ , 且  $f$  的下确界在  $1.8 < \lambda t_{go} < 2$  上取得。考虑到一般情况下导引头盲区为 100 m 左右, 这时  $t_{go} = 0.1 \sim 0.2$  s, 根据  $f$  的增函数性质, 实际只要保证在这时  $f$  大于零就行了。分三种情况讨论。第一, 若  $\lambda t_{go} \gg 1$ , 这时  $f \approx (\lambda^2 t_{go}^2 - 3\lambda t_{go} + 3) / \lambda^2 t_{go}^2$ 。由于这时  $f$  极小值在  $\lambda t_{go} = 2$  取得,  $\inf(f) = 1/4$ , 故对  $\lambda t_{go} \gg 1$ ,  $f > 1/4$ , 所以只要取  $b_T > 4b_M$  便满足  $P(t) > 0$  的要求。第二,  $\lambda t_{go}$  不满足上述条件, 但可使  $f > 0$ , 则必须选取  $b_T \gg b_M$ , 也就是要求目标基本无机动。第三,  $\lambda t_{go}$  使  $f < 0$ , 则 (13) 式无法满足, 导弹动态延迟太大, 难以攻击目标。

由上面的三点可知, 为了攻击机动目标, 导弹时滞不应太大, 在盲区附近满足  $\lambda t_{go} \gg 1$  可作为对导弹时滞的限制条件。一般考虑  $\lambda t_{go} \gg 1$ , 从而只要取  $b_T > 4b_M$ 。

对 III 类导引律

由 (8) 式及 (9) 式可以推得

$$b_T = b_M \left( \frac{A_{M_{max}}}{A_{T_{max}}} \right) (\omega t_{go} - 1 + e^{-\omega t_{go}}) / \omega t_{go} \quad (14)$$

由  $Q(t) > 0$ , 并令  $a \rightarrow \infty$ , 则有

$$b_T / b_M > f_1(t_{go})$$

而

$$f_1(t_{go}) = [\omega^2 t_{go}^2 - 3\omega t_{go} + 3(1 - 2e^{-\omega t_{go}})] / \omega^2 t_{go}^2$$

由于  $\sup(f_1) = 1$ , 故只要满足

$$b_T > b_M \quad (15)$$

(3)  $\omega$  及  $\lambda$  的确定

一般地,  $\omega$  是不可能知道的, 实用上仅能对目标的动态过程作一近似估计, 通常应有  $\omega \leq \lambda$ 。

由于导弹实际上是一时变高阶动态过程, 当作一阶环节仅是粗略的近似。一般按特征点分析而得到, 同时还应保证使 (13) 式成立。

从上面的讨论可知, 具有时滞的导弹攻击灵巧目标, 时滞有一下限约束且理论上不能保证零脱靶; 对于灵巧导弹攻击具有时滞的目标, 则可以保证实现零脱靶, 从而说明提高导弹快速响应能力非常重要。

### 三、剩余飞行时间的估计问题

剩余飞行时间  $t_{go}$  对现代制导系统的导引精度有极大的影响, 只有当  $t_{go}$  的估值精度处在一定范围内时, 现代制导系统才具有超越古典的比例制导的优越性<sup>[3]</sup>。目前提出的方法不少, 最为简单的是取  $t_{go} = -R/\dot{R}$ , 但精度太差。Pawling<sup>[4]</sup>曾给出一种所谓最小

分离时间而不是 $t_{go}$ 的估计方法，它另要假设目标无机动。 $V_{ork}$ 及 $Pastrick^{[6]}$ 给出了两种 $t_f$ 的估计方法，并用二种准则加以约束，需要求解非线性方程，计算复杂，没有给出精度。 $Riggs^{[2]}$ 方案计算简单，它和 $Lee^{[6]}$ 提出的方法具有相当的精度。 $Wiseman$ 和 $Mitchell^{[7]}$ 的方法实施难度太大，没有吸引力。本文考虑以上各种方法的优缺点，给出两种修正的 $Riggs$ 方法。首先将 $Riggs$ 法罗列于后。

**Riggs法：**

(1) 导弹轴向加速度模型取为

$$A_m = \begin{cases} A_{max} & \text{发动机工作} \\ A_{min} & \text{发动机停止} \end{cases}$$

(2) 目标加速度假定为零，导弹轴向加速度在视线方向加速度中占优势；

(3) 导弹轴向加速度平均值用下式近似

$$\tilde{A} = \frac{A_{max}(t_{B0} - t_0) + A_{min}(t_f - t_{B0})}{t_f - t_0}$$

这里 $t_{B0}$ 为发动机关机时刻， $t_0$ 为初始时刻，则

$$t_{go} = R / (V_o + \tilde{A}t_{go}), \quad V_o = -\dot{R}$$

解得最小解为

$$t_{go} = 2R / (V_o + \sqrt{V_o^2 + 4\tilde{A}R}) \quad (16)$$

上式本质上是一迭代过程，初始量按 $t_{go}(0) = -R(0) / \dot{R}(0)$ 取，式中各量均作标量(以下同)。

改进方案：导弹速度一般可近似用图 2 表示。设 $V_+$ 和 $V_-$ 分别代表导弹发动机工作和关闭以后的平均速度，则在整个飞行段上的平均速度为

$$\bar{V}_m = \frac{V_+(t_{B0} - t_0) + V_-(t_f - t_{B0})}{t_f - t_0} \quad (17)$$

由于在整个拦截过程中， $\dot{R}$ 不是常数，故视线方向的平均速度 $V_o \neq -\dot{R}$ ，因此，用 $\bar{V}_m$ 来修正量 $V_o$ ，使得 $V_o$ 中导弹速度成份以其平均速度代替，从而以加权速度近似作为视线方向的平均速度

$$\bar{V}_o = W \cdot \bar{V}_m + V_o(1 - W) \quad (18)$$

而

$$W = W_0(1 - t/t_f) \quad (19)$$

$W_0$ 为初始加权量，一般取 $0.4 \sim 0.6$ 。

(1) 速度修正方案

将(18)式代入(16)式可得速度修正方案

$$t_{go} = 2R / (\bar{V}_o + \sqrt{\bar{V}_o^2 + 4\tilde{A}R}) \quad (20)$$

(2) 平均值方案

上述方法的缺点是假设目标无机动。由于现代制导律主要针对高机动目标而设计的，

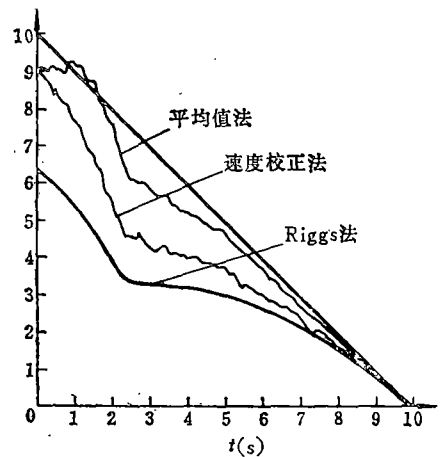


图 2 导弹速度曲线示意图

因而这种假设的合理性不成立。对此，首先估计出视线方向的加速度估计值，然后给以加权修正作为近似的平均值。

设视线方向的平均加速度为  $A$ ，平均速度为  $V_{cM}$ ，则近似有

$$R = V_{cM} t_{go} + \frac{1}{2} A t_{go}^2$$

故  $A = 2(R - V_{cM} t_{go}) / t_{go}^2$  (21)

视线方向加权加速度  $\bar{A}$  为

$$\bar{A} = W_1 \cdot A + \tilde{A} (1 - W_1)$$
 (22)

这里， $W_1$  为加权值，一般取为 0.5~0.8。而  $V_{cM}$  的计算公式为

$$V_{cM} = V_{Mr} \cdot W_2 + V_c (1 - W_2)$$
 (23)

其中  $W_2 = W_2 (1 - K_1 t / t_f)$ ， $W_2 = 0.4 \sim 0.6$ ， $K_1 = 0.3 \sim 0.9$ 。 $V_{Mr}$  为导弹速度校正曲线，见图 3 所示。这样，加速度修正后

$$(t_{go})_1 = 2R / (V_{cM} + \sqrt{V_{cM}^2 + 4\bar{A}R})$$
 (24)

而  $(t_{go})_2 = R / V_{cM}$  (25)

得到平均值

$$t_{go} = \frac{1}{2} [(t_{go})_1 + (t_{go})_2]$$
 (26)

引入 (25) 式的原因：若  $\bar{A}$  估计不准可以防止误差传播。引入  $V_{Mr}$  的原因是为了得到更准确的导弹速度平均值。 $V_{Mr}$  的作法从图 3 可以看到，作  $db$  线和  $ac$  线斜率相反，作  $bf$  线和  $ce$  线斜率相反，而  $abcd$  为矩形。

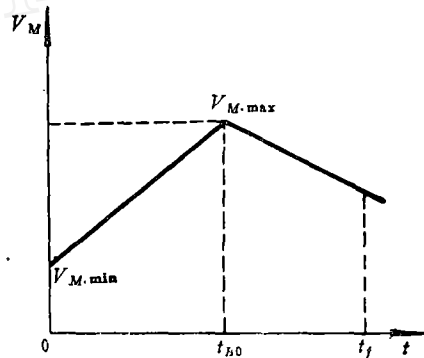


图 3 导弹速度及校正速度曲线

修正方案仍为迭代过程，初始值按  $t_{go}(0) = 0.7R / V_{cM}$ ，每次迭代求解时以上次估值减采样间隔作下次预估值。可以设置迭代次数限制和精度限制作迭代结束的条件。本文的计算不采用迭代法，从而说明修正方案的精度和应用比原算法要好。精度比较见图 4。计算时取初始发射距离为 6000m，目标速度为 250m/s，加速度为 4g，目标首先作

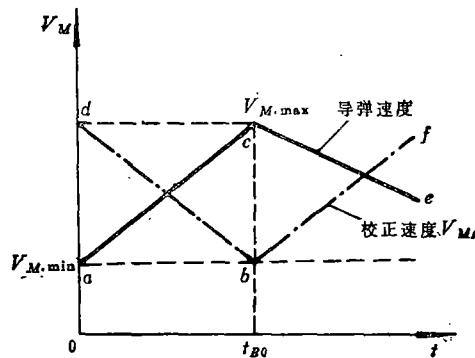


图 4  $t_{go}$  估计方案精度比较

2.5s 的直线运动，然后按规定加速度作圆周运动。

## 四、结果讨论

### 1. 目标运动方式选择

本文选择三种目标运动方式, 直线飞行, 机动上转弯及下转弯飞行。机动飞行前首先作 2.5s 的直线飞行, 而后作圆周运动, 速度取为 250m/s, 加速度为 7g 和 4g, 运动方式见图 5 所示。这样目标运动状态可用 0, 1, -1 代表。

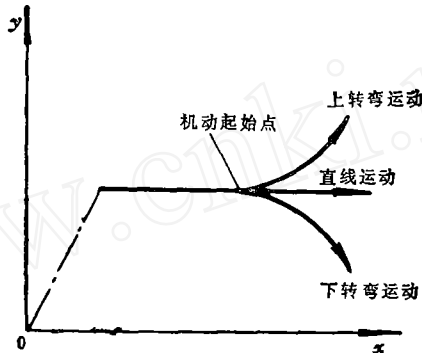


图 5 目标运动方式示意图

### 2. 仿真结果

利用导引律类 I, 引入目标加速度和导弹侧向加速度后, 通过适当坐标变换, 导弹指令计算公式为

$$U'_M = P(t) [(R + \dot{R}t_{go}) \sin(q - \theta_M) + R\dot{q}t_{go} \cos(q - \theta_M) + h(t) a_T \text{sign}(\dot{\theta}_T) \cos(\theta_T - \theta_M)] / b_M$$

而

$$\text{sign}(\dot{\theta}_T) = \begin{cases} 1 & \dot{\theta}_T > 0 \\ 0 & \dot{\theta}_T = 0 \\ -1 & \dot{\theta}_T < 0 \end{cases}$$

$$U''_M = P(t) [(R + \dot{R}t_{go}) \sin(q - \theta_M) + R\dot{q}t_{go} \cos(q - \theta_M) + g(t) a_M] / b_M$$

$P(t)$ ,  $h(t)$ ,  $g(t)$  见前面给出的表达式。初始瞄准关系为  $q(0) = \theta(0)$ ,  $R(0) = 6000\text{m}$ 。对同一目标运动方式, 初始  $q(0)$  分别为  $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 90^\circ$ , 计算结果见表 1。导弹参数取某型空-空弹在 10km 高度的参数, 最大法向过载小于 15g。

表 1 脱靶量计算结果 单位: m

目标运动状态	$a_T = 4g$			$a_T = 7g$	平均脱靶	标准差	指令形式
	0	1	-1	-1			
脱靶量	4.3357	4.362	3.8901	4.0105	4.1498	1.5504	$U'_M$ 但 $a_T = 0$
	4.3357	3.781	3.836	3.306	3.8146	1.5748	$U_M$
	0.4003	1.7513	0.3287	1.059	0.8853	0.7348	$U''_M$

### 3. 结论

从表 1 的计算结果可以知道, 在制导过程中引入目标加速度以后对平均脱靶和方差影响不大, 而引入导弹加速度后, 平均脱靶和方差根则大为下降, 这说明导弹加速度引入于制导过程其作用要优于目标加速度, 从另外一方面也说明提高导弹自动驾驶仪快速性和传递系数稳定性具有十分重要的意义, 因为导弹加速度引入于制导过程后提高了大回路的稳定性和快速性。因此在实际中, 应该首先以发挥导弹的现有潜力为目标, 尽量提高导弹的整体性能。

本文是在西北工业大学宇航工程系陈新海教授指导下完成的, 在此表示衷心感谢。

### 参 考 文 献

- [1] Ho, Y. C., Bryson, A. E. and Baron, S., Differential Games and Optimal Pursuit-Evasion Strategies, IEEE Trans., (1965), Vol. AC-10, pp385~389.
- [2] Riggs, T. L., Linear Optimal Guidance for Short Range Air-to-Air Missiles, Proce. IEEE NA-ECON (1979), pp. 756~764.
- [3] Nesline, F. W. and Iarchan, P., A New Look at Classical Versus Modern Homing Missile Guidance, AIAA 79~1727 (1979).
- [4] Pawling, A. G., Passive Determination of Homing Time, AIAA Journal, Vol. 6, №8, August (1968), pp1604~1606.
- [5] York, R. J. and Pastrick, H.L., On the Determination of Unspecified  $t$ , in a Guided Missile Optimal Control Law Application, Proceedings of the 1977 IEEE Conference on Decision and Control, pp1211~1215.
- [6] Lee, G. K. F., Estimation of the Time-to-go Parameter for Air-to-Air Missiles, J. Guidance, Vol. 8, №2, March-April (1985), pp262~266.
- [7] Wiseman, A. P. and Mitchell, J. R., New Navigation and Guidance Laws for Homing Missiles, Proce. IEEE Southeastcon'83 (1983), pp582~587.

## A STUDY OF DIFFERENTIAL GAME OPTIMAL GUIDANCE LAWS FOR AIR-TO-AIR MISSILES

*Hou Mingshan*

*(Northwestern Polytechnical University)*

### Abstract

Studies in this paper are the effects of target and missile accelerations on terminal miss-distance in differential game optimal guidance for air-to-air missiles. According to the three types of guidance laws obtained, the choice of the weighing factors in performance index is discussed and two schemes of time-to-go estimation are given. The simulation shows that missile lateral acceleration, when taken as guidance signal, significantly improves the terminal accuracy, and target acceleration, if it is not large enough when introduced into guidance process, generally has no such big effect.