最优导引律

韩 京 清

摘 要

本文用最优控制理论讨论导引律。引入了"零控拦截状态"及由它们组成的"L曲面"的概念。说明一系列古典导引法所要达到的只是"L曲面"的近似曲面。讨论了达到"L曲面"的最优导引律。

一、最优控制问题

导引律是由系统的实时状态决定的控制律。这种控制律使系统在某一时刻达到零脱靶，或达到某一种终止状态。从控制论的观点看，导引律就是依赖于实时状态的综合控制（或反馈控制）。因此，用最优控制的综合理论讨论各种导引律，是比较适合的，也是比较有效的。下面，我们先用"最大值原理"[1]推导"预测导引律"及"比例导引律"[2~4]。然后，引入"零控拦截状态"及由它们组成"L曲面"的概念。用这些概念说明各种古典导引法的意义。最后讨论导引到"L曲面"的最优导引律。

在相对体制下，导引问题的运动方程可写成

$$\begin{cases} \dot{x}=v \\ \dot{v}=a+u \end{cases} \tag{1}$$

这里，x，v，a 分别为三维相对位置、相对速度、相对加速度向量，而 u 为控制加速度向量。加速度 a 是不能随意改变的，可以叫做固有加速度。一般地，a 依赖于状态变量。为简单起见，可以假定 a 是时间变量 t 的已知函数[5]。

在导引问题中通常假定，初始状态 x_0，v_0 是已知的，而对终止状态可以提出各种不同的要求。例如，要求终止状态为零脱靶，则终止状态为 $x(T)=0$（T 为导引终止时刻）。一般地，终止状态可描述为

$$g(x(T),\ v(T))=0 \tag{2}$$

$g(\cdot,\ \cdot)$是向量，由终止状态约束决定。除终止状态约束外，还有表明导引过程好坏的性能指标。在系统（1）中，加速度 u 是由过载或推力产生的控制。这时一般考虑总能量最小的问题，它的性能指标为

$$J=\frac{1}{2}\int_0^T u^{\tau}u\,d\tau \tag{3}$$

其中，T 为给定的终止时刻。问题是求一控制 u，它把系统的初始状态 x_0，v_0 引到终止状态（2）且使性能指标达到最小。这是典型的最优控制问题[1]。

所谓导引律，就是这个最优控制问题的综合控制 $u^*(x,\ v)$。如果把这个综合控制求

出来代到方程组（1）中，那么方程组（1）的任意轨线都应该是上述最优控制问题的最优轨线。综合控制 $u^*(x,v)$ 可按如下方式确定：对任意给定的初值 x_0, v_0 先按最大值原理求出最优程序控制 $u^*(t, x_0, v_0)$，然后取 $t=0$ 得 $u^*(0, x_0, v_0)$。控制 $u^*(0, x_0, v_0)$ 是系统处于 x_0，v_0 状态时控制应取的值，因此有

$$u^*(x, v)=u^*(0, x, v)$$

下面求解最优控制问题。为此，先记 $x^0(t)$，$v^0(t)$ 为 $u\equiv 0$ 时系统（1）的轨线（叫做零控弹道）。积分方程组（1），有

$$\begin{cases} x^0(t)=x_0+v_0t+\int_0^t (t-\tau)a(\tau)d\tau \\ v^0(t)=v_0+\int_0^t a(\tau)d\tau \end{cases} \tag{4}$$

令

$$\bar{v}^0(t)=v_0+\frac{1}{t}\int_0^t (t-\tau)a(\tau)d\tau$$

是〔0，t〕区间上的平均速度。这时 $x^0(t)$可表示为

$$x^0(t)=x_0+\bar{v}^0(t)t$$

当 $u(t)\neq 0$ 时，方程组（1）的轨线可表示为

$$\begin{cases} x(t)=x^0(t)+\int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau \\ v(t)=v^0(t)+\int_0^t u(\tau)d\tau \end{cases} \tag{5}$$

最优控制问题式（1）、（2）、（3）的哈密顿函数为

$$H=\Psi_1^{\tau}v+\Psi_2^{\tau}a+\Psi_2^{\tau}u-\frac{1}{2}u^{\tau}u \tag{6}$$

而共轭方程和边界条件为

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1=0, & \Psi_1(T)=\lambda_1 \\ \dot{\psi}_2=-\Psi_1, & \Psi_2(T)=\lambda_2 \end{cases} \tag{7}$$

其中

$$\lambda_1=\frac{\partial}{\partial x(T)}(\lambda, g(x(T), v(T)))$$

$$\lambda_2=\frac{\partial}{\partial v(T)}(\lambda, g(x(T), v(T)))$$

而 λ 为拉格朗乘子——待定向量。积分方程组（7），得

$$\Psi_1(t)=\lambda_1,\quad \Psi_2(t)=\lambda_1(T-t)+\lambda_2 \tag{8}$$

根据最大值原理，最优控制 $u^*(t)$为

$$u^*(t)=\Psi_2(t)=\lambda_1(T-t)+\lambda_2 \tag{9}$$

取 $t=0$，得

$$u^*(0)=\lambda_1T+\lambda_2 \tag{10}$$

为了求出综合控制 $u^*(x_0, v_0)$，必须把 λ_1，λ_2 表示成初始状态 x_0，v_0 的函数。为此，把（9）式代到（5）式中积分并取 $t=T$，得

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{x}^0(T)+\dfrac{T^3}{3}\boldsymbol{\lambda}_1+\dfrac{T^2}{2}\boldsymbol{\lambda}_2 \\ \boldsymbol{v}(T)=\boldsymbol{v}^0(T)+\dfrac{T^2}{2}\boldsymbol{\lambda}_1+T\boldsymbol{\lambda}_2 \end{cases} \tag{11}$$

然后用条件 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(T),\ \boldsymbol{v}(T))=0$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_1$，$\boldsymbol{\lambda}_2$ 的表达式，定出待定向量 $\boldsymbol{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{x}^0(T),\boldsymbol{v}^0(T)$ 的函数，从而把 $\boldsymbol{u}^*(0)$表示成零控弹道终止状态 $\boldsymbol{x}^0(T)$，$\boldsymbol{v}^0(T)$ 的函数。最后把 $\boldsymbol{x}^0(T)$，$\boldsymbol{v}^0(T)$ 表示成 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{v}_0$ 的函数就得综合控制 $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{v}_0)$。用零控弹道终止状态 $\boldsymbol{x}^0(T),\boldsymbol{v}^0(T)$ 表示出来的控制 $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}^0(T),\ \boldsymbol{v}^0(T))$叫做"预测导引律"。如果 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(T),\boldsymbol{v}(T))=\boldsymbol{x}(T)$（终止状态为零脱靶），则 $\boldsymbol{\lambda}_2=0$，$\boldsymbol{\lambda}_1=\boldsymbol{\lambda}_0$ 这时，$\boldsymbol{u}^*(0)=\boldsymbol{\lambda}_1 T$，$\boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{x}^0(T)+\dfrac{T^3}{3}\boldsymbol{\lambda}_1$，从而由 $\boldsymbol{x}(T)=0$ 解出 $\boldsymbol{u}^*(0)$，得

$$\boldsymbol{u}^*(0)=-3\boldsymbol{x}^0(T)/T^2 \tag{12}$$

这是终止状态为零脱靶时的"预测导引律"。$\boldsymbol{x}^0(T)$叫做"预测脱靶"。

空间比例导引 把（12）式中的预测脱靶具体表示出来，有

$$\boldsymbol{u}^*(0)=-3(\boldsymbol{x}_0+\bar{\boldsymbol{v}}^0(T))/T^2 \tag{13}$$

这里，T 是事先给定的，可按适当方式选取。如果取

$$T=-(\boldsymbol{x}_0,\ \bar{\boldsymbol{v}}^0(T))/|\bar{\boldsymbol{v}}^0(T)|^2$$

则（13）式变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^*(0)&=-3\frac{(\boldsymbol{x}_0(\bar{\boldsymbol{v}}^0(T),\ \bar{\boldsymbol{v}}^0(T))-\bar{\boldsymbol{v}}^0(T)(\boldsymbol{x}_0,\ \bar{\boldsymbol{v}}^0(T)))|\bar{\boldsymbol{v}}^0(T)|^2}{(\boldsymbol{x}_0,\ \bar{\boldsymbol{v}}^0(T))^2}\\ &=3\frac{|\boldsymbol{x}_0|^2|\bar{\boldsymbol{v}}^0(T)|^2}{(\boldsymbol{x}_0,\ \bar{\boldsymbol{v}}^0(T))^2}\cdot\frac{(\boldsymbol{x}_0\times\bar{\boldsymbol{v}}^0(T))}{|\boldsymbol{x}_0|^2}\times\bar{\boldsymbol{v}}^0(T)\end{aligned}$$

其中，$(\boldsymbol{x}_0\times\bar{\boldsymbol{v}}^0(T))/|\boldsymbol{x}_0|^2$ 是由平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}^0(T)$ 引起的视线 $\boldsymbol{x}_0$ 的旋转角速——视线转率。如果把这个视线转率记成 $\boldsymbol{\omega}$，则由上式得

$$\boldsymbol{u}^*(0)=3\frac{|\boldsymbol{x}_0|^2|\bar{\boldsymbol{v}}^0(T)|^2}{(\boldsymbol{x}_0,\ \bar{\boldsymbol{v}}^0(T))^2}\boldsymbol{\omega}\times\bar{\boldsymbol{v}}^0(T) \tag{14}$$

如果系统（1）中的固有加速度 $\boldsymbol{a}\equiv 0$，那么 $\bar{\boldsymbol{v}}^0(T)=\boldsymbol{v}_0$，从而（14）式变为

$$\boldsymbol{u}^*(0)=3\frac{|\boldsymbol{x}_0|^2|\boldsymbol{v}_0|^2}{(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{v}_0)^2}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0 \tag{15}$$

这就是我们所说的"空间比例导引律"：控制（15）式的大小与视线转率成正比，而其方向垂直于相对速度。

如果取

$$T=-|\boldsymbol{x}_0|^2/(\boldsymbol{x}_0,\ \bar{\boldsymbol{v}}^0(T))$$

则得另一种比例导引律

$$\boldsymbol{u}^*(0)=3\frac{(\boldsymbol{x}_0,\ \bar{\boldsymbol{v}}^0(T))}{|\boldsymbol{x}_0|^2}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}_0 \tag{16}$$

这个控制方向是垂直于视线 $\boldsymbol{x}_0$。

在导引问题中，"初始偏差"通常都是比较大的。我们希望在导引的初始阶段用较大的加速度把初始偏差的大部分消除掉。比较理想的导引律应该是在导引的初始阶段用较大的过载消除大部分初始偏差，而导引的后期，则用小过载进行"微调"。但是，按导引律(12)、

(14)、(16) 式都不能做到这一点。这是因为，它们都是从"整个导引过程都在消除初始偏差"的观点出发推导的公式，因"过载的分布"在整个导引过程中是比较"平均"的。这种"平均"包含着一种潜在的危险。当 $T\to 0$ 或 $|x_0|\to 0$ 时（即接近目标时），如果 $x^0(T)$ 或 ω 不趋于 0，则控制力 (12)、(14)、(16) 式都趋于∞。但是，模型（1）只是实际问题的一种近似，因而"初始预测" $x^0(T)$ 都包含误差，很难保证 $x^0(T)\to 0$。这就是通常的比例导引法在导引的后期容易产生"过载发散"现象的原因。有没有一种办法能够克服这种毛病呢？把上面的"整个过程的平均"换成"短时间内的平均"是克服上述缺点的一个办法。

二、零控拦截状态及L曲面

从控制律 (12)、(14)、(16) 式中看出，如果零控预测脱靶 $x^0(T)$ 或 ω 等于 0，则所需的控制力也等于 0，并且在整个过程中不加控制也能实现拦截。我们把这种特殊状态称之为"零控拦截状态"，即无控制作用（自由飞行）也能实现拦截的状态。在导引问题中，"零控拦截状态"的存在是一个普遍现象。古典导引法中的所有直线弹道和所谓"基准弹道"，实质上都是由零控拦截状态所组成。

方程组（1）所描述的导引问题中，凡是满足

$$x^0(\mu)=x_0+\mu\bar{v}^0(\mu)=0,\quad \mu\geqslant 0 \tag{17}$$

的初始状态 x_0，v_0 都是"零控拦截状态"。如果方程（1）中 $a\equiv 0$，则 $\bar{v}^0(\mu)=v_0$，因而 (17) 式变为

$$x_0+\mu v_0=0,\quad \mu\geqslant 0 \tag{18}$$

就是说，当 $a\equiv 0$ 时，凡是满足 (18) 式的状态 x_0，v_0 是零控拦截状态。所有零控拦截状态在整个状态空间（6维空间）中组成4维曲面（(18) 式是7个变量 x_0，v_0，μ 的3个方程）。所有零控拦截状态所组成的曲面叫做"零控拦截曲面"或简称"L曲面"，用L记之。关系式 (18) 也等价于

$$x_0\times v_0=0,\quad (x_0,\ v_0)\leqslant 0$$

但是，当 $a\neq 0$ 时，关系式 (17) 并不等价于 $x_0\times\bar{v}^0(\mu)=0$，$(x_0,\ \bar{v}^0(\mu))\leqslant 0$[6]。

如果导引问题的运动方程为

$$\begin{cases}\dot{x}=v & x(0)=x_0\\ \dot{v}=-\omega^2x+u & v(0)=v_0\end{cases}$$

则零控预测脱靶为

$$x^0(T)=\cos\omega T x_0+\frac{1}{\omega}\sin\omega T v_0$$

于是，x_0，v_0 为"零控拦截状态"的充分必要条件为

$$x_0+\mu v_0=0,\quad \mu=\frac{1}{\omega}\mathrm{tg}\,\omega T$$

这里 μ 可取任意值。上式也等价于关系式

$$x_0\times v_0=0$$

但是，在这里条件 $(x_0,\ v_0)\leqslant 0$ 不必要了。

对一般情形，可在绝对体系中说明零控拦截状态的意义。设目标和导弹的运动方程分别为

$$\begin{cases}\dot{x}_M=v_M\\ \dot{v}_M=a_M(x_M,\ v_M)\end{cases}\qquad\begin{cases}\dot{x}_D=v_D\\ \dot{v}_D=a_D(x_D,\ v_D)+u\end{cases}$$

现给定了目标的初始状态 x_{M_0}，v_{M_0}，又给了导弹的初始位置 x_{D_0} 和导弹的初速大小 $|v_{D_0}|$。这时，只要 $|v_{D_0}|$ 足够大，我们总可以选择导弹的速度方向，使导弹沿这个方向飞行，没有控制力的作用也能实现拦截[5]。这种方向叫做“零控拦截方向”。这个零控拦截方向和给定的目标、导弹的初始条件一起，组成一个“零控拦截状态”。所有这种“零控拦截状态”，在整个状态空间（12 维空间）中，将组成 10 维曲面 L（由于只有 10 个独立变量：x_{M_0}，v_{M_0}，x_{D_0}，$|v_{D_0}|$）。

对一般的导引问题，要描述出零控拦截曲面 L，是很复杂的问题[5]。但是，在导引问题中，“L 曲面”的存在是肯定的。

古典导引法和 L 曲面 追踪法、平行接近法、前置量法、三点法等古典导引法，指的是受控制力作用之后的系统所应处的状态。如果系统始终保持在这种状态，是能够实现拦截的。古典导引法并不直接回答“怎样加控制力”的问题。从前面的讨论看出，系统受控制力作用后所应处的理想状态，是零控拦截状态。古典导引法所要达到的，实质上是各种特殊情况下的近似的“L 曲面”。

追踪法 用绝对速度描述零控拦截状态所满足的条件（17）式，得

$$x_0+\mu\bar{v}_M^0(\mu)=\mu\bar{v}_D^0(\mu) \tag{19}$$

这里，$\bar{v}_M^0(\mu)$ 是在时间区间 $[0,\ \mu]$ 上目标的平均速度，$\bar{v}_D^0(\mu)$ 是同一区间上导弹的零控平均速度。如果假定 $|\bar{v}_M^0(\mu)|\ll|\bar{v}_D^0(\mu)|$，即 $|\bar{v}_M^0(\mu)|$ 比起 $|\bar{v}_D^0(\mu)|$ 很小，则近似地有

$$x_0=\mu\bar{v}^0(\mu),\quad \mu\geqslant 0$$

即，视线 x_0 与速度 $\bar{v}_0^0(\mu)$ 方向一致。再假定 $a\equiv 0$，则 $\bar{v}_D^0(\mu)=v_{D_0}$，因而上式变为

$$x_0=\mu v_{D_0},\quad \mu\geqslant 0$$

如果把 x_0，v_{D_0} 看做受控制作用后的状态，那么上式是，受控制后的导弹速度应指向目标。这就是追踪法。由此，我们可以说：追踪法所要达到的是目标速度非常小时的近似的“L 曲面”。

平行接近法 从（19）式可得

$$x_0\times\bar{v}_M^0(\mu)=x_0\times\bar{v}_D^0(\mu) \tag{20}$$

如果假定 $a_M\equiv 0$，$a_D\equiv 0$，则 $\bar{v}_M^0(\mu)=v_{M_0}$，$\bar{v}_D^0(\mu)=v_{D_0}$。这时（20）式变为

$$x_0\times v_{M_0}=x_0\times v_{D_0}$$

即，受控制作用后的导弹速度 v_{D_0}，应使上式成立。记 δ 为 x_0 和 v_{M_0} 的夹角，φ 为 x_0 与 v_{D_0} 的夹角，则由上式得关系式

$$\sin\varphi=\frac{|v_{M_0}|}{|v_{D_0}|}\sin\delta$$

这是平行接近法的基本关系式。我们可以说：平行接近法所要达到的是自由运动（无控弹道）为等速运动时的“L 曲面”。

前置量法 把 $\bar{v}_D^0(\mu)$，$\bar{v}_M^0(\mu)$ 具体写出来，有

$$\bar{v}_D^0(\mu)=v_{D_0}+\frac{1}{\mu}\int_0^{\mu}(\mu-\tau)a_D(\tau)d\tau$$

$$\bar{v}_M^0(\mu)=v_{M_0}+\frac{1}{\mu}\int_0^{\mu}(\mu-\tau)a_M(\tau)d\tau$$

记

$$\Delta\bar{v}(\mu)=\frac{1}{\mu}\int_0^{\mu}(\mu-\tau)(a_M(\tau)-a_D(\tau))d\tau$$

则由（20）式得

$$x_0\times(v_{M_0}+\Delta\bar{v}(\mu))=x_0\times v_{D_0}$$

记 φ 为 x_0 与 v_D 的夹角——导弹的前置角，δ 为 x_0 与 v_{M_0} 的夹角，而 $\delta+\Delta\delta$ 为 x_0 与 $v_{M_0}+\Delta\bar{v}(\mu)$ 的夹角。这时，由上式得

$$\sin\varphi=\frac{|v_{M_0}+\Delta\bar{v}(\mu)|}{|v_{D_0}|}\sin(\delta+\Delta\delta) \tag{21}$$

受控制作用后的导弹的前置角 φ，是由（21）式的右端来决定。通常，对（21）式的右端只能做近似地估计。可以说，前置量法所要达到的是 $a\not\equiv 0$ 时的近似的“L 曲面”。

三点法● 把 x_0 表成 $x_0=x_{M_0}-x_{D_0}$，则由（17）式得

$$x_{M_0}+\mu\bar{v}_M^0(\mu)=x_{D_0}+\mu\bar{v}_D^0(\mu),\quad \mu\geqslant 0$$

如果 $\mu\bar{v}_M^0(\mu)$ 比较小，则近似地有

$$x_{M_0}=x_{D_0}+\mu\bar{v}_D^0(\mu),\quad \mu\geqslant 0 \tag{22}$$

该式说明，当 $x_{M_0}\,/\!/\,x_{D_0}$ 时，$\bar{v}_D^0(\mu)$ 也应平行于 x_{M_0}，而当 x_{M_0} 不平行于 x_{D_0} 时，导弹的速度 $\bar{v}_D^0(\mu)$ 应使 x_{D_0} 接近 x_{M_0}（由于 $\mu\geqslant 0$）。特别，当 $a\equiv 0$ 时，$\bar{v}_D^0(\mu)=v_{D_0}$。这时，(22) 式变为

$$x_{M_0}\doteq x_{D_0}+\mu v_{D_0},\quad \mu\geqslant 0$$

即，受控制后的导弹速度 v_{D_0}，应使 x_{D_0} 与 x_{M_0} 重合，或使 x_{D_0} 接近 x_{M_0}。这就是三点法。可以说，三点法所要达到的是 $\bar{v}_M^0(\mu)$ 比较小时的绝对体系中的近似的“L 曲面”。

由以上的讨论看出，古典导引法所指出的，是受控制后的系统所应处的状态。它们没有给出加控制力的办法。怎样实现古典导引法？这个问题，实质上是用什么样的控制律把系统引到“L 曲面”上的问题。

三、L 曲面上的导引律

导引的最终目的是实现拦截（达到零脱靶）。有了“L 曲面”，我们可以把导引的着眼点从“终点零脱靶”移到“L 曲面”上，即把系统导引到 L 曲面上并消除控制力来达到拦截的目的。这种导引律，实际上是把导弹的速度方向对准到“零控拦截方向”上，因此也可以叫做“对准法”或“瞄准法”。

下面就 $a\equiv 0$ 的情形讨论“L 曲面上的导引律”。做为最优控制问题，这里的终止状态为“L 曲面”

$$L:\ x(T)+\mu v(T)=0,\quad \mu\geqslant 0 \tag{23}$$

● 三点法的这种性质是王朝珠同志首先指出的。

即

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(T),\ \boldsymbol{v}(T))=\boldsymbol{x}(T)+\mu\boldsymbol{v}(T),\quad \mu\geqslant 0$$

(23)式乘上待定向量λ，有 $(\lambda,\ \boldsymbol{x}(T)+\mu\boldsymbol{v}(T))=0$

此式分别对μ、$\boldsymbol{x}(T)$、$\boldsymbol{v}(T)$微分，得 $(\lambda,\ \boldsymbol{v}(T))=0$ (24)

及共轭方程的边界条件（见（7）式） $\lambda_1=\lambda,\ \lambda_2=\mu\lambda$

把这个λ_1，λ_2代到（10），（11）式，有 $\boldsymbol{u}^*(0)=\lambda(T+\mu)$ (25)

及

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{x}^0(T)+\lambda\left(\dfrac{T^3}{3}+\dfrac{T^2}{2}\mu\right)\\[2ex]\boldsymbol{v}(T)=\boldsymbol{v}^0(T)+\lambda\left(\dfrac{T^2}{2}+T\mu\right)\end{cases}\tag{26}$$

从（25）式解出λ，得 $\lambda=\boldsymbol{u}^*(0)/(T+\mu)$

将λ代到（26）式，得

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{x}^0(T)+\boldsymbol{u}^*(0)\left(\dfrac{T^3}{3}+\dfrac{T^2}{2}\mu\right)\Big/(T+\mu)\\[2ex]\boldsymbol{v}(T)=\boldsymbol{v}^0(T)+\boldsymbol{u}^*(0)\left(\dfrac{T^2}{2}+T\mu\right)\Big/(T+\mu)\end{cases}$$

第二式乘μ后加到第一式，则根据（23）式可解出

$$\boldsymbol{u}^*(0)=-\frac{(\boldsymbol{x}^0(T)+\mu\boldsymbol{v}^0(T))}{\left(\dfrac{T^3}{3}+T^2\mu+T\mu^2\right)}(T+\mu)\tag{27}$$

这里，参数μ还没被确定。它可由条件（24）式来定。根据（24）、（25）式知$\boldsymbol{u}^*(0)\perp\boldsymbol{v}(T)$，从而有

$$(\boldsymbol{u}^*(0),\ \boldsymbol{v}(T))=(\boldsymbol{u}^*(0),\ \boldsymbol{v}^0(T))+|\boldsymbol{u}^*(0)|^2\left(\frac{T^2}{2}+T\mu\right)\Big/(T+\mu)=0\tag{28}$$

这是决定参数μ的方程。

由于，当$\boldsymbol{a}\equiv 0$时，$\boldsymbol{v}^0(T)=\boldsymbol{v}_0$，$\boldsymbol{x}^0(T)=\boldsymbol{x}_0+T\boldsymbol{v}_0$，因此，（27）、（28）式分别变为

$$\boldsymbol{u}^*(0)=-\frac{(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v}_0(T+\mu))}{\left(\dfrac{T^2}{3}+T\mu+\mu^2\right)}\ \frac{T}{(T+\mu)}\tag{29}$$

$$(\boldsymbol{u}^*(0),\ \boldsymbol{v}_0)+|\boldsymbol{u}^*(0)|^2\left(\frac{T}{2}+\mu\right)\frac{T}{T+\mu}=0\tag{30}$$

这两式一起组成把给定的初始状态$\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{v}_0$在T时间内引到"L曲面"的总能量最小的控制律。为了便于讨论，我们引入新参数

$$s=T/(T+\mu)$$

这是从初始状态到"L曲面"的过渡时间T（这个时间可称为"引入"时间）和从初始状态到实现拦截的整个过渡时间$T+\mu$的比值，是拦截过程中"引入"时间所占的比例。显然，$0\leqslant s\leqslant 1$。利用这个参数，把（29）、（30）式可整理成

$$\boldsymbol{u}^*(0)=-\frac{1}{s\left(1-s+\frac{1}{3}s^2\right)}\ \frac{\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v}_0(T+\mu)}{(T+\mu)^2}\tag{31}$$

$$\left(\frac{T}{3}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{v}_0)+\frac{|\boldsymbol{x}_0|^2}{2}\right)s^2-\left(|\boldsymbol{x}_0|^2-\frac{T^2}{3}|\boldsymbol{v}_0|^2\right)s-\left((\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{v}_0)T+\frac{T^2}{2}|\boldsymbol{v}_0|^2\right)=0\tag{32}$$

这两个关系式的用法如下：对给定的T，从（32）式（关于s的二次方程）解出满足$0\leqslant s\leqslant 1$的根s。确定了s，就有μ，从而由(31)式可定出$\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{v}_0$状态上所需的控制加速度$\boldsymbol{u}^*(0)$。这是T时间内把状态$\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{v}_0$引到"L曲面"的"需用加速度"。如果这个$\boldsymbol{u}^*(0)$超出"允许加速度"范围，那么另选一个较大的"引入时间"T，并重新计算。这样，我们总可以选择比较合适的"引入时间"T。按这种方式决定控制，可以在导引的初始阶段使用较大的控制力，以便尽快消除"初始偏差"。这就可以克服前面比例导引的讨论中出现的缺点。

在（32）式中，我们也可以先给比值s或μ，然后反过来决定T。当$s=1$时，控制律（31）式变成控制律（12）式，即导引律（12）式是把"整个拦截过程"都做为"引入时间"的导引律。

上面讨论的是终止状态为整个"L曲面"：$\boldsymbol{x}(T)+\mu\boldsymbol{v}(T)=0$，$\mu\geqslant 0$的情形。如果给定参数$\mu$的特定值$\mu_0\geqslant 0$，则$\boldsymbol{x}(T)+\mu_0\boldsymbol{v}(T)=0$定出"$L$曲面"的子曲面。此子曲面记做$L_0$(也可以简称"$L_0$曲面")。我们也可以讨论以$L_0$为终止状态的最优控制律。这个最优控制律还是由（31）式决定。不过，这时条件（24）式没有了，因而不需解方程(32)。实际上，这时的参数

$$s_0=T/(T+\mu_0)$$

是已知的。

由此，导引律（31）式中的参数T，μ，s都可以按需要灵活地选用。

如果取$T+\mu_0$为

$$-|\boldsymbol{x}_0|^2/(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{v}_0),\ \text{或}\ -(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{v}_0)/|\boldsymbol{v}_0|^2$$

则和空间比例导引律的推导一样，分别得导引到"L_0曲面"比例导引律：

$$\boldsymbol{u}^*(0)=S_0\frac{(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{v}_0)}{|\boldsymbol{x}_0|^2}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}_0,\ \text{或}\ \boldsymbol{u}^*(0)=S_0\frac{|\boldsymbol{x}_0|^2|\boldsymbol{v}_0|^2}{(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{v}_0)^2}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0$$

其中

$$S_0=\frac{1}{s_0\left(1-s_0+\frac{1}{3}s_0^2\right)}$$

当s_0从1变到0时，S_0就从3变到∞。这说明，比例导引中的"放大系数"S_0，只要它大于3，都是把初始状态引到相应子曲面L_0的最优控制律。

当$a\neq 0$的情形，利用平均速度概念，也可以讨论导引到"L曲面"的导引律。也可以讨论除总能量最小指标外的其它性能指标的最优控制律（见文献〔5〕)。

参考文献

〔1〕庞特里雅金，Л.С.等著："最佳过程的数学理论"，上海科学技术出版社，(1965)。
〔2〕Garber, V."Optimum intercept laus for accele-rating targes", AIAA J, 6:11(1968), pp. 2196～2198.
〔3〕Dickson, R.E., Garber, V."Optimum rendzvous, intercept and injection", AIAA J, 7:7(1969), pp. 1402～1403.
〔4〕Salmon, D.M, "Multi points guidance-an efficient implementation of predictive guidance", AIAAVJ, 11:12(1973), pp. 1749～1755.
〔5〕韩京清："拦截问题中的导引律"，国防工业出版社，(1977)。