论结构设计最佳化中可行方向法的几个问题

张承煦　夏人伟

摘　　要

本文对结构设计最佳化中可行方向法的若干问题进行了研究讨论；建立了任意边界点上的向量方程组，把收敛性判别与调参方向向量的确定二者统一了起来，且该方程组便于求解和应用；提出了一个简单的、有效的可行方向向量的计算公式；对边界点上临界约束梯度为线性相关的情况，提出了处理方法。

所论问题除飞机结构设计外，对其它领域应用可行方向法也是同样适用的。

一、前　　言

数学规划方法是飞机结构设计最佳化中的一种重要方法，其数学提法是

求设计变量

$$\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)^T$$

使目标函数

$$f(\mathbf{x})\to \min$$

且满足约束条件

$$\begin{aligned} &g_j(\mathbf{x})\leqslant o\,;\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ J)\\ &h_e(\mathbf{x})=o\,;\ (e=1,\ 2,\ \cdots,\ L)\end{aligned} \tag{1}$$

这是一个条件极值问题。对于飞机结构设计来讲，当前设计变量 $\mathbf{x}$ 通常取为板元件的厚度和杆元件的剖面面积，当然也可以取为其它的参数，视计算要求而定。至于目标函数 $f(\mathbf{x})$ 一般取为结构重量，因为重量对飞机性能和经济性有重要的影响。若结构布局选定，而以板元件厚度和杆元件剖面面积为设计变量，则它们和重量有如下函数关系

$$f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{N}x_iL_i\rho_i \tag{2}$$

其中　N——把结构离散后所得元件的数目（离散元件的数目也可以和设计变量数目不同）；

L_i——板元件的平面面积或杆元件的长度；

ρ_i——材料比重，

在所论情况下，目标函数 $f(\mathbf{x})$ 与设计变量 $\mathbf{x}$ 为线性关系。如所论问题的目标函数 $f(\mathbf{x})$ 为非线性的，我们总可以把它转化为目标函数为线性的等价问题。不等式约束条件 $g_j(\mathbf{x})\leqslant o$，

对于结构设计问题它们可以是几何约束、位移约束、应力约束等等，视设计要求而定。等式约束条件 $h_e(x)=o$ 可以是力的平衡方程和变形协调方程等等。通常等式约束条件按结构分析方法处理，于是在数学规划中只含不等式约束条件，且一般为非线性的，故所论问题为非线性规划问题。

N 个设计变量 x_1，x_2，…，x_N 可以形成 N 维欧氏空间 R^N，该空间中任意一点或向量 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_N)^T$ 代表一设计方案，我们称点 x 的集合

$$R=\{x|g_j(x)\leqslant o, \quad j=1, 2, \cdots, J\}$$

为可行区，任意点 $x\in R$ 代表一可行的设计方案，称为可行解，若该点 x^* 使得目标函数为极小，则为最佳解。若某 $x\in R$，且对任一 j 有

$$g_j(x)<o, \quad (j=1, 2, \cdots, J)$$

则称 x 为 R 的内点。若 $\bar{x}\in R$，且存在 i 有

$$g_i(\bar{x})=o, \quad i\in E(\bar{x})$$

这里

$$E(\bar{x})=\{i|g_i(\bar{x})=o, \quad 1\leqslant i\leqslant J\}=\{1, 2, \cdots, m\}$$

则称 $\bar{x}$ 为 R 的边界点，相应的约束 $g_i(\bar{x})=o$，$i\in E(\bar{x})$，称为临界约束。

求解上述条件极值问题，我们可以用数学规划中的可行方向法，和其它方法一样，可行方向法所得的解是局部最佳解。

可行方向法的调参公式可以写为

$$x^{(K+1)}=x^{(K)}+\alpha_K s \tag{3}$$

$$(K=0, 1, 2, \cdots)$$

其中 α_K 为步长；s 为方向向量。当点 $x^{(K)}$ 为内点时，s 可取为

$$s=-\nabla f(x)=-\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_N}\right)^T$$

$\nabla f(x)$ 为目标函数梯度。当点 $\bar{x}$ 为边界点但非最佳点时，按可行方向法 s 应满足如下条件

$$\nabla f(\bar{x})^T s\leqslant o \tag{4}$$

$$\nabla G^T s\leqslant o^{●} \tag{5}$$

$$s\neq o$$

其中 $\nabla G=[\nabla g_1(\bar{x}), \nabla g_2(\bar{x}), \cdots, \nabla g_m(\bar{x})]$

为临界约束梯度 $\nabla g_1(\bar{x})$，$\nabla g_2(\bar{x})$，…，$\nabla g_m(\bar{x})$ 组合矩阵。当点 $\bar{x}$ 为边界点且 Kuhn-Tucker 条件满足时，则认为该点即为最佳解。关于最佳解的充要条件的讨论将在另文中阐述。

本文将对可行方向法中有关收敛性的判别、方向向量 s、临界约束梯度的相关性等问题进行讨论，并提出改进和处理意见。

二、 关于收敛条件

设点 x^* 为最佳点，且相应的临界约束梯度 $\nabla g_1(x^*)$，$\nabla g_2(x^*)$，…，$\nabla g_m(x^*)$ 存在，并为线性无关的，则目标函数梯度 $\nabla f(x^*)$ 与临界约束梯度满足 Kuhn-Tucker 条件

● 等号只在步长为有限小，而对应的 $g_i(\bar{x})=o$（如对应的 $g_i(\bar{x})=o$ 有不止一个时，则为部分或所有这些对应的 $g_i(\bar{x})=o$ 的交）在该处为凹时才可取，这里所说的"凹"指的是在 s 方向上相对于可行区而言，否则只取＜号。

$$c_1\nabla g_1(x^*)+c_2\nabla g_2(x^*)+\cdots+c_m\nabla g_m(x^*)+\nabla f(x^*)=o$$

$$c_i\geqslant o,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,m \tag{6}$$

系数 c_i 为拉格朗日乘子。

上述 Kuhn-Tucker 条件的几何意义可以表述为：若 x^* 为最佳解，则在 N 维欧氏空间 R^N，对于临界约束梯度 $\nabla g_i(x^*)$，（$i=1,\ 2,\ \cdots,m$）所张成的 m 维子空间 R^m，必有 $\nabla f(x^*)\in R^m$，且 $-\nabla f(x^*)$ 处于 $\nabla g_i(x^*)$ 形成的超棱锥体之内。

现在我们讨论任一边界点 $\bar{x}$，若相应的临界约束梯度 $\nabla g_1(\bar{x}),\ \cdots,\nabla g_m(\bar{x})$ 为线性无关的，则由线性代数理论可知下述命题成立

若 $$\Delta f(\bar{x})\overline{\in}R^m,\quad (m<N)$$

则必有一向量 $\boldsymbol{d}\neq o$，$\boldsymbol{d}\in(R^m)^{\perp}$，即 $\boldsymbol{d}\perp R^m$

可使 $$\nabla f(\bar{x})\in R^{m+1} \tag{7}$$

其中 $$R^{m+1}=\boldsymbol{d}+R^m$$

对于以下二种情况则有

（1）若 $m=N$，则 $d_{im}[(R^m)^{\perp}]=N-d_{im}(R^m)=o$，即 $\boldsymbol{d}$ 在 o 维空间或即 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{o}$。

（2）若 $\nabla f(\bar{x})\in R^m$，$m<N$，则 $\nabla f(\bar{x})$ 完全可用 $\nabla g_1(\bar{x}),\cdots,\nabla g_m(\bar{x})$ 的线性组合表达，即 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{o}$。

由上述命题并参考 Kuhn-Tucker 条件，对任一边界点 $\bar{x}$ 的约束梯度和目标函数梯度，可以建立如下方程组

$$\nabla G\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=-\nabla f(\bar{x}) \tag{8a}$$

$$\nabla G^T\boldsymbol{d}=o \tag{8b}$$

其中 $$\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ \cdots,c_m)^T$$

称为拉格朗日乘子列阵，

$$\boldsymbol{d}=(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_N)^T$$

称为补偿向量。

方程组（8）适用于任一边界点 $\bar{x}$，包括最佳点 x^* 在内。由方程组（8）可得 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$：将方程组（8a）等式两边同乘以 ∇G^T，并计及方程组（8b），注意到当临界约束梯度为线性无关时，方阵 $\nabla G^T\nabla G$ 为非奇异的，于是可得：

$$\boldsymbol{c}=-[\nabla G^T\nabla G]^{-1}\nabla G^T\nabla f(\bar{x}) \tag{9}$$

$$\boldsymbol{d}=(\nabla G[\nabla G^T\nabla G]^{-1}\nabla G^T-I)\nabla f(\bar{x}) \tag{10}$$

其中 I 为单位矩阵。

结果可能有三种情况：

（1）当 $$c_i\geqslant o,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

且 $$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{o}$$

则表明 Kuhn-Tucker 条件满足，该点为最佳点 x^*。

（2）当有一个或几个

$$c_i<o$$

且 $$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{o}$$

表明 $\nabla f(\bar{x})\in R^m$，但非最佳点。此时，某一负的 c_i 以及相应的临界约束梯度 $\nabla g_i(\bar{x})$ 应该

舍去，再重新解改组后的方程组（8），而终将得到相应的$d_l \neq o$。若对应$\frac{d_l^T}{||d_l||}(-\nabla f(\bar{x}))$为最大值的那个负$c_l$和临界约束梯度被舍去的话，则对下一步调参可能得到最大减重效果（证明见附录一）。

（3）当$d \neq o$时，点$\bar{x}$必非最佳点，而应继续调整设计参数。

到此，我们根据上述命题得到了任一边界点$\bar{x}$的收敛判别式。当$\bar{x}$为最佳点时，式（8）和Kuhn-Tucker条件是等价的。当$\bar{x}$非最佳点时，方程组（8）将会给出下一步调参的有利信息。

三、关于可行方向向量S

对于某边界点$\bar{x}$，若该点非最佳解（此时d必不为o），则需确定方向向量s，沿该方向作有限步长调参，将在可行区内得到一新的设计点，且重量下降或保持不变，为此，向量s应服从式（4）、（5）所确定的条件。

Rosen, J. B. 利用拉格朗日乘子法求$\nabla f(\bar{x})^T s$为最小，满足等式约束条件

$$\nabla G^T s = o$$

$$s^T s - 1 = o$$

解得

$$s = -\frac{1}{2\tilde{\lambda}}[P]\nabla f(\bar{x}) \tag{11}$$

其中

$$[P] = [I - \nabla G(\nabla G^T \nabla G)^{-1} \nabla G^T]$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{2}|(\nabla f(\bar{x})^T [P]^T [P] \nabla f(\bar{x}))^{1/2}|$$

此法常称梯度投影法。

如果我们把式（11）和式（10）比较，可以看出除了常系数之外，两个向量是完全一样的。但应指出，严格地说这个向量未必是可行的（见式（5）的●）。

Zoutendijk, G. 利用线性规划的单纯形法解下述方程组

$$\nabla g_i(\bar{x})^T s + \eta_i \sigma \leqslant o, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$\nabla f(\bar{x})^T s + \sigma \leqslant o$$

$$-1 \leqslant s_j \leqslant 1 \qquad j = 1, 2, \cdots, N$$

使得

$$\sigma \rightarrow \max$$

这里，所得方向向量s因人为地给η_i以不同值而不同。

Gellatly, R. A. 则是假设向量s为目标函数梯度$\nabla f(\bar{x})$和临界约束梯度$\nabla g_i(\bar{x})$，（$i = 1, 2, \cdots, m$）的线性组合

$$s = -\alpha \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \nabla g_i(\bar{x})$$

且满足条件

$$s^T \nabla f(\bar{x}) = o$$

$$s^T \nabla g_i(\bar{x}) + \varepsilon_i = o \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

向量s虽处在等重超平面内，但具体指向却因人为的ε_i值之不同而不同。

在以上二法中要选择合适的系数 η_i 或 ε_i 需经过多次试算和具有丰富的经验。

下面我们给出另一种求方向向量 s 的方法，设

$$s_W = d + \lambda \nabla f(\bar{x}) \tag{12a}$$

满足条件

$$\nabla f(\bar{x})^T s_W = o \tag{12b}$$

将式（12a）两边同乘以 $\nabla f(\bar{x})^T$，且计及式（12b），得

$$\lambda = -\frac{\nabla f(\bar{x})^T d}{\nabla f(\bar{x})^T \nabla f(\bar{x})} \tag{12c}$$

将（12c）代入（12a）得

$$s_W = d - \frac{\nabla f(\bar{x})^T d}{\nabla f(\bar{x})^T \nabla f(\bar{x})} \nabla f(\bar{x}) \tag{13}$$

所得方向向量 s_W 满足可行方向条件式（4）是显然的。下面证明它亦满足式（5），为此先证明

$$\nabla f(\bar{x})^T d < o$$

对式（8a）等式两边前乘 d^T，得

$$d^T(\nabla G c) + d^T d = -d^T \nabla f(\bar{x})$$

因为 $d \perp R^m$，所以 $d^T(\nabla G c) = o$

则
$$d^T \nabla f(\bar{x}) = -d^T d$$

因为
$$d^T d > o$$

所以
$$\nabla f(\bar{x})^T d < o$$

可知
$$\lambda > o$$

现将等式（12a）两边前乘 ∇G^T，得

$$\nabla G^T s_W = \nabla G^T d + \lambda \nabla G^T \nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla G^T \nabla f(\bar{x})$$

可见对 $i \in E(\bar{x})$，当

$$\nabla g_i(\bar{x})^T s_W < o \qquad （或\ \nabla g_i(\bar{x})^T s_W = o）$$

的充分必要条件是

$$\nabla g_i(\bar{x})^T \nabla f(\bar{x}) < o \qquad （或\ \nabla g_i(\bar{x})^T \nabla f(\bar{x}) = o）$$

若 $g_i(x)$为凸函数，$i \in E(\bar{x})$

则有 $o > g_i(\bar{x} + \alpha \nabla f(\bar{x})) \geqslant g_i(\bar{x}) + \alpha \nabla g_i(\bar{x})^T \nabla f(\bar{x}) = \alpha \nabla g_i(\bar{x})^T \nabla f(\bar{x}) \quad \alpha > o$ 且足够小

于是
$$\nabla g_i(\bar{x})^T s_W < o$$

若 $g_i(x)$为严格凹函数，$i \in E(\bar{x})$

考虑
$$\varphi(\alpha) = g_i(\bar{x} + \alpha \nabla f(\bar{x})) \quad \alpha \geqslant o$$

由于
$$\varphi(o) = g_i(\bar{x}) = o > g_i(\bar{x} + \alpha \nabla f(\bar{x})) = \varphi(\alpha) \quad \alpha > o$$

故 $\varphi(\alpha)$在 $\alpha = o$ 处是 α 的非增函数，故右导数

$$o \geqslant \varphi'(o) = \nabla g_i(\bar{x})^T \nabla f(\bar{x})$$

所以
$$\nabla g_i(\bar{x})^T s_W \leqslant o$$

当 $\alpha > o$ 时，由于 $g_i(x)$为严格凹函数，应有

$$g_i(\bar{x} + \alpha s_W) < g_i(\bar{x}) + \alpha \nabla g_i(\bar{x})^T s_W = \alpha \nabla g_i(\bar{x})^T s_W \leqslant o$$

可见，不论 $g_i(x)$，$i \in E(\bar{x})$是凸函数或严格凹函数时，s_W 总是指向可行区。

其实，$g_i(x)$，$i\in E(\bar{x})$，非严格凹时，除非 $\nabla f(x)$ 在点 $\bar{x}$ 处与 $g_i(x)$ 相切，s_W仍指向可行区。而恰巧碰到点 $\bar{x}$ 为切点的情况在实用中是罕见的。

由本法得到的方向向量，计算比较简单，特别是利用了边界点 $\bar{x}$ 邻域的有利的"地势"信息 d，使走向自然而然地合理，而且由以上证明可知，除极特殊情况外，s_W总是可行的，而不像 Rosen 法求得的那样未必是可行的。

另外，由式（13）可知，当 $\bar{x}$ 为最佳解 x^*时，由于 $d=o$，则 $s_W=o$，意即在最佳解处，不再存在由式（13）确定的且满足式（4）、（5）的方向向量，而且反过来也对●。可见收敛条件和方向向量二者是有机联系的。

四、关于临界约束梯度为线性相关的情况

前已说明，对于边界点 $\bar{x}$ 应进行收敛性检查，在应用方程组（8）时，假定了该点 $\bar{x}$ 处的临界约束梯度 $\nabla g_i(\bar{x})$，$i=1,2,\cdots,m$，为线性无关的。否则拉格朗日乘子 c_i 是不确定的。但在实际问题中，临界约束梯度可能有线性相关的情况，其原因有二：一为 $m>N$；一为虽然 $m\leqslant N$，但极大线性无关组的向量个数小于 m。为了在 m 个向量中确定其极大线性无关组，一般可以采用消去法。但这类方法所得到的极大线性无关组是不确定的，一般不能反映该点邻域可行区边界的真实情况，因而不能简单地按消去法处理。

为了解决以上问题，我们提出下述方法。

假定在点 $\bar{x}$ 处，有 m 个临界约束梯度，而且是线性相关的，因而不能把它们一次全部引入方程组（8）去求解。同时，由于事先并不知道这些临界约束梯度 $\nabla g_i(\bar{x})$，（$i=1$，2，…，m）和 $-\nabla f(\bar{x})$ 的相对关系和相关性，不能从中直接选出某组约束梯度引入方程组（8）而又不失可行区边界的真实性。为此，我们应分二步来处理：首先，确定 m 个临界约束梯度的极大线性无关组的向量数，例如为 h，即 m 个临界约束梯度同处于一 h 维的子空间内。然后，对每 h 个约束梯度组合和 $\nabla f(\bar{x})$分别引入方程组（8），解算后的结果无非为以下四种情况之一（对其中一个组合）

（1）$d_h=o$

且全部拉格朗日乘子 c_j 为非负的。

（2）$d_h\neq o$

（3）不可解，或即 $\nabla G^T\nabla G$ 不可逆。

（4）$d_h=o$

但乘子 c_j 中有负值。

在上述四种可能的情况中，如为情况（1），则表明点 $\bar{x}$ 即为最佳解。如为情况（2），表明点 $\bar{x}$ 必非最佳解，则利用此 $d_h\neq o$ 转入确定可行方向向量 s_W。如为情况（3），则进行另一 h 个临界约束梯度组合的计算。如为情况（4），则依次舍去一个与负 c_j 相应的临界约束梯度 $\nabla g_j(\bar{x})$，并将保留下来的临界约束梯度和 $\nabla f(\bar{x})$引入方程组（8），求出相应的 d_j。然后再计算另一 h 个临界约束梯度组合。

● 如 $d=o$ 而非最佳解，则由二节中的情况（2）可见终将得到非零的 d_l，从而可得非零的 s_W。如 $s_W=o$，则由(13)式可见 $d=o$，除非 d 与 $\Delta f(\bar{x})$ 同向，而这是 $\Delta f(x)$ 在点 $\bar{x}$ 处与 $g_i(x)$，$i\in E(\bar{x})$ 相切的情况，上面已提到是罕见的。

按上述方法，如果点 $\bar{x}$ 是最佳解，则必能判定。如果点 $\bar{x}$ 不是最佳解，则必能找到一个 $d_k \neq o$ 或许多个 $d_j \neq o$。显然，$d_k \neq o$ 分别和每一个临界约束梯度 $\nabla g_i(\bar{x})$ 正交，即

$$\nabla g_i(\bar{x})^T d = o \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

而对于那些 $d_j \neq o$，可把其中每一个分别和临界约束梯度求值

$$\nabla g_i(\bar{x})^T d_j \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

只有满足条件

$$\nabla g_i(\bar{x})^T d_j \leqslant o \qquad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{14}$$

的 d_j 才可用来确定下一步调参方向向量，而满足式（14)的 d_j 一定存在（证明见附录二)，且可能不只一个，那个使得：

$$\frac{d_j^T}{\|d_j\|}(-\nabla f(\bar{x}))$$

取最大值的 d_j 对应着有利的调参方向。

五、结 束 语

在上面讨论中，我们建立了任意边界点 $\bar{x}$ 的向量方程组（8），它把收敛性判别与调参用的可行方向向量的确定二者统一了起来，并据此提出了一个比较简单的可行方向向量计算公式，由于利用了当地有利的“地势”信息，使以后调参的减重效果一般会较其它方法为好；提出了处理临界约束梯度为线性相关情况的方法。通过对以上问题的讨论，可使我们对可行方向法的本质有进一步的认识，且所提方法在工程上是实用的。尽管本文是由飞机结构最佳设计问题引出的，但所有上述讨论，对其它领域应用可行方向法时也是同样适用的。

最后，作者对钱令希教授、魏权龄同志、丁惠梁同志等的宝贵意见表示深切感谢。

参 考 文 献

〔1〕 L. A. Schmit, Structural engineering applications of mathematical programming techniques. AGARD-CP-36-70.
〔2〕 J. S. Kowalik, Feasible direction methods. AGARD-CP-36-70.
〔3〕 Massanao Aoki, Introduction to optimization techniques. The Macmillan Company. 1971.
〔4〕 R. L. Fox, Optimization method for engineering design. Addison-Wesley Publishing Company.
〔5〕 最优设计讲义，中国科学院数学所运筹室编 1976.5。
〔6〕 结构设计最佳化基础，北京航空学院五〇三教研室编 1977.7。

附 录 一

当解方程组（8）时，可能出现如下情况，即有一个或几个 $c_i < o$，且 $d = o$，这表明目标函数梯度 $-\nabla f(\bar{x})$ 包含在 m 个临界约束梯度所张成的 m 维子空间内，即 $-\nabla f(\bar{x}) \in R^m$，但处于这些临界约束梯度所张成的超棱锥体之外，即该点 $\bar{x}$ 不是最佳点。为了决定下一步调参的可行方向向量，应该舍去某一临界约束梯度，即舍去相应的临界约束超曲面，先假定可以舍去 c_l 为非零的任意一个临界约束梯度 $\nabla g_l(\bar{x})$，于是留下的 $m-1$ 个梯度张成 $m-1$ 维子空间 R_l^{m-1}，且 $-\nabla f(\bar{x}) \in R_l^{m-1}$。由前述命题可知必存在一相应的 $d_l \neq o$，且 $d_l \perp R_l^{m-1}$。

由于被舍去的约束梯度$\nabla g_i(\bar{x})$是任意的，故存在多个对应的d_i，其大小和方向都是不同的。那末舍去哪一个临界约束梯度才是最合适的？

由正文可知，d表示了可行方向的一个极限情况。因此，舍去的临界约束梯度，应首先保证相应的d_i是切于真正可行区的边界，其次要求若沿d_i调参时能得到最大的重量下降的效果，这相当于要求

$$\frac{d_i^T}{\|d_i\|}(-\nabla f(\bar{x}))$$

的值为最大的。

下面就讨论满足这二个要求的条件：

已知对原m个临界约束梯度$d=o$，由式（8a）知：

$$d=-[\nabla f(\bar{x})+c_1\nabla g_1(\bar{x})+\cdots+c_i\nabla g_i(\bar{x})+\cdots+c_m\nabla g_m(\bar{x})]=o \tag{A1}$$

其中系数c有一个或几个是负的。

舍去任意一个临界约束梯度$\nabla g_i(\bar{x})$后，有相应的$d_i\neq o$，且$d_i\perp R^{m-1}$，将$\frac{d_i^T}{\|d_i\|}$前乘式（A1）等号的两边，得：

$$\frac{d_i^T}{\|d_i\|}(-\nabla f(\bar{x}))=c_i\frac{d_i^T}{\|d_i\|}\nabla g_i(\bar{x}) \tag{A2}$$

在三节中已证得$d_i^T\nabla f(\bar{x})<o$，故式（A2）左边是恒为正的值。

如果被舍去的$\nabla g_i(\bar{x})$所相应的$c_i>o$，由式（A2）则必有

$$d_i^T\nabla g_i(\bar{x})>o$$

由式（5）(或图Aa）可知，d_i不满足可行方向条件，即d_i实际上处于非可行区内（图Aa中阴影线部分表示由$g_i(\bar{x})=o$所形成的真正的临界约束超曲面）。所以，舍去一个与正的c_i相应的临界约束是不允许的。

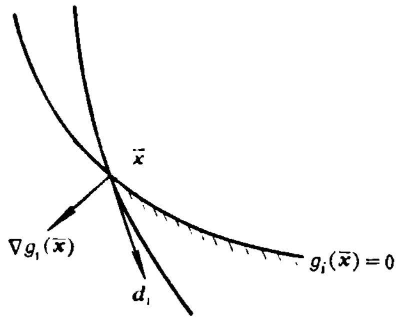

图 Aa

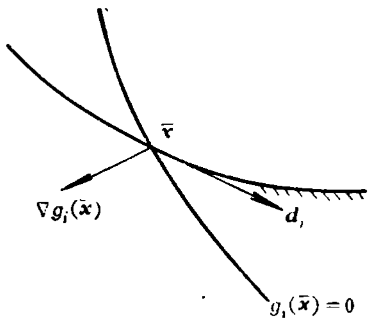

图 Ab

如果被弃去的$\nabla g_i(\bar{x})$所相应的$c_i<o$，由式（A2）则必有

$$d_i^T\nabla g_i(\bar{x})<o$$

由式（5）(或图Ab）可知，d_i与真正的可行区边界相切。所以，舍去一个与负c_i相应的约束是允许的。

又由式（A2）可知，若舍去某个负c_i和相应约束梯度$\nabla g_i(\bar{x})$，利用式（8）重算得到相应的d_i，使得$\frac{d_i^T}{\|d_i\|}(-\nabla f(\bar{x}))$有最大的值，则利用此$d_i$来确定以后的调参方向向量，例如用本文三节中所建议的公式（13），会在不增重的条件下最深入到可行区里去，因

而可能在再下一步沿最陡方向调参时得到较大的减重效果。

附　录　二

在点 $\bar{x}$ 处的临界约束超曲面 $g_i(\bar{x})=o$ ($i=1, 2, \cdots, m$)，其相应的临界约束梯度 $\nabla g_i(\bar{x})$ 是线性相关的，则可把它们分为两类：

（1）在点 $\bar{x}$ 处形成可行区边界的这类约束称为界面约束，相应的梯度称为界面约束梯度，我们用 K 来表示这类约束和相应梯度的下标集合。

（2）在点 $\bar{x}$ 处并不形成可行区边界，它们只是通过点 $\bar{x}$，而在其邻域则全部处于非可行区内，这类约束可以称为多余约束，相应的梯度称为多余约束梯度。我们用 J 表示这类约束和相应梯度下标的集合。

显然，多余约束梯度 $\nabla g_j(\bar{x})$，($j\in J$)，皆处于界面约束梯度 $\nabla g_k(\bar{x})$，($k\in K$) 所张成的超棱锥体之内。

如果点 $\bar{x}$ 是最佳点，那末通过该点的目标函数负梯度 $-\nabla f(\bar{x})$ 必处于该超棱锥体之内。用四节所述方法必能判定。

如果点 $\bar{x}$ 不是最佳点，则可按以下四种情况分别讨论：

（1）如果诸界面约束梯度 $\nabla g_k(\bar{x})$，($k\in K$) 是线性无关的，且 $-\nabla f(\bar{x})$ 处于界面约束梯度所张成的子空间内，把全部 $\nabla g_k(\bar{x})$ 引入方程组（8）解之，必有 c_i 为负值的情况，去掉与其中之一相应的界面约束梯度 $\nabla g_i(\bar{x})$，($i\in K$)，必可确定一非零向量 $\boldsymbol{d}$，它和余下来的界面约束梯度正交，和去掉的梯度 $\nabla g_i(\bar{x})$ 有关系（见附录一）

$$\nabla g_i(\bar{x})^T\boldsymbol{d}<o$$

且向量 $\boldsymbol{d}$ 和全部多余约束梯度 $\nabla g_j(\bar{x})$ 有关系

$$\nabla g_j(\bar{x})^T\boldsymbol{d}\leqslant o \quad j\in J$$

事实上，由于多余约束梯度 $\nabla g_j(\bar{x})$ 处于诸界面约束梯度 $\nabla g_k(\bar{x})$ 所张成的超棱锥体内，因此必有如下关系

$$\nabla g_j(\bar{x})=\sum_K a_k\nabla g_k(\bar{x}) \quad (k\in K) \tag{B1}$$

a_k 为非负的常系数。

由式（B1）可得：

$$\nabla g_j(x)^T\boldsymbol{d}=\sum_K a_k\nabla g_k(\bar{x})^T\boldsymbol{d}$$

由于 $\nabla g_k(\bar{x})^T\boldsymbol{d}$ 不是等于零，就是负值，所以证得：

$$\nabla g_j(\bar{x})^T\boldsymbol{d}\leqslant o \quad j\in J$$

以上表明，对所论情况，至少存在一个 $\boldsymbol{d}$，它满足四节中式（14）的要求。

（2）如果界面约束梯度 $\nabla g_k(\bar{x})$，($k\in K$) 是线性无关的，但 $-\nabla f(\bar{x})$ 不处于界面约束梯度所张成的子空间内，把全部 $\nabla g_k(\bar{x})$ 引入方程组（8）解之，必有 $\boldsymbol{d}$ 不为零，且和全部界面约束梯度正交

$$\nabla g_k(\bar{x})^T\boldsymbol{d}=o \quad k\in K$$

显然，亦和全部多余约束梯度正交，即

$$\nabla g_j(\bar{x})^T \boldsymbol{d} = o \quad j \in J$$

即所得向量 $\boldsymbol{d}$ 满足四节中的式（14）要求。

（3）如果界面约束梯度 $\nabla g_k(\bar{x})$，$(k \in K)$，线性相关，其极大线性无关组的向量个数设为 h，$-\nabla f(\bar{x})$属于该 h 维子空间，但处于这些界面约束梯度所张成的超棱锥体之外的某一侧，则必有某 $h-1$ 个界面约束梯度的集合（超锥面），设其下标集合为D，$-\nabla f(\bar{x})$不属于它们所张成的 $h-1$ 维子空间内，且该梯度集合把$-\nabla f(\bar{x})$ 和其余界面约束梯度 $\nabla g_k(\bar{x})$，$k \bar{\in} D$ 分别置于两侧●，由二节命题可知，对于该梯度集合和$-\nabla f(\bar{x})$，必有一向量 $\boldsymbol{d}$ 使得：

$$\nabla g_k(\bar{x})^T \boldsymbol{d} = o \quad k \in D$$

且与其它界面约束梯度的关系为：

$$\nabla g_k(\bar{x})^T \boldsymbol{d} \leqslant o \quad k \bar{\in} D$$

事实上，若 $\nabla g_k(\bar{x})^T \boldsymbol{d} > o$，$k \bar{\in} D$，则 $\nabla g_k(\bar{x})$ 应位于 $\nabla f(\bar{x})$的同一侧，这显然与上述矛盾。

上述向量 $\boldsymbol{d}$ 和所有多余约束梯度 $\nabla g_j(\bar{x})$ 有关系

$$\nabla g_j(\bar{x})^T \boldsymbol{d} \leqslant o \quad j \in J$$

因为多余约束梯度 $\nabla g_j(\bar{x})$ 处于界面约束梯度 $\nabla g_k(\boldsymbol{x})$ 所张成的超棱锥体之内，设界面约束梯度 $\nabla g_k(\bar{x})$，$(k \in K)$，的极大线性无关组的向量个数为 h，则任意一个多余约束梯度 $\nabla g_j(\bar{x})$ 皆是界面约束梯度某极大线性无关组的线性组合

$$\nabla g_j(\bar{x}) = \sum_h a_k \nabla g_k(\bar{x}) \qquad k \in K, \; j \in J \tag{B2}$$

其中 a_k 为非负的常系数。

由式（B 2）可得：

$$\nabla g_j(\bar{x})^T \boldsymbol{d} = \sum_h a_k \nabla g_k(\bar{x})^T \boldsymbol{d} \qquad k \in K, \; j \in J$$

由于 $\nabla g_k(\bar{x})^T \boldsymbol{d}$ 不为零就为负，所以

$$\nabla g_j(\bar{x})^T \boldsymbol{d} \leqslant o \quad j \in J$$

表明对所论情况，至少有一个 $\boldsymbol{d}$ 满足四节中式（14）的要求。

（4）如果界面约束梯度 $\nabla g_k(\bar{x})$，$k \in K$ 是线性相关的，但$-\nabla f(\bar{x})$ 不处于界面约束梯度所张成的子空间内，假定界面约束梯度的极大线性无关组的向量个数为 h，则任意抽取 h 个界面约束梯度 $\nabla g_k(\bar{x})$引入方程组（8）解之，必有向量 $\boldsymbol{d}$ 不为零，且和全部界面约束梯度正交

$$\nabla g_k(\bar{x})^T \boldsymbol{d} = o \quad k \in K$$

显然，也必和全部多余约束梯度正交

$$\nabla g_j(\bar{x})^T \boldsymbol{d} = o \quad j \in J$$

即所得向量 $\boldsymbol{d}$ 满足四节中式（14）的要求。

由上可见，按四节所述方法，如果 $\bar{x}$ 是最佳解则必可判定，如果 $\bar{x}$ 不是最佳解，则必可找到至少一个满足四节中式（14）要求的向量 $\boldsymbol{d}$，以作为我们计算式（13）的基础。

● 个别$\nabla g_k(\bar{x})$，$k \bar{\in} D$可能离该超锥面很近，在极限情况，可能就在该超锥面内，但仍不与$-\Delta f(\bar{x})$在同一侧。