具有二阶环节的导弹最优导引律

北京航空学院　李忠应

摘　要

本文研究了具有二阶环节的导弹其对目标的最优导引律。利用极小值原理分别研究了1）脱靶量为零、最小控制能量指标的最优导引律；2）终态为零控拦截曲面、最小能量指标的最优导引律。最后得出了与具有一阶延迟环导弹所得结果类似，但计算工作量更大，结果应更准确。

主要符号

x_1	导弹、目标的相对位置向量	ν，k	拉格朗日乘子、待定常向量
x_2	导弹、目标的相对速度向量	t_0, t_f	分别为起始与终端时间
x_3	导弹、目标的相对加速度向量	T	达到零控拦截曲面的时间
x_4	相对加速度向量的变化率	μ	由达到零控拦截曲面到命中目标的时间
u	导弹控制向量	$\bar{\omega}$	导弹、目标之间的视线角速度
$\bar{u}$	导弹最优控制向量	$\dot{\bar{\omega}}$	视线角速度的变化率
ξ	导弹相对阻尼系数	α，β	为根据需要选择的实数
ω	导弹弹体固有频率		
λ_i	状态系统共态向量		

对于导弹的最优导引律、国内外都进行了不少的研究[1,3,4,5]，得出了许多有益的结果，对于实现精确制导起了很好的作用。但是所取的导弹数学模型都过于简单，一般都作为瞬时响应的质点来处理，文献〔1〕对于具有一阶延迟环节的导弹最优导引律进行了研究，其结果为由一个变系数的比例导引及与视线角速度的变化率 $\dot{\omega}$ 和加速度 a 有关的修正项所组成。但是实际的导弹既非瞬时响应的质点亦非一个一阶延迟环节，本文的目的是研究具有二阶环节的导弹最优导引律。由于其数学模型更近于实际，因而所得结果对提高导弹的导引精度是有益的。

一、问题的提法

导弹、目标的相对运动动力学模型为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2 & x_1(t_0)=x_{10}\\ \dot{x}_2=x_3 & x_2(t_0)=x_{20}\\ \dot{x}_3=x_4 & x_3(t_0)=x_{30}\\ \dot{x}_4=-\omega^2x_3-2\xi\omega x_4+\omega^2u & x_4(t_0)=0\end{cases}\tag{1}$$

1981年5月收到。

性能指标为

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^T\cdot u dt \quad (u^T \text{表示转置}) \tag{2}$$

其中 $u\in R^3$，t_f 是事先给定的。设目标集为

$$\begin{cases} g_1[x_1(t_f),x_2(t_f),x_3(t_f)]=0 \\ g_2[x_1(t_f),x_2(t_f),x_3(t_f)]\leqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

现在的问题是寻找动力学系统（1）的最优控制规律将系统从给定的初态引导到终态（3），并且使性能指标（2）取极小值。

下面对两种不同的目标集寻找最优导引规律。

二、零脱靶最小能量导引律

目标集为

$$x_1(t_f)=0$$

终端的其他参数是自由的。

根据极大值原理[2]，问题的哈米尔顿函数H为：

$$H=\frac{1}{2}u^T\cdot u+\lambda_1^T\cdot x_2+\lambda_2^T\cdot x_3+\lambda_3^T\cdot x_4+\lambda_4^T(-\omega^2 x_3-2\xi\omega x_4+\omega^2 u) \tag{4}$$

其中 λ_1、λ_2、λ_3、λ_4 为动力学系统（1）的共态向量。

系统共态方程组为：

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t)=0 \\ \dot{\lambda}_2(t)=-\lambda_1(t) \\ \dot{\lambda}_3(t)=-\lambda_2(t)+\omega^2\lambda_4(t) \\ \dot{\lambda}_4(t)=-\lambda_3(t)+2\xi\omega\lambda_4(t) \end{cases} \tag{5}$$

其横截条件为

$$\begin{cases} \lambda_1(t_f)=\nu \\ \lambda_2(t_f)=0 \\ \lambda_3(t_f)=0 \\ \lambda_4(t_f)=0 \end{cases} \tag{6}$$

根据极小值原理，最优控制规律及相应的共态参数应使H函数取极小值，由

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0$$

得

$$\bar{u}(t)=-\omega^2\lambda_4(t) \tag{7}$$

由（7）式可见要确定最优控制规律，必须确定共态向量$\lambda_4(t)$。

由方程组（5）的前两式及相应的边界条件可解出

$$\lambda_1(t)=\nu$$

$$\lambda_2(t)=\nu(t_f-t)$$

于是有

$$\dot{\lambda}_3(t) = -\nu(t_f - t) + \omega^2\lambda_4(t) \tag{8}$$

再对方程组（5）的第四式求一次导数得

$$\ddot{\lambda}_4(t) = -\dot{\lambda}_3(t) + 2\xi\omega\dot{\lambda}_4(t)$$

将（8）式代入得

$$\ddot{\lambda}_4(t) - 2\xi\omega\dot{\lambda}_4(t) + \omega^2\lambda_4(t) = \nu(t_f - t) \tag{9}$$

由（7）式可知，求最优控制规律只要解出 $\lambda_4(t)$ 就成了。在（9）式中令

$$\tau = t_f - t$$

于是（9）式变为

$$\ddot{\lambda}_4(\tau) + 2\xi\omega\dot{\lambda}_4(\tau) + \omega^2\lambda_4(\tau) = \nu\tau \tag{9$'$}$$

$\tau = 0$ 时，$t = t_f$ 有 $\lambda_4(0) = 0$，并且设 $\dot{\lambda}_4(0) = 0$。(9)′式是一个常系数的二阶非齐次线性微分方程，利用拉氏变换可求出其解为：

$$\lambda_4(\tau) = \frac{\nu\tau}{\omega^2} - \frac{2\xi\nu}{\omega^3} + \frac{\nu e^{-\xi\omega\tau}}{\omega^3}\left[2\xi\cos\Omega\tau + \frac{2\xi^2 - 1}{(1-\xi^2)^{1/2}}\sin\Omega\tau\right] \tag{10}$$

其中

$$\Omega = \omega(1-\xi^2)^{1/2}$$

将（10）式代入（7）式可得最优控制规律为：

$$\bar{u}(t) = -\nu\left\{(t_f - t) - \frac{2\xi}{\omega} + \frac{1}{\omega}e^{-\xi\omega(t_f-t)}\left[2\xi\cos\Omega(t_f - t) + \frac{2\xi^2-1}{(1-\xi^2)^{1/2}}\sin\Omega(t_f - t)\right]\right\} \tag{11}$$

为最终确定最优控制规律必须确定常向量 ν，为此我们必须将（11）式代入系统状态方程组（1），求解状态参数。

由方程组（1）的第三式有

$$\ddot{x}_3(t) = \dot{x}_4(t)$$

将方程组（1）的第四式代入上式得

$$\ddot{x}_3(t) = -\omega^2 x_3(t) - 2\xi\omega x_4(t) + \omega^2\bar{u}(t)$$

再将方程组（1）的第三式代入上式得

$$\ddot{x}_3(t) + 2\xi\omega\dot{x}_3(t) + \omega^2 x_3(t) = \omega^2\bar{u}(t)$$

将（11）式代入此式得

$$\ddot{x}_3 + 2\xi\omega\dot{x}_3 + \omega^2 x_3 = -\nu\omega^2\left\{(t_f - t) - \frac{2\xi}{\omega} + \frac{1}{\omega}e^{-\xi\omega(t_f-t)}\left[2\xi\cos\Omega(t_f - t) + \frac{2\xi^2-1}{(1-\xi^2)^{1/2}}\sin\Omega(t_f - t)\right]\right\} \tag{12}$$

这又是一个非齐次的二阶常系数线性微分方程，仍可通过拉氏变换求解，最终得

$$\begin{aligned} x_3(t) = -\nu\Big\{&(t_f - t) - \left[t_f^2 + \frac{(\xi\omega t_f + 1)^2}{\Omega^2}\right]^{1/2} e^{-\xi\omega t}\sin(\Omega t + \psi_1) \\ &- \frac{1}{4\omega(1-\xi^2)^{1/2}}e^{-\xi\omega(t_f+t)}\sin[\Omega(t_f - t) + \psi_0] \\ &- (a^2+b^2)^{1/2}e^{-\xi\omega(t_f+t)}\cos[\Omega t + \psi_3] - \frac{1}{4\omega(1-\xi^2)^{1/2}}e^{-\xi\omega(t_f-t)}\sin[\Omega(t_f - t) + \psi_0] \\ &+ \frac{\Omega}{4\xi\omega^2(1-\xi^2)^{1/2}}e^{-\xi\omega(t_f-t)}\cos[\Omega(t_f - t) + \psi_0]\Big\} + x_{30}\frac{1}{1-\xi^2}e^{-\xi\omega t}\cos(\Omega t + \psi_2) \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$\psi_0=\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{2\xi(1-\xi^2)^{1/2}}{2\xi^2-1}\right]$$

$$\psi_f=\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{\Omega t_f}{\xi\omega t_f+1}\right]$$

$$\psi_2=\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{\xi\omega}{\Omega}\right]$$

$$\psi_3=\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\mathrm{tg}(\Omega t_f+\psi_0)\right]$$

$$a=\frac{\Omega}{4\xi\omega^2(1-\xi^2)^{1/2}}\cos(\Omega t_f+\psi_0)$$

$$b=\frac{(1+\xi^2)\Omega}{4\xi\omega^2(1-\xi^2)^{1/2}}\sin(\Omega t_f+\psi_0)$$

它们都是弹体已知特性参数ξ，ω及终端时间t_f的函数，在t_f给定的情况下是不变的常数。

根据方程组（1）的第一式及其起始条件，将（13）式代入并积分可得

$$\begin{aligned}
x_2(t)=&x_{20}+\frac{x_{30}}{\omega(1-\xi^2)}\left[e^{-\xi\omega t_0}\cos(\Omega t_0+\psi_0+\psi_4)-e^{-\xi\omega t}\cos(\Omega t+\psi_0+\psi_4)\right]\\
&-\nu\left\{\left(t_f t-\frac{t^2}{2}\right)+\left[t_f^2+\frac{(\xi\omega t_f+1)^2}{\Omega^2}\right]^{1/2}\frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega}\sin(\Omega t+\psi_1+\psi_4)\right.\\
&+\frac{(a^2+b^2)^{1/2}}{\omega}e^{-\xi\omega(t_f+t)}\cos(\Omega t+\psi_3+\psi_4)+\frac{e^{-\xi\omega(t_f+t)}}{4\omega^2(1-\xi^2)^{1/2}}\sin[\Omega(t_f-t)+\psi_0-\psi_4]\\
&-\frac{e^{-\xi\omega(t_f-t)}}{4\omega^2(1-\xi^2)^{1/2}}\sin[\Omega(t_f-t)+\psi_0+\psi_4]+\frac{\Omega e^{-\xi\omega(t_f-t)}}{4\xi\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}\cos[\Omega(t_f-t)\\
&\left.+\psi_0+\psi_4]-\left(t_f t_0-\frac{t_0^2}{2}\right)+C_1(t_f,t_0,\xi,\omega)\right\}
\end{aligned}\tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}
C_1(t_f,t_0,\xi,\omega)=&-\left[t_f^2+\frac{(\xi\omega t_f+1)^2}{\Omega^2}\right]^{1/2}\frac{e^{-\xi\omega t_0}}{\omega}\sin(\Omega t_0+\psi_1+\psi_4)\\
&-\frac{(a^2+b^2)^{1/2}}{\omega}e^{-\xi\omega(t_f+t_0)}\cos(\Omega t_0+\psi_3+\psi_4)-\frac{1}{4\omega^2(1-\xi^2)^{1/2}}\{e^{-\xi\omega(t_f+t_0)}\sin[\Omega(t_f-t_0)\\
&+\psi_0-\psi_4]-e^{-\xi\omega(t_f-t_0)}\sin[\Omega(t_f-t_0)+\psi_0+\psi_4]\}-\frac{\Omega e^{-\xi\omega(t_f-t_0)}}{4\xi\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}\cos[\Omega(t_f-t_0)\\
&+\psi_0+\psi_4]
\end{aligned}$$

$$\psi_4=\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{\Omega}{\xi\omega}\right]$$

根据方程组（1）的第一式及其初始条件，将（14）式代入再积分一次得：

$$x_1(t)=x_{10}+x_{20}(t-t_0)+\frac{x_{30}}{\omega(1-\xi^2)}\Big[e^{-\xi\omega t_0}(t-t_0)\cos(\Omega t_0+\psi_0+\psi_4)$$
$$-\frac{e^{-\xi\omega t_0}}{\omega}\cos(\Omega t_0+\psi_0+2\psi_4)+\frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega}\cos(\Omega t+\psi_0+2\psi_4)\Big]$$
$$-\nu\Big\{\Big(t_f\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\Big)-\Big[t_f^2+\frac{(\xi\omega t_f+1)^2}{\Omega^2}\Big]^{1/2}\frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega}\sin(\Omega t+\psi_1+2\psi_4)$$
$$-\frac{(a^2+b^2)^{1/2}}{\omega^2}e^{-\xi\omega(t_f+t)}\cos(\Omega t+\psi_3+\psi_4)+\frac{e^{-\xi\omega(t_f+t)}}{4\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}\sin[\Omega(t_f-t)+\psi_0-2\psi_4]$$
$$-\frac{e^{-\xi\omega(t_f-t)}}{4\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}\sin[\Omega(t_f-t)+\psi_0+2\psi_4]+\frac{\Omega e^{-\xi\omega(t_f-t)}}{4\xi\omega^4(1-\xi^2)^{1/2}}\cos[\Omega(t_f-t)+\psi_0+2\psi_4]$$
$$-\Big(t_ft_0-\frac{t_0^2}{2}\Big)t+C_1(t_f,t_0,\xi,\omega)t+\Big(\frac{t_ft_0^2}{2}-\frac{t_0^3}{3}\Big)+C_0(t_f,t_0,\xi,\omega)\Big\} \tag{15}$$

其中

$$C_0(t_f,t_0,\xi,\omega)=-C_1(t_f,t_0,\xi,\omega)t_0+\Big[t_f^2+\frac{(\xi\omega t_f+1)^2}{\Omega^2}\Big]^{1/2}\frac{e^{-\xi\omega t_0}}{\omega^2}$$
$$\times\sin[\Omega t_0+\psi_1+2\psi_4]+\frac{(a^2+b^2)^{1/2}}{\omega^2}e^{-\xi\omega(t_f+t_0)}\cos(\Omega t_0+\psi_3+\psi_4)$$
$$-\frac{e^{-\xi\omega(t_f+t_0)}}{4\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}\sin[\Omega(t_f-t_0)+\psi_0-2\psi_4]+\frac{e^{-\xi\omega(t_f-t_0)}}{4\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}\sin[\Omega(t_f-t_0)+\psi_0+2\psi_4]$$
$$-\frac{\Omega e^{-\xi\omega(t_f-t_0)}}{4\xi\omega^4(1-\xi^2)^{1/2}}\cos[\Omega(t_f-t_0)+\psi_0+2\psi_4]$$

由 $x_1(t_f)=0$ 可确定常向量 ν。

$$\nu=\Big\{x_{10}+x_{20}(t_f-t_0)+\frac{x_{30}}{\omega(1-\xi^2)}\Big[e^{-\xi\omega t_0}(t_f-t_0)\cos(\Omega t_0+\psi_0+\psi_4)$$
$$-\frac{e^{-\xi\omega t_0}}{\omega}\cos(\Omega t_0+\psi_0+2\psi_4)+\frac{e^{-\xi\omega t_f}}{\omega}\cos(\Omega t_f+\psi_0+2\psi_4)\Big\}\times\Big\{\frac{(t_f-t_0)^3}{3}$$
$$-\Big[t_f^2+\frac{(\xi\omega t_f+1)^2}{\Omega^2}\Big]^{1/2}\frac{e^{-\xi\omega t_f}}{\omega^2}\sin(\Omega t_f+\psi_1+2\psi_4)-\frac{(a^2+b^2)^{1/2}}{\omega^2}e^{-2\xi\omega t_f}\cos(\Omega t_f+\psi_3+\psi_4)$$
$$+\frac{e^{-2\xi\omega t_f}}{4\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}\sin(\psi_0-2\psi_4)-\frac{1}{4\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}\sin(\psi_0+2\psi_4)+\frac{\Omega}{4\xi\omega^4(1-\xi^2)^{1/2}}$$
$$\times\cos(\psi_0+2\psi_4)+C_1(t_f,t_0,\xi,\omega)t_f+C_0(t_f,t_0,\xi,\omega)\Big\}^{-1} \tag{16}$$

将 ν 值代入（11）式得

$$\bar{u}(t)=-\Big\{x_{10}+x_{20}(t_f-t_0)+\frac{x_{30}}{\omega(1-\xi^2)}\Big[e^{-\xi\omega t_0}(t_f-t_0)\cos(\Omega t_0+\psi_0+\psi_4)$$
$$-\frac{e^{-\xi\omega t_0}}{\omega}\cos(\Omega t_0+\psi_0+2\psi_4)+\frac{e^{-\xi\omega t_f}}{\omega}\cos(\Omega t_f+\psi_0+2\psi_4)\Big\}\times\Big\{(t_f-t)$$
$$-\frac{2\xi}{\omega}+\frac{e^{-\xi\omega(t_f-t)}}{\omega}\Big[2\xi\cos\Omega(t_f-t)+\frac{2\xi^2-1}{(1-\xi^2)^{1/2}}\sin\Omega(t_f-t)\Big]\Big\}\times\Big\{\frac{(t_f-t_0)^3}{3}$$
$$-\Big[t_f^2+\frac{(\xi\omega t_f+1)^2}{\Omega^2}\Big]^{1/2}\frac{e^{-\xi\omega t_f}}{\omega^2}\sin(\Omega t_f+\psi_1+2\psi_4)-\frac{(a^2+b^2)^{1/2}}{\omega^2}e^{-2\xi\omega t_f}\cos(\Omega t_f+\psi_3+\psi_4)$$
$$+\frac{e^{-2\xi\omega t_f}}{4\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}\sin(\psi_0-2\psi_4)-\frac{1}{4\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}\sin(\psi_0+2\psi_4)+\frac{\Omega}{4\xi\omega^4(1-\xi^2)^{1/2}}$$
$$\times\cos(\psi_0+2\psi_4)+C_1(t_f,t_0,\xi,\omega)t_f+C_0(t_f,t_0,\xi,\omega)\Big\}^{-1} \tag{17}$$

令

$$F(t_f,t_0,\xi,\omega)=-\left[t_f^2+\frac{(\xi\omega t_f+1)^2}{\omega^2}\right]^{1/2}\frac{e^{-\xi\omega t_f}}{\omega^2}\sin(\Omega t_f+\psi_1+2\psi_4)-\frac{(a^2+b^2)^{1/2}}{\omega^2}$$
$$\times e^{-2\xi\omega t_f}\cos(\Omega t_f+\psi_3+\psi_4)+\frac{e^{-2\xi\omega t_f}}{4\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}\sin(\psi_0-2\psi_4)-\frac{1}{4\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}$$
$$\times\sin(\psi_0+2\psi_4)+\frac{\Omega}{4\xi\omega^4(1-\xi^2)^{1/2}}\cos(\psi_0+2\psi_4)+C_1(t_f,t_0,\xi,\omega)t_f$$
$$+C_0(t_f,t_0,\xi,\omega)$$

在t_f已给定的情况下，$F(t_f,t_0,\xi,\omega)$是由弹体参数ξ,ω及时间t_0所确定的常量。这样（17）式可简写为

$$\bar{u}(t)=-\left\{x_{10}+x_{20}(t_f-t_0)+\frac{x_{30}}{\omega(1-\xi^2)}\left[e^{-\xi\omega t_0}(t_f-t_0)\cos(\Omega t_0+\psi_0+\psi_4)\right.\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-\xi\omega t_0}}{\omega}\cos(\Omega t_0+\psi_0+2\psi_4)+\frac{e^{-\xi\omega t_f}}{\omega}\cos(\Omega t_f+\psi_0+2\psi_4)\right\}\times\left\{(t_f-t)\right.$$
$$\left.-\frac{2\xi}{\omega}+\frac{e^{-\xi\omega(t_f-t)}}{\omega}\left[2\xi\cos\Omega(t_f-t)+\frac{2\xi^2-1}{(1-\xi^2)^{1/2}}\sin\Omega(t_f-t)\right]\right\}$$
$$\times\left\{\frac{(t_f-t_0)^3}{3}+F(t_f,t_0,\xi,\omega)\right\}^{-1}\tag{18}$$

$t=t_0$时最优导引律为

$$\bar{u}(t_0)=-\left\{x_{10}+x_{20}(t_f-t_0)+\frac{x_{30}}{\omega(1-\xi^2)}\left[e^{-\xi\omega t_0}(t_f-t_0)\cos(\Omega t_0+\psi_0+\psi_4)\right.\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-\xi\omega t_0}}{\omega}\cos(\Omega t_0+\psi_0+2\psi_4)+\frac{e^{-\xi\omega t_f}}{\omega}\cos(\Omega t_f+\psi_0+2\psi_4)\right\}\times\left\{(t_f-t_0)\right.$$
$$\left.-\frac{2\xi}{\omega}+\frac{e^{-\xi\omega(t_f-t_0)}}{\omega}\left[2\xi\cos\Omega(t_f-t_0)+\frac{2\xi^2-1}{(1-\xi^2)^{1/2}}\sin\Omega(t_f-t_0)\right]\right\}\times\left\{\frac{(t_f-t_0)^3}{3}\right.$$
$$\left.+F(t_f,t_0,\xi,\omega)\right\}^{-1}\tag{19}$$

令

$$K(t_f,t_0,\xi,\omega)=\left\{(t_f-t_0)-\frac{2\xi}{\omega}+\frac{e^{-\xi\omega(t_f-t_0)}}{\omega(1-\xi^2)}\sin[\Omega(t_f-t_0)+\psi_0]\right\}$$
$$\times\left\{\frac{(t_f-t_0)^3}{3}+F(t_f,t_0,\xi,\omega)\right\}^{-1}$$

$$L(t_f,t_0,\xi,\omega)=\frac{1}{\omega(1-\xi^2)}\left[e^{-\xi\omega t_0}(t_f-t_0)\cos(\Omega t_0+\psi_0+\psi_4)-\frac{e^{-\xi\omega t_0}}{\omega}\right.$$
$$\left.\times\cos(\Omega t_0+\psi_0+2\psi_4)+\frac{e^{-\xi\omega t_f}}{\omega}\cos(\Omega t_f+\psi_0+2\psi_4)\right]\times\left\{(t_f-t_0)-\frac{2\xi}{\omega}\right.$$
$$\left.+\frac{e^{-\xi\omega(t_f-t_0)}}{\omega(1-\xi^2)}\sin[\Omega(t_f-t_0)+\psi_0]\right\}\times\left\{\frac{(t_f-t_0)^3}{3}+F(t_f,t_0,\xi,\omega)\right\}^{-1}$$

这样（19）式简化为

$$\bar{u}(t_0)=-K(t_f,t_0,\xi,\omega)[x_{10}+x_{20}(t_f-t_0)]-L(t_f,t_0,\xi,\omega)x_{30}\tag{20}$$

由（20）式表示的导引规律可以通过适当的选择时间t_f-t_0，可将其变为一个变系数的比例导引（与视线角速度成比例）及一项与加速度和视线角加速度有关的修正项所组成

的导引律[1]。

当$\omega \to \infty$时，导弹的动态响应过程消失，即系统的响应既无振荡也无延迟，此时$F(t_f, t_0, \xi, \omega) = 0$，

$$K(t_f, t_0, \xi, \omega) = \frac{3}{(t_f - t_0)^2}$$

$$L(t_f, t_0, \xi, \omega) = 0$$

故

$$\bar{u}(t_0) = -\frac{3\left[x_{10} + x_{20}(t_f - t_0)\right]}{(t_f - t_0)^2} \tag{21}$$

此即为瞬时响应的质点的最优导引律。通过选择不同的$t_f - t_0$值，可得各种不同系数的比例导引律[3]。

三、目标集为零控拦截曲面的导引律

将动力学系统（1）向零控拦截曲面L导引时，其目标集为[1,2]：

$$\begin{cases} x_1(T) + \mu x_2(T) = 0, \quad \mu \geqslant 0 \\ x_3(T) = 0 \end{cases} \tag{22}$$

设引入零控拦截曲面L的时间T已经选定；由进入零控拦截曲面到命中目标的时间μ待定。

$x_3(T) = 0$之所以必要，是由于要求将系统引入零控拦截曲面L之后使系统能保持在此曲面之内。

性能指标仍为式（2），此时系统的哈米尔顿函数H不变。因而动力学系统（1）的共态方程组仍由（5）式所描述，但横截条件变为：

$$\begin{cases} \lambda_1(T) = \nu \\ \lambda_2(T) = \nu\mu \\ \lambda_3(T) = k \\ \lambda_4(T) = 0 \end{cases} \tag{23}$$

其中ν、k为拉氏乘子，是待定常向量。根据此边界条件解共态方程组（5）得：

$$\lambda_1(t) = \nu$$

$$\lambda_2(t) = \nu(T + \mu - t)$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = -\nu(T + \mu - t) + \omega^2\lambda_4(t)$$

$$\ddot{\lambda}_4(t) = 2\xi\omega\dot{\lambda}_4(t) - \omega^2\lambda_4(t) + \nu(T + \mu - t)$$

根据第二节中的结果得

$$\lambda_4(t) = \frac{\nu}{\omega^2}\left\{(T + \mu - t) - \frac{2\xi}{\omega} + \frac{1}{\omega}e^{-\xi\omega(T+\mu-t)}\left[2\xi\cos\Omega(T + \mu - t) + \frac{2\xi^2 - 1}{(1 - \xi^2)^{1/2}}\sin\Omega(T + \mu - t)\right]\right\} \tag{24}$$

将$\lambda_4(t)$代入（7）式得最优导引律为

$$\bar{u}(t) = -\nu\left\{(T + \mu - t) - \frac{2\xi}{\omega} + \frac{1}{\omega}e^{-\xi\omega(T+\mu-t)}\left[2\xi\cos\Omega(T + \mu - t) + \frac{2\xi^2 - 1}{(1 - \xi^2)^{1/2}}\sin\Omega(T + \mu - t)\right]\right\} \tag{25}$$

将 (25) 式代入动力学系统 (1) 中，与第二节一样可解出 $x_3(t)$，$x_2(t)$，$x_1(t)$。

$$x_3(t)=-\nu\left\{(T+\mu-t)-\left[(T+\mu)^2+\frac{(\xi\omega(T+\mu)+1)^2}{\Omega^2}\right]^{1/2}e^{-\xi\omega t}\sin(\Omega t+\psi_1)\right.$$
$$-\frac{e^{-\xi\omega(T+\mu+t)}}{4\omega(1-\xi^2)^{1/2}}\sin[\Omega(T+\mu-t)+\psi_0]-(a^2+b^2)^{1/2}e^{-\xi\omega(T+\mu+t)}$$
$$\times\cos(\Omega t+\psi_3)-\frac{e^{-\xi\omega(T+\mu-t)}}{4\omega(1-\xi^2)^{1/2}}\sin[\Omega(T+\mu-t)+\psi_0]$$
$$\left.+\frac{\Omega e^{-\xi\omega(T+\mu-t)}}{4\xi\omega^2(1-\xi^2)^{1/2}}\cos[\Omega(T+\mu-t)+\psi_0]\right\}+\frac{x_{30}}{1-\xi^2}e^{-\xi\omega t}\cos(\Omega t+\psi_2) \tag{26}$$

$$x_2(t)=x_{20}+\frac{x_{30}}{\omega(1-\xi^2)}\left[e^{-\xi\omega t_0}\cos(\Omega t_0+\psi_0+\psi_4)-e^{-\xi\omega t}\cos(\Omega t+\psi_0+\psi_4)\right.$$
$$-\nu\left\{\left[(T+\mu)t-\frac{t^2}{2}\right]+\left[(T+\mu)^2+\frac{(\xi\omega(T+\mu)+1)^2}{\Omega^2}\right]^{1/2}\frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega}\sin(\Omega t+\psi_1+\psi_4)\right.$$
$$+\frac{(a^2+b^2)^{1/2}}{\omega}e^{-\xi\omega(T+\mu+t)}\cos(\Omega t+\psi_3+\psi_4)+\frac{e^{-\xi\omega(T+\mu+t)}}{4\omega^2(1-\xi^2)^{1/2}}$$
$$\times\sin[\Omega(T+\mu-t)+\psi_0-\psi_4]-\frac{e^{-\xi\omega(T+\mu-t)}}{4\omega^2(1-\xi^2)^{1/2}}\sin[\Omega(T+\mu-t)+\psi_0+\psi_4]$$
$$+\frac{\Omega e^{-\xi\omega(T+\mu-t)}}{4\xi\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}\cos[\Omega(T+\mu-t)+\psi_0+\psi_4]-\left[(T+\mu)t_0-\frac{t_0^2}{2}\right]$$
$$\left.+C_1(T+\mu,t_0,\xi,\omega)\right\} \tag{27}$$

$$x_1(t)=x_{10}+x_{20}(t-t_0)+\frac{x_{30}}{\omega(1-\xi^2)}\left[e^{-\xi\omega t_0}(t-t_0)\cos(\Omega t_0+\psi_0+\psi_4)\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-\xi\omega t_0}}{\omega}\cos(\Omega t_0+\psi_0+2\psi_4)+\frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega}\cos(\Omega t+\psi_0+2\psi_4)\right]$$
$$-\nu\left\{\left[(T+\mu)\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right]-\left[(T+\mu)^2+\frac{(\xi\omega(T+\mu)+1)^2}{\Omega^2}\right]^{1/2}\cdot\frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega^2}\sin(\Omega t+\psi_1+2\psi_4)\right.$$
$$-\frac{(a^2+b^2)^{1/2}}{\omega^2}e^{-\xi\omega(T+\mu+t)}\cos(\Omega t+\psi_3+\psi_4)+\frac{e^{-\xi\omega(T+\mu+t)}}{4\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}$$
$$\times\sin[\Omega(T+\mu-t)+\psi_0-2\psi_4]-\frac{e^{-\xi\omega(T+\mu-t)}}{4\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}\sin[\Omega(T+\mu-t)+\psi_0+2\psi_4]$$
$$+\frac{\Omega e^{-\xi\omega(T+\mu-t)}}{4\xi\omega^4(1-\xi^2)^{1/2}}\cos[\Omega(T+\mu-t)+\psi_0+2\psi_4]-\left[(T+\mu)t_0-\frac{t_0^2}{2}\right]t$$
$$\left.+C_1(T+\mu,t_0,\xi,\omega)t+\frac{(T+\mu)t_0^2}{2}-\frac{t_0^3}{3}+C_0(T+\mu,t_0,\xi,\omega)\right\} \tag{28}$$

由 (28) 式令 $t=T$，可得

$$x_1(T)=x_1^0(T)-\nu\left\{\frac{(T-t_0)^3}{3}+\frac{\mu(T-t_0)^2}{2}+\Delta x_1(T,\mu,\xi,\omega)\right\} \tag{29}$$

其中

$$x_1^0(T)=x_{10}+x_{20}(T-t_0)+\frac{x_{30}}{\omega(1-\xi^2)}\left[e^{-\xi\omega t_0}(T-t_0)\cos(\Omega t_0+\psi_0+\psi_4)\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-\xi\omega t_0}}{\omega}\cos(\Omega t_0+\psi_0+2\psi_4)+\frac{e^{-\xi\omega T}}{\omega}\cos(\Omega T+\psi_0+2\psi_4)\right]$$

$$\Delta X_1(T,\mu,\xi,\omega)=-\left[(T+\mu)^2+\frac{(\xi\omega(T+\mu)+1)^2}{\Omega^2}\right]^{1/2}\frac{e^{-\xi\omega T}}{\omega^2}\sin(\Omega T+\psi_1+2\psi_4)$$

$$-\frac{(a^2+b^2)^{1/2}}{\omega^2}e^{-\xi\omega(2T+\mu)}\cos(\Omega T+\psi_3+\psi_4)+\frac{e^{-\xi\omega(2T+\mu)}}{4\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}$$

$$\times\sin(\Omega\mu+\psi_0-2\psi_4)-\frac{e^{-\xi\omega\mu}}{4\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}\sin(\Omega\mu+\psi_0+2\psi_4)$$

$$+\frac{\Omega e^{-\xi\omega\mu}}{4\xi\omega^4(1-\xi^2)^{1/2}}\cos(\Omega\mu+\psi_0+2\psi_4)+C_1(T+\mu,t_0,\xi,\omega)T$$

$$+C_0(T+\mu,t_0,\xi,\omega)$$

由（27）式令 $t=T$ 可得

$$x_2(T)=x_2^0(T)-\nu\left\{\frac{(T-t_0)^2}{2}+\mu(T-t_0)+\Delta X_2(T,\mu,\xi,\omega)\right\} \tag{30}$$

其中

$$x_2^0(T)=x_{20}+\frac{x_{30}}{\omega(1-\xi^2)}[e^{-\xi\omega t_0}\cos(\Omega t_0+\psi_0+\psi_4)-e^{-\xi\omega T}\cos(\Omega T+\psi_0+\psi_4)]$$

$$\Delta X_2(T,\mu,\xi,\omega)=\left[(T+\mu)^2+\frac{(\xi\omega(T+\mu)+1)^2}{\Omega^2}\right]^{1/2}\frac{e^{-\xi\omega T}}{\omega}\sin(\Omega T+\psi_1+\psi_4)$$

$$+\frac{(a^2+b^2)^{1/2}}{\omega}e^{-\xi\omega(2T+\mu)}\cos(\Omega T+\psi_3+\psi_4)+\frac{e^{-\xi\omega(2T+\mu)}}{4\omega^2(1-\xi^2)^{1/2}}$$

$$\times\sin[\Omega\mu+\psi_0-\psi_4]-\frac{e^{-\xi\omega\mu}}{4\omega^2(1-\xi^2)^{1/2}}\sin(\Omega\mu+\psi_0+\psi_4)$$

$$+\frac{\Omega e^{-\xi\omega\mu}}{4\xi\omega^3(1-\xi^2)^{1/2}}\cos(\Omega\mu+\psi_0+\psi_4)+C_1(T+\mu,t_0,\xi,\omega)$$

由于 $t=T$ 时系统应达到目标集，即应满足

$$x_1(T)+\mu x_2(T)=0$$

由式（29）及（30）两式可得

$$x_1^0(T)+\mu x_2^0(T)-\nu\left\{\frac{(T-t_0)^3}{3}+\mu(T-t_0)+\mu^2(T-t_0)+\Delta X_1(T,\mu,\xi,\omega)\right.$$

$$\left.+\mu\Delta X_2(T,\mu,\xi,\omega)\right\}=0$$

由此式可解出 ν 来。

$$\nu=\frac{x_1^0(T)+\mu x_2^0(T)}{\frac{(T-t_0)^3}{3}+\mu(T-t_0)^2+\mu^2(T-t_0)+\Delta X_1(T,\mu,\xi,\omega)+\mu\Delta X_2(T,\mu,\xi,\omega)} \tag{31}$$

将（31）式代入（25）式得最优控制规律为：

$$\bar{u}(t)=-[x_1^0(T)+\mu x_2^0(T)]\cdot\left\{(T+\mu-t)-\frac{2\xi}{\omega}+\frac{1}{\omega}e^{-\xi\omega(T+\mu-t)}\right.$$

$$\left.\times\left[2\xi\cos\Omega(T+\mu-t)+\frac{2\xi^2-1}{(1-\xi^2)^{1/2}}\sin\Omega(T+\mu-t)\right]\right\}\cdot\left\{\frac{(T-t_0)^3}{3}\right.$$

$$\left.+\mu(T-t_0)^2+\mu^2(T-t_0)+\Delta X_1(T,\mu,\xi,\omega)+\mu\Delta X_2(T,\mu,\xi,\omega)\right\}^{-1} \tag{32}$$

当 $t=t_0$ 时的最优导引律为

$$\bar{u}(t_0)=-[x_1^0(T)+\mu x_2^0(T)]\Big\{(T+\mu-t_0)-\frac{2\xi}{\omega}+\frac{1}{\omega(1-\xi^2)^{1/2}}e^{-\xi\omega(T+\mu-t_0)}$$

$$\times\sin[\Omega(T+\mu-t_0)+\psi_0]\Big\}\Big\{\frac{(T-t_0)^3}{3}+\mu(T-t_0)^2+\mu^2(T-t_0)$$

$$+\Delta X_1(T,\mu,\xi,\omega)+\mu\Delta X_2(T,\mu,\xi,\omega)\Big\}^{-1} \tag{33}$$

上式还可以改写为

$$\bar{u}(t_0)=-K_L(T,\mu,\xi,\omega)[x_{10}+x_{20}(T+\mu-t_0)]-L_L(T,\mu,\xi,\omega)x_{30} \tag{34}$$

其中

$$K_L(T,\mu,\xi,\omega)=\Big\{(T+\mu-t_0)-\frac{2\xi}{\omega}+\frac{1}{\omega(1-\xi^2)}e^{-\xi\omega(T+\mu-t_0)}$$

$$\times\sin[\Omega(T+\mu-t_0)+\psi_0]\Big\}\Big\{\frac{(T-t_0)^3}{3}+\mu(T-t_0)^2+\mu^2(T-t_0)$$

$$+\Delta X_1(T,\mu,\xi,\omega)+\mu\Delta X_2(T,\mu,\xi,\omega)\Big\}^{-1}$$

$$L_L(T,\mu,\xi,\omega)=\frac{1}{\omega(1-\xi^2)}\Big[e^{-\xi\omega t_0}(T+\mu-t_0)\cos(\Omega t_0+\psi_0+\psi_4)$$

$$-\frac{1}{\omega}e^{-\xi\omega t_0}\cos(\Omega t_0+\psi_0+2\psi_4)+\frac{1}{\omega}e^{-\xi\omega T}\cos(\Omega T+\psi_0+2\psi_4)$$

$$-\mu e^{-\xi\omega T}\cos(\Omega T+\psi_0+\psi_4)\Big\}\Big\{\frac{(T-t_0)^3}{3}+\mu(T-t_0)^2+\mu^2(T-t_0)$$

$$+\Delta X_1(T,\mu,\xi,\omega)+\mu\Delta X_2(T,\mu,\xi,\omega)\Big\}^{-1}$$

本节所有 ψ_1，ψ_3，a，b 其中之 t_f 均应以 $T+\mu$ 代之。

最优控制规律（33）式或（34）式中，其 μ 尚未确定，只有确定了 μ，最优控制规律才算完全确定。为此，我们应用 $x_3(T)=0$ 的条件。这一条件在共态方程组的边值条件中虽然已经考虑到，但由于建立最优控制过程中，此最优控制规律与 λ_3 无关，所以 $x_3(T)=0$ 的条件并未真正利用。为了保证将系统引入零控拦截曲面以后不再脱离此曲面，必须如此选择 μ，使 $x_3(T)=0$。由（26）式令 $t=T$ 可得：

$$x_3(T)=-\nu\Big\{\mu-\Big[(T+\mu)^2+\frac{(\xi\omega(T+\mu)+1)^2}{\Omega^2}\Big]^{1/2}e^{-\xi\omega T}\sin(\Omega T+\psi_1)$$

$$-\frac{e^{-\xi\omega(2T+\mu)}}{4\omega(1-\xi^2)^{1/2}}\sin(\Omega\mu+\psi_0)-(a^2+b^2)^{1/2}e^{-\xi\omega(2T+\mu)}$$

$$\times\cos(\Omega T+\psi_3)-\frac{e^{-\xi\omega\mu}}{4\omega(1-\xi^2)^{1/2}}\sin(\Omega\mu+\psi_0)+\frac{\Omega e^{-\xi\omega\mu}}{4\xi\omega^2(1-\xi^2)^{1/2}}$$

$$\times\cos(\Omega\mu+\psi_0)\Big\}+\frac{x_{30}}{1-\xi^2}e^{-\xi\omega T}\cos(\Omega T+\psi_2)=0$$

将（31）式代入可得

$$-[x_1^0(T)+\mu x_2^0(T)]\left\{\mu-\left[(T+\mu)^2+\frac{(\xi\omega(T+\mu)+1)^2}{\Omega^2}\right]^{1/2}e^{-\xi\omega T}\sin(\Omega T+\psi_1)\right.$$

$$-\frac{e^{-\xi\omega(2T+\mu)}}{4\omega(1-\xi^2)^{1/2}}\sin(\Omega\mu+\psi_0)-(a^2+b^2)^{1/2}e^{-\xi\omega(2T+\mu)}\cos(\Omega T+\psi_3)$$

$$\left.-\frac{e^{-\xi\omega\mu}}{4\omega(1-\xi^2)^{1/2}}\sin(\Omega\mu+\psi_0)+\frac{\Omega e^{-\xi\omega\mu}}{4\xi\omega^2(1-\xi^2)^{1/2}}\cos(\Omega\mu+\psi_0)\right\}$$

$$\times\left\{\frac{(T-t_0)^3}{3}+\mu(T-t_0)^2+\mu^2(T-t_0)+\Delta X_1(T,\mu,\xi,\omega)\right.$$

$$\left.+\mu\Delta X_2(T,\mu,\xi,\omega)\right\}^{-1}+\frac{x_{30}}{1-\xi^2}e^{-\xi\omega T}\cos(\Omega T+\psi_2)=0 \qquad (35)$$

这是一个高阶超越方程，可利用数值解法解出 μ 来。可能有好几个 μ 值满足方程（35），此时应从所有大于零的 μ 中取其最小者。当然也有可能不存在满足方程（35）的 μ，在这种情况下即是将系统引导到了零控拦截曲面，但却不能使系统保持在此曲面内，此时向零控拦截曲面的导引失去意义。不过从物理上说来，使相对加速度为零的控制是存在的，所以方程应该有解。

当 $\omega\to\infty$ 时，导弹的二阶环节的特性消失，成为瞬时响应的质点，此时（34）式的 $K_L(T,\mu,\xi,\omega)$、$L_L(T,\mu,\xi,\omega)$ 变成

$$K_L(T,\mu,\xi,\omega)=\frac{T+\mu-t_0}{\frac{(T-t_0)^3}{3}+\mu(T-t_0)^2+\mu^2(T-t_0)}$$

$$L_L(T,\mu,\xi,\omega)=0$$

最优导引律 $\bar{u}(t_0)$ 变为

$$\bar{u}(t_0)=-\frac{x_{10}+x_{20}(T+\mu-t_0)}{\frac{(T-t_0)^2}{3}+\mu(T-t_0)^2+\mu^2(T-t_0)}(T+\mu-t_0) \qquad (36)$$

这正是瞬时响应质点向零控拦截曲面 L 导引所得结果[3]。

四、结 束 语

以上对两种目标集得出了具有二阶特性的导弹最优导引规律（20）式及（34）式，这两式在形式上是一样的。如果将导弹加速度通过视线转动角速度及角速度的变化率表示出来，并令

$$T-t_0=-\frac{x_{10}^T(\alpha x_{10}+\beta x_{20})}{x_{20}^T(\alpha x_{10}+\beta x_{20})}$$

$$T+\mu-t_0=-\frac{x_{10}^T(\alpha x_{10}+\beta x_{20})}{x_{20}^T(\alpha x_{10}+\beta x_{20})}$$

那么（20）式及（34）式都可以表示为[1]：

$$
\begin{aligned}
&\bar{u}(x_{10},\ x_{20},\ \bar{\omega}_0, \dot{\bar{\omega}}_0,\ \alpha,\ \beta,\ \xi,\ \omega,\ \mu) \\
&= -L_L(x_{10},\ x_{20},\ \alpha,\ \beta,\ \xi,\ \omega,\ \mu) \frac{x_{10}^2}{x_{10}^T(\alpha x_{10}+\beta x_{20})} \\
&\times \left[\frac{x_{30}^T(\alpha x_{10}+\beta x_{20})}{x_{10}^2} x_{10} + \dot{\bar{\omega}}_0 \times (\alpha x_{10}+\beta x_{20})\right] + \left[K_L(x_{10}, x_{20}, \alpha, \beta, \xi\ \omega, \mu)\right. \\
&\times \frac{x_{10}^2}{x_{20}^T(\alpha x_{10}+\beta x_{20})} - 2L_L(x_{10},\ x_{20},\ \alpha,\ \beta,\ \xi,\ \omega,\ \mu) \\
&\times \left.\frac{x_{10}^T x_{20}}{x_{10}^T(\alpha x_{10}+\beta x_{20})}\right] \bar{\omega}_0 \times (\alpha x_{10}+\beta x_{20})
\end{aligned}
\tag{37}
$$

其中 $\bar{\omega}$ 及 $\dot{\bar{\omega}}$ 分别为视线的角速度和角加速度；α 和 β 为实数，可根据需要选取。

由（37）式可见，具有二阶特性的导弹最优导引律，在特定过渡时间条件下，由一个变系数的比例导引和一个与加速度及视线角加速度的修正项所组成。当然实现这种导引律，除了需要测量视线的角速度之外，还需测量视线角速度的变化率及加速度。其系数的计算虽然比较复杂，但它们是 x_{10}，x_{20}，α，β，ξ，ω 及 μ 的已知函数，在电子技术蓬勃发展的今天，相信是不难完成的。由于对导弹所取的数学模型比所列文献提供的数学模前进了一步，因而必然具有更高的导引准确度。

参 考 文 献

〔1〕 王朝珠　最优拦截导引律　航空学报1979年第四期。

〔2〕 中国科学院系统所著　极值控制与极大值原理　科学出版社，1980.11。

〔3〕 韩京清等　拦截问题中的导引律　国防工业出版社，1977.6。

〔4〕 R. G. Cottrell, "Optimal intercept guidance for short-Range tactical missiles" AIAA J 9:7 (1971).

〔5〕 Garber, V, "Optimum intercept laws of acceleratary target" AIAA J Vol 6 №11 (1968).

OPTIMAL GUIDANCE LAWS FOR MISSILES WITH SECOND ORDER CHARACTERISTICS

Li Zhongying

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

The problem of optimal intercept guidance laws for missiles have been studied by a lot of authors at home and abroad. But the mathematical models for missiles were assumed too simple, i. e. either as an ideal particle or as a first order delay link.

As a primary contribution this paper has made researches on the optimal intercept guidance laws based on a mathematical model with second order charac-

teristics. By taking minimum control energy consumption as the performance index, the optimal intercept guidance laws have been derived from the minimum principle in the following two cases of terminal state:

1. The terminal miss-distance is zero;
2. The intercepting curved surface of out-of-control.

The conjugate state equations and the state equations have been solved by use of Laplace Transformation. Through considerably complex computation, the optimal intercept guidance laws have been deduced in the following analytical forms

1. $u^*(t_0) = -K(\xi, \omega, t_f)(x_{10} + x_{20}t_f) - L(\xi, \omega, t_f)x_{30}$;
2. $u^*(t_0) = -K_L(\xi, \omega, T, \mu)(x_{10} + x_{20}t_f) - L_L(\xi, \omega, T, \mu)x_{30}$.

Through appropriate selection of the terminal time t_f or the time of lead T, the results obtained above may be transformed into the optimal guidance laws which are composed of the proportional navigation with varied coefficients and the correctional terms associated with acceleration and angular acceleration of sight-line rotation. These results are similar to those of missiles with first order delay link in form and have no need of any additional parameter. However, the computation is more complex and the results are more accurate.

Finally, the optimal intercept guidance laws are studied in the case of the proper frequency of a missile ω approaching to infinity, i.e. in the case of an ideal particle. The results are the same as those obtained by the other authors.