

多维动力吸振器对复杂悬臂 结构减震之应用

中国科学院力学研究所 田千里

摘 要

一个复杂悬臂结构在20赫芝附近有两个密接的共振峰,导致结构根部破坏。本文提出了用多维动力吸振器对它进行减震,为了克服通常的调谐吸振器对结构频率十分敏感的缺点,在结构的某一截面上悬挂了六个吸振器,吸振器随着结构沿任意方向振动,而且六个吸振器的刚度与阻尼参数可以互不相同,以展宽其吸振频带,为了寻找最优参数和研究这些参数变化时对结构响应之影响,计算了大量的响应曲线,因为结构阻尼很小,吸振器阻尼较大,所以这是一个非比例阻尼的动力分析问题。本文用复特征解法和模态组合法处理了这个问题。

一、引 言

悬臂结构在基频共振时其根部产生很大的应力,容易导致破坏,使用动力吸振器可以很好的解决这个问题,但是复杂的悬臂结构在基频附近往往有好几个共振峰,而且由于激振方向是不确定的,这些共振峰又常是耦联在一起的,悬臂结构与吸振器在长期工作过程中频率参数还可能偏离原设计的数值,因而处理这类问题无法用经典的调谐式吸振器。我们采用在结构的某一截面上安装多个参数不同的吸振器以展宽其吸振频带并使之可随结构沿任意方向振动来压降任意方向的振动水平。

如所周知,现有的通用有限元分析程序如SAP等均只能计算具有比例阻尼阵的动力问题,我们这里阻尼集中于吸振器上,而吸振器又悬挂在结构的某一截面上,是显著的非比例阻尼问题,所以我们使用了复特征解法与模态组合法。

二、用模态组合法计算动力响应

模态组合法的特点是分别求各子结构之模态解,以子结构之特征矢量作为组合结构之雷次(Rifz)矢量,在此子空间内求系统之特征解。我们这里结构本身的阻尼很小,而吸振器的阻尼较大,所以将它们分为两个子结构。结构本身用SAPⅣ求解其无阻尼模态,取其截尾后的少数低阶模态与吸振器的集中参数进行综合。现将用SAPⅣ程序计算出来的结构前几阶自然频率与实验结果比较列于表1。

1981年4月14日收到。

表1 悬臂结构前几阶自然频率

Table 1 The few terms of natural frequencies of a cantilever structure

频率阶次	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
计算值	20.25	20.63	88.3	148.0	148.8	259.3
正弦试验	20.83	21.42	88	147	148	240
随机试验	20.23	21.48	83.19	150.41	158.23	259.87

因为 f_1, f_2 十分密集,它们分别对应于两个主方向的弯曲振动,为了调解它们,用了机械阻抗测试手段,在20~22Hz频段我们用慢速扫描,用X-Y记录仪快速记录相位与幅度,再逐点用手工绘制了阻抗圆,因而在此频段,频率分辨率达0.01HZ。随机激振用B·K3380控制,响应由磁带记录在C·F700上进行了谱分析。

实测的基频振型也基本上与计算结果吻合,所以我们就取计算出来的模态参数与吸振器进行综合。如图1在悬臂结构之 z_j 点附加动力吸振器后,相当于在该点作用一个集中力

$$F_{j,i} = k_{j,i}(y_{j,i} - x_j) \delta(z - z_j) \quad (1)$$

这里 $k_{j,i} = k_{j,i}(1 + i\beta)$ 为吸振器复弹簧之复刚度, β 为其阻尼系数, $i = \sqrt{-1}$ 。

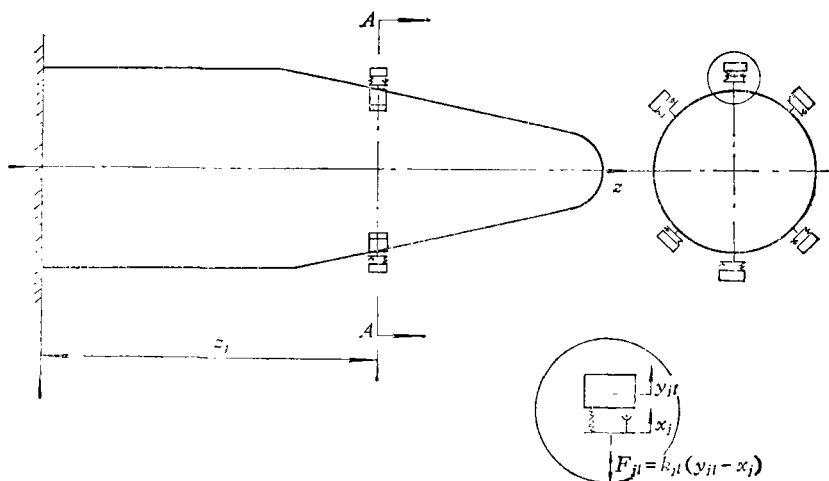


图1 吸振器示意图

Fig. 1 Schematic of absorber

有限元计算首先要将结构离散化为若干个节点,而每一节点可以有0~6个自由度,如果是忽略剪切与转动惯量的梁单元,则每点有2个自由度,所以以下我们均用第 j 个自由度代表上述的 z_j 点,设结构离散化后总自由度数为 N 则其位移矢量 \mathbf{X} 为 N 维矢量。在结构的 m 个自由度上附加了 p 个吸振器($p \geq m$),当结构承受 \ddot{x}_0 大小的基础加速度运动时,系统之运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{M}\{\mathbf{I}\}\ddot{x}_0 + \mathbf{F} \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{F} = \left\{ \sum_l k_{j,l}^* (y_{j,l} - x_j) \right\} \quad (3)$$

下标 j 代表第 j 个自由度, 下标 l 代表第 l 个吸振器, 上标 $*$ 代表该量为复数, $\{1\}^T = (1, 1 \dots 1)$ 因为我们在结构的一个截面上加了六个不同参数的吸振器, 所以在 (3) 式中对应于同一个 x_j 可以有 l 个 $y_{j,l}$, 为了使两者统一于同一坐标系统, 引进一个矩阵 β

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \end{pmatrix} \quad (4)$$

β 为 $p \times m$ 维矩阵, 其行数对应于吸振器的数目, 其列数对应于附加吸振器的自由度数, 其每列中对应于 x_j 的元素等于 1, 其余的元素为零。令

$$T^* = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_{j,l} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (5)$$

T^* 为一 $p \times p$ 阶对角阵, 其元素为吸振器之复刚度, 令 y 为一 p 维矢量, 其元素为吸振器之位移 $y_{j,l}$, 其顺序对应于 T^* 中之对角元素, 于是 (3) 式的 F 可写成

$$F = \beta^T T^* \{y - \beta X_j\} \quad (6)$$

X_j 是结构总位移矢量 X 中对应于附加吸振器的那一部分自由度的位移矢量, 它通过投影矩阵 P 与 X 相联系

$$X_j = PX \quad (7)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \dots \end{bmatrix} \quad (8)$$

P 为 $m \times N$ 阶矩阵^[1], 其每一行中只有第 j 个对应于附加吸振器的那个自由度的元素等于 1, 其余之元素均为零。

由 (6) 式可以看出 F 为一 m 维矢量, 将它前乘以 P^T 使之扩展为 N 维矢量, 于是可将 (2) 式写成

$$M\ddot{x} + KX + P^T \beta^T T^* \beta PX - P^T \beta^T T^* y = -M\{I\}\ddot{x}_0 \quad (9)$$

同时可以写出 p 个吸振器之运动方程

$$R\ddot{y} + T^* Y - T^* \beta PX = -R\{I\}\ddot{x}_0 \quad (10)$$

其中

$$R = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & R_{j,l} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \text{ 为 } p \times p \text{ 阶对角阵} \quad (11)$$

$R_{j,l}$ 为结构的第 j 个自由度上附加的第 l 个吸振器之质量。将 (9)、(10) 两式合并便得到组合结构之运动方程

$$\begin{bmatrix} M & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K + P^T \beta^T T^* \beta P & -P^T \beta^T T^* \\ -T^* \beta P & T^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} M\{1\} \\ R\{1\} \end{Bmatrix} \ddot{x}_0 \quad (12)$$

(12) 式中 T^* 是复数对角矩阵, 故它是一个 $(N + p)$ 阶的复数矩阵方程, 复杂结构之 N 阶次很高, 求复特征解很费时, 为此取结构之前 n 阶模态作为组合系统之雷次矢量, 令

$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{q}$ 代入(9)式, \mathbf{V} 为结构的前 n 阶特征矢量组成之矩阵, 再前乘以 \mathbf{V}^\top , 注意到

$$\mathbf{V}^\top \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (\mathbf{I} \text{ 为单位矩阵})$$

$$\mathbf{V}^\top \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_r^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \omega_r^2 \text{ 为结构第 } r \text{ 阶特征值}$$

则有

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{\Lambda} + \mathbf{V}^\top \mathbf{P}^\top \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{T}^* \boldsymbol{\beta} \mathbf{P} \mathbf{V}] \mathbf{q} - \mathbf{V}^\top \mathbf{P}^\top \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{T}^* \mathbf{Y} = -\mathbf{V}^\top \mathbf{M} \{ \mathbf{1} \} \ddot{x}_0 \quad (13)$$

$$\text{令 } \mathbf{P} \mathbf{V} = \mathbf{V}_1, \quad \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{T}^* = \mathbf{T}_1^*, \quad \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{T}^* \boldsymbol{\beta} = \mathbf{T}_2^*$$

则(12)式变为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{y}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} + \mathbf{V}_1^\top \mathbf{T}_2^* \mathbf{V}_1 & -\mathbf{V}_1^\top \mathbf{T}_1^* \\ -\mathbf{T}_1^{*\top} \mathbf{V}_1 & \mathbf{T}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{Y} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \mathbf{V}^\top \mathbf{M} \{ \mathbf{1} \} \\ \mathbf{R} \{ \mathbf{1} \} \end{Bmatrix} \ddot{x}_0 \quad (14)$$

通过上述的截尾模态变换, 方阵的阶次由 $(N+p)$ 降为 $(n+p)$, 通常 $n \ll N$, 故计算量将大大减小, 这一点在处理吸振器问题时更为显著, 因为悬臂结构振动响应中基频成分占主导地位, 因而只须保留前几阶模态即可得到足够精确的解答, 我们这里的结构离散化后有54个自由度即 $N=54$, 由SAP程序用子空间迭代法求出前十阶特征解, 分别取前六阶、三阶、二阶的特征矢量组成矩阵 \mathbf{V} 代入(14)式左端, 用 Q, R 与简模雅可比的复特征解程序^[2]计算出复特征值与复特征矢量, 结果表明 $n=6, 3, 2$ 时所得之复特征解几乎完全一致, 差别小于千分之一。

三、复响应函数

$$(14) \text{ 式为复数矩阵方程, 令 } \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} q \\ y \end{Bmatrix}$$

由复特征解程序可以求得(14)式左端齐次方程之复特征解

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Phi}^* \mathbf{Z} \quad (15)$$

$\boldsymbol{\Phi}^*$ 为复特征矢量矩阵。

将(15)式代入(14)式, 前乘以 $\boldsymbol{\Phi}^{*\top}$ 利用正交性并正则化, 则得到

$$\dot{\mathbf{Z}}_r(t) + \omega_r^2(1 + i\eta_r) \mathbf{Z}_r(t) = -\boldsymbol{\Phi}_r^{*\top} \left\{ \begin{Bmatrix} \mathbf{V}^\top \mathbf{M} \{ \mathbf{1} \} \\ \mathbf{R} \{ \mathbf{1} \} \end{Bmatrix} \right\} \ddot{x}_0 \quad (16)$$

$$r = 1, 2, \dots, n$$

$\boldsymbol{\Phi}_r^{*\top}$ 为 $\boldsymbol{\Phi}^{*\top}$ 中之第 r 行

令

$$\boldsymbol{\Phi}_r^{*\top} \left\{ \begin{Bmatrix} \mathbf{V}^\top \mathbf{M} \{ \mathbf{1} \} \\ \mathbf{R} \{ \mathbf{1} \} \end{Bmatrix} \right\} \ddot{x}_0 = \bar{P}_r(t) = D_r^* \ddot{x}_0 \quad (17)$$

对(16)式进行福氏变换可得

$$\bar{Z}_r(\omega) = \bar{H}_r(\omega) \bar{P}_r(\omega) \quad (18)$$

这里

$$\bar{Z}_r(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Z_r(t) e^{-i\omega t} dt \quad (19)$$

$$\bar{P}_r(\omega) = D_r^* \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x}_0(t) e^{-i\omega t} dt = D_r^* \ddot{x}_0(\omega) \quad (20)$$

$$\bar{H}_r(\omega) = \frac{1}{\omega_r^2(1 + i\eta_r) - \omega^2} \quad (21)$$

$\bar{H}_r(\omega)$ 之分母有两个根 $\omega_{1,2} = \pm \omega_r + (1 + i\eta_r)^{1/2}$ 其中 $-\omega_r(1 + i\eta_r)^{1/2}$ 位于复平面实数轴之下面, 故 $\bar{H}_r(\omega)$ 在其频率域是不稳定的, 为此采用文献[3]的建议用一对共轭值之和代表真实解, 即令

$$\bar{Z}_r(\omega) = \bar{H}_r(\omega) \bar{P}_r(\omega)|_{\omega > 0} + \hat{H}_r(\omega) \hat{P}_r(\omega)|_{\omega < 0} \quad (22)$$

这里 $\bar{H}_r(\omega)$, $\bar{P}_r(\omega)$ 分别取自 (21)、(20) 式, $\hat{H}_r(\omega)$, $\hat{P}_r(\omega)$ 分别为它们的共轭值。

将 (15) 式中 Φ^* 阵分割为对应于 $\left\{ \begin{matrix} q \\ y \end{matrix} \right\}$ 两部分即

$$\begin{bmatrix} \Phi_1^* \\ \Phi_2^* \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} q \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{则} \quad \{q\} = \Phi_1^* Z \quad (23)$$

于是结构之位移矢量为

$$\bar{X}(\omega) = V(\Phi_1^* \bar{Z}(\omega)|_{\omega > 0} + \Phi_1^* \hat{Z}(\omega)|_{\omega < 0}) \quad (24)$$

四、随机振动响应

悬臂结构在基础作随机振动时其根部之弯矩的福氏变换为

$$\begin{aligned} \bar{M}(\omega) &= \{h\}^T M \Delta V \bar{X}(\omega) \\ &= \sum_r \omega_r^2 \{h\}^T M V_r \left(\sum_m \bar{\phi}_{1r,m}^* \bar{Z}_m \Big|_{\omega > 0} + \sum_m \hat{\phi}_{1r,m}^* \hat{Z}_m \Big|_{\omega < 0} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

这里 $\{h\}^T$ 为结构离散化后各节点距根部高度组成之矢量转置, V_r 为 V 阵中之第 r 列矢量, $\phi_{1r,m}^*$ 为 Φ_1^* 阵中第 r 行第 m 列之元素。

$$\text{令} \quad \omega_r^2 \{h\}^T M V_r = c_r \quad (26)$$

$$\sum_r c_r \bar{\phi}_{1r,m}^* = \bar{B}_m^*, \quad \sum_r c_r \hat{\phi}_{1r,m}^* = \hat{B}_m^* \quad (27)$$

$$\text{则} \quad \bar{M}(\omega) = \sum_m (\bar{B}_m^* \bar{Z}_m(\omega)|_{\omega > 0} + \hat{B}_m^* \hat{Z}_m(\omega)|_{\omega < 0}) \quad (28)$$

其共轭为

$$\bar{M}(\omega) = \sum_m (\hat{B}_m^* \hat{Z}_m(\omega)|_{\omega > 0} + \bar{B}_m^* \bar{Z}_m(\omega)|_{\omega < 0}) \quad (29)$$

结构根部弯矩的谱密度为

$$\begin{aligned} S_{\mu\mu}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{T} \overline{\bar{M} \hat{M}} \right) = \sum_n \sum_m (\bar{B}_n^* \hat{B}_m^* \bar{D}_n^* \hat{D}_m^* \bar{H}_n \hat{H}_m |_{\omega > 0} \\ &\quad + \hat{B}_n^* \bar{B}_m^* \hat{D}_n^* \bar{D}_m^* \hat{H}_n \bar{H}_m |_{\omega < 0}) S_{\dot{x}_0; \dot{x}_0}(\omega) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{令} \quad \bar{B}_n^* \hat{B}_m^* \bar{D}_n^* \hat{D}_m^* = A_{m,n} + i B_{m,n} \quad (31)$$

$$\text{则} \quad \hat{B}_n^* \bar{B}_m^* \hat{D}_n^* \bar{D}_m^* = A_{m,n} - i B_{m,n} \quad (32)$$

代入 (30) 式并对 ω 由 $-\infty$ 至 $+\infty$ 进行积分, 则得到根部弯矩的均方值为

$$\begin{aligned}\sigma_{\ddot{x}}^2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{x}}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_m \sum_n \left[\frac{A_{m,n} + iB_{m,n}}{[\omega_n^2(1 - i\eta_n) - \omega^2][\omega_m^2(1 + i\eta_m) - \omega^2]} \Big|_{\omega > 0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_{m,n} - iB_{m,n}}{[\omega_n^2(1 + i\eta_n) - \omega^2][\omega_m^2(1 - i\eta_m) - \omega^2]} \Big|_{\omega < 0} \right] S_{\ddot{x}_0\ddot{x}_0}(\omega) d\omega\end{aligned}\quad (33)$$

如 $S_{\ddot{x}_0\ddot{x}_0}(\omega)$ 在所感兴趣的频带内缓慢变化, 可以用白噪声谱 S 近似, 则

$$\sigma_{\ddot{x}}^2(t) \approx i \sum \sum \left[\frac{(B_{m,n}a_m - A_{m,n}b_m)(\omega_m^2 - \omega_n^2) - (\omega_m^2\eta_m + \omega_n^2\eta_n)(A_{m,n}a_m + B_{m,n}b_m)}{2\omega_m(a_m^2 + b_m^2)[\omega_m^4(1 + \eta_m^2) + \omega_n^4(1 + \eta_n^2) - 2\omega_m^2\omega_n^2(1 - \eta_m\eta_n)]} \right] S \quad (34)$$

其中

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \eta_m^2} + 1}$$

$$b_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \eta_m^2} - 1}$$

当 ω_m, ω_n 分离较远, 而 $\eta_m \approx \eta_n < 0.1$ 时 m 与 n 之耦联项可以忽略不计, 导致文献〔4〕中 (2.130) 式的近似表达式为

$$\sigma_{\ddot{x}}^2(t) = \sum_m \frac{A_{m,n} S}{4\eta_m \omega_m^3} \quad (35)$$

五、应 用

由 (21), (35) 式可以看出无论是简谐激振还是随机激振, 响应函数与响应的均方值均与模态阻尼成反比, 当然还和振型参数有关, 基本上是平均应力与振型的二次方成正比, 调整吸振器的重量、位置与参数都能改变系统之复特征解, 也就能改变响应值。我们这里因为结构上的限制, 吸振器的重量与位置都已限定, 只能改变它们的刚度与阻尼参数, 因为悬臂结构的基频有两个主弯曲方向的振动, 所以将吸振器分为两组, 每组三个吸振器对应一个主弯曲方向, 其刚度与阻尼可以各不相同, 在刚度系数 $k_{j,t}$ 由 0.8~3.0 公斤/厘米, 阻尼系数 β 由 0.05~1.0 范围内, 对各种复刚度组合进行了大量的数值计算, 发现当三个吸振器的刚度分别为 1.5、2.0、2.5 公斤/厘米, 阻尼系数均为 0.2 时吸振效果最佳。现将此最优状态的频响曲线与另一组刚度系数完全相同但阻尼系数 β 为 1.0 时的频响曲线比较如图 2。

值得一提的是本结构按等效单自由度体系计算时, 最优刚度系数为 1.64~1.66 公斤/厘米, 最优阻尼系数为 0.19, 由于附加了六个吸振器以降低两个主弯曲方向的振动, 单自由度体系的计算公式不再适用了, 但计算结果表明阻尼值仍以 0.2 左右合适, 图 2 说明阻尼值过大其效果反而降低。当吸振器的频率低于结构基频时, 吸振器在结构谐振时起耗能作用, 文献〔5〕曾用它解决 SMS 飞行器的振动问题, 此时吸振器的阻尼要大, 但其效果不如本文的多维吸振器。因为这里当结构频率稍有变化时, 总有一个吸振器起调谐作用, 计算与实验结果均表明, 当结构频率与吸振器频率有 30% 变化, 吸振效果仍然可达 50%。

本文的随机试验与正弦扫频试验是李延萍、王丹峰同志完成的, 基频的分解由笔者自

已完成的，计算工作是与李盛章、刘大康同志共同完成的。

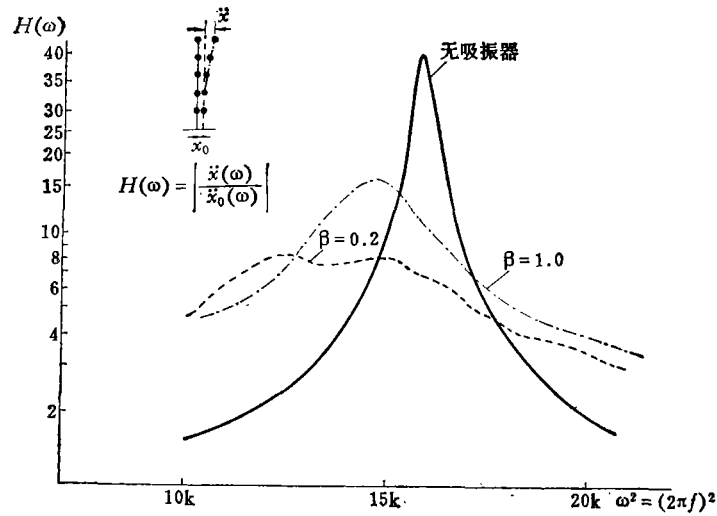


图 2 具有不同参数吸振器的结构频响曲线

Fig. 2 The frequency response curves of a structure with absorbers having different parameters

参 考 文 献

- [1] Hans, P. Geering, "New Methods in Substructuring" AIAA/ASME/ASCE/AHS, 21st S. S. D. M. Conf. 1980. pp. 801.
- [2] 田千里、刘大康 "振动控制的若干问题" 强度与环境 1980年第3期 pp. 16~23.
- [3] Y. Tsushima, et. al., "Analysis of Equations of Motion with Complex Stiffness Mode Superposition Method Applied to System with Many D. O. F." Nuclear Engng and Design Vol. 37, No. 1. pp. 47, 1976.
- [4] G. B. Warburton, The Dynamical Behaviour of Structures, Pergamon Press, pp. 102, 1976.
- [5] G. K. Hobbs, D. J. Kuyper, and J. J. Brooks, "Response Analysis of A System with Discrete Dampers," Shock and Vibration Bull. No. 46. Part 4, pp. 137, 1976.

APPLICATION OF MULTIPLE DYNAMIC ABSORBERS TO REDUCING THE VIBRATION LEVEL OF A COMPLEX CANTILEVER STRUCTURE

Tian Qianli

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

Abstract

In a complex cantilever structure there are some closed resonance peaks in the vicinity of 20Hz, causing a serious bending moment at its root. The application of multiple dynamic absorbers to reducing its vibration level is proposed in this paper. Six absorbers are hung on a given section of the structure to overcome the drawback of the usual tuned absorbers, i. e. excessive sensitivity to the tuning parameters. They can vibrate in all directions following the structure, but their stiffness and damping parameters of these absorbers are different from each other, so that their frequency range is made wide enough to cover the resonance frequencies.

In search of the conditions for minimizing the bending stress of the structure and for the sake of studying the effects of the parameters on the dynamic response, a great number of response curves at the top of the structure, bearing the harmonic excitation from the base movement, are calculated as the parameters of these absorbers vary in a considerable range. Since the damping of the structure is very small and that of absorbers are large enough, so it is a dynamic analysis problem with non-proportional damping. This problem has been solved by a complex eigen-solution method and a modal synthesis method in the present paper.