# 非完全阻尼力学系统的渐近稳定性

北京航空学院　高为炳

**摘　　要**

本文研究了非完全阻尼（部分阻尼）情况下力学系统的渐近稳定性问题。建立了陀螺系统和陀螺系统的渐近稳定性的充分必要条件。在研究中将系统进行了分解，因之结果比较简单且有助于分析一些力学现象。

## 一、引　　言

力学系统的稳定性问题是一个古老问题。近些年来在航空及航天飞行器以及其他技术中，出现的一些力学系统问题，重新引起了研究者的注意，这方面的工作可参见文献〔1～7〕。

设力学系统的广义坐标向量为 $x^T=[x_1, \cdots, x_n]$，则力学系统的线性化运动微分方程：

$$M\ddot{x}+D\dot{x}+G\dot{x}+Kx=0 \tag{1-1}$$

是一个二阶线性矩阵微分方程。其中$M$表示惯性阵，一般是正定的：$M=M^T>0$；$D$表示阻尼阵，一般是半正定的：$D=D^T\geqslant 0$；$G$表示陀螺力阵，是斜对称的$G=-G^T$；$K$表示刚度阵，是一对称阵：$K=K^T$。若非每一广义阻尼力都不等于零且 $detD\neq 0$，则称系统受到非完全阻尼，或称系统是部分阻尼的。

在文献〔3〕中将经典的 Kelvin，Tait 和Четаев 定理归总称之为 K-T-C 定理：系统(1-1) 的稳定性等价于保守力学系统

$$M\ddot{x}+Kx=0 \tag{1-2}$$

的稳定性。

当$K>0$（正定）而$D\geqslant 0$（半正定）时，Zajac 提出若此时系统（1-1）渐近稳定，则称阻尼为“充分阻尼”。文献〔4、5〕对这一情况进行了研究。对非陀螺系统

$$M\ddot{x}+D\dot{x}+Kx=0 \tag{1-3}$$

其中$M>0$，$D\geqslant 0$，$K>0$，文献〔6〕给出了渐近稳定判据（即充分阻尼条件）：

$$\text{秩}\begin{bmatrix} D \\ D(M^{-1}K) \\ \cdots \\ D(M^{-1}K)^{n-1} \end{bmatrix}=n \tag{1-4}$$

而文献〔7〕对更一般的力学系统（1-1）在化为一阶系统后证明了渐近稳定判据：

1981年4月收到。

$$\text{秩}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{2n-1} \end{bmatrix}=2n,\qquad A\triangleq\begin{bmatrix} O & I_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}G \end{bmatrix},\ C\triangleq[O\ \ D] \tag{1-5}$$

本文的结果（2-10）及（3-1）比（1-5）及（1-4）有所简化。

## 二、渐近稳定性判据

研究力学系统（1-1），其中 $n\times n$ 阵 $M>0$，$K>0$，$G=-G^T$，阻尼阵可表为：

$$D=\begin{bmatrix} D_0 & O \\ O & O \end{bmatrix},\ \det D_0\neq 0,\ D_0\in\mathscr{R}^{r\times r},\quad r<n \tag{2-1}$$

将（1-1）式写成一阶形式，有：

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-M^{-1}Dy-M^{-1}Gy-M^{-1}Kx \tag{2-2}$$

引入与（2-1）相对应的分块阵：

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ x_1\in\mathscr{R}^r,\ x_2\in\mathscr{R}^{n-r},\ y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},\ y_1\in\mathscr{R}^r,\ y_2\in\mathscr{R}^{n-r},$$

$$M^{-1}D=\begin{bmatrix} D_1 & O \\ D_2 & O \end{bmatrix},\ M^{-1}=\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix} G_{10} & G_{20} \\ G_{30} & G_{40} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}G=\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix},\ M^{-1}K=\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix} K_{10} & K_{20} \\ K_{30} & K_{40} \end{bmatrix} \tag{2-3}$$

则可将（2-2）式加以分解，得两个子系统：

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1=y_1,\ \dot{y}_1=-D_1y_1-G_1y_1-G_2y_2-K_1x_1-K_2x_2 \\ &\dot{x}_2=y_2,\ \dot{y}_2=-D_2y_1-G_3y_1-G_4y_2-K_3x_1-K_4x_2 \end{aligned} \tag{2-4}$$

对系统（2-2）构造李亚普诺夫函数

$$v=\frac{1}{2}\,y^TMy+\frac{1}{2}x^TKx$$

它显然是正定的，求 $v$ 沿（2-2）的解的导数，得：

$$\dot{v}=-y^TDy=-y_1^TD_0y_1 \tag{2-5}$$

它仅仅是半负定的。为了证明（2-2）或（2-4）渐近稳定并寻求渐近稳定判据，采用LaSall定理[9]。为此要求满足

$$\dot{v}\equiv 0\qquad \text{即}\qquad D_0y_1\equiv 0 \tag{2-6}$$

的（2-4）式的解只有平衡状态，$x_1=0$，$x_2=0$，$y_1=0$，$y_2=0$。条件（2-6）给出：$y_1=0$ 这样（2-4）式化为：

$$\begin{aligned} &y_1=0,\ x_1=A,\ G_2y_2+K_2x_2=-K_1A \\ &\dot{x}_2=y_2,\ \dot{y}_2=-G_4y_2-K_3A-K_4x_2 \end{aligned} \tag{2-7}$$

其中 $A$ 是常向量——积分常数。式（2-7）又可表为：

$$[K_2\ \ G_2]\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=-K_1A \tag{2-8a}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_2\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O & I\\ -K_4 & -G_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}O\\ K_3\end{bmatrix}A=L\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}-l \tag{2-8b}$$

$$L\triangleq\begin{bmatrix}O & I\\ -K_4 & -G_4\end{bmatrix},\quad l=\begin{bmatrix}O\\ K_3\end{bmatrix}A \tag{2-8c}$$

将（2-8a）式对 $t$ 求导得：

$$[K_2\ \ G_2]\begin{bmatrix}\dot{x}_2\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}=0 \tag{2-9a}$$

代入（2-8b）式有

$$[K_2\ \ G_2]L\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}=[K_2\ \ G_2]\,l$$

再对 $t$ 求导，得到

$$[K_2G_2]L\begin{bmatrix}\dot{x}_2\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}=0 \tag{2-9b}$$

继续下去，得

$$[K_2\ \ G_2]L^k\begin{bmatrix}\dot{x}_2\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}=0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{2-9c}$$

阵 $L$ 是 $2(n-r)\times 2(n-r)$ 维的。按 Hamilton-Cayley 定理[10]，至少 $L^{2(n-r)}$ 将是 $I$，$L$，$\cdots L^{2(n-r)-1}$ 的线性组合，因之（2-9c）式中最多有 $2(n-r)$ 个是独立的。当

$$\text{秩}\,S=2(n-r),\quad S\triangleq\begin{bmatrix}[K_2\ \ G_2]\\ [K_2\ \ G_2]L\\ \cdots\\ [K_2\ \ G_2]L^{2(n-r)-1}\end{bmatrix} \tag{2-10}$$

时，（2-9）式只有零解：$\dot{x}_2=0$，$\dot{y}=0$，即

$$y_2=0,\quad x_2=B \tag{2-11}$$

其中 $B$ 也是常向量。这时方程（2-7）化为

$$K_1A+K_2B=0,\quad K_3A+K_4B=0$$

由于上方程组的系数阵即 $K$ 满秩，因之 $A=0$，$B=0$。这正表明系统在条件（2-10）下只有零解，从而证明了式（2-10）是系统渐近稳定的充分条件。

现证条件（2-10）也是必要的。设系统渐近稳定但（2-10）式不成立。这时必存在向量 $C^*$ 满足

$$C^*\in KerS,\quad C^*\neq 0 \tag{2-12}$$

即 $C^*$ 满足

$$[K_2\ \ G_2]L^kC^*=0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\cdots \tag{2-13}$$

微分方程（2-7）的解具有形式

$$\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}=\exp(Lt)C+L^{-1}l \tag{2-14}$$

因为 $L$ 满秩，$L^{-1}$ 存在。按文献[11]有

$$\exp(Lt)=\sum_{k=0}^{2(n-r)-1}\alpha_k(t)L^k$$

其中 $\alpha_k(t)$ 是 $t$ 的函数。以 $\alpha_k(t)$ 乘（2-13）诸式然后相加，得

$$[K_2\ \ G_2]\Sigma\alpha_k(t)L^kC^*=[K_2\ \ G_2]\exp(Lt)C^*=0 \tag{2-15}$$

取积分常数 $C=C^*$，将（2-14）式代入（2-15）式则得：

$$[K_2\ \ G_2]\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=[K_2\ \ G_2]L^{-1}l$$

再代入式（2-8a）与（2-8c），并考虑到

$$L^{-1}=\begin{bmatrix}-K_4^{-1}G_4 & -K_4^{-1}\\ I & 0\end{bmatrix}$$

可导出

$$K_1A=G_2K_4^{-1}K_3A$$

因 $K_1$ 满秩，且右端不等于 $K_1A$，故必然有

$$A=0,\quad l=0,$$

$$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\exp(Lt)\,C^*,\quad \begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=0 \tag{2-16}$$

这表明在条件（2-6）下，（2-7）式或（2-8）式有非零解（2-16），而与假设矛盾，必要性得证。

部分阻尼系统的渐近稳定的充要条件。设系统

$$M\ddot{x}+D\dot{x}+G\dot{x}+Kx=0$$

其中 $M>0$，$-G=G^T$，$K>0$，$D=\begin{bmatrix}D_0 & O\\ O & O\end{bmatrix}$，$D_0>0$，$r\times r$ 阵 $D_0$ 之秩等于 $r$，其平衡状态渐近稳定的充要条件为（2-10）：

$$\text{秩}\,S=2(n-r)$$

注 1．阵 $S$ 共有 $2(n-r)$ 列而文献[7]中阵（1-6）有 $2n$ 列，秩的判定得到简化，尤其是当 $r$ 接近 $n$ 时更为显著。

注 2．阵 $S$ 是通过系统（1-1）的各系数阵的分块阵表示的，因之易于分析各阵块对稳定性的影响。

注 3．直观上，加在由 $x_1$ 表示的子系统的完全阻尼 $D_0$，必然导致 $x_1(t)\to 0$，而只有当条件（2-10）成立时，即存在某些陀螺力耦合及刚度耦合时，才能使 $x_2$ 也渐近稳定。条件（2-10）也正是充分阻尼条件。

注 4．通过坐标系的选择使 $M$ 成为对角阵，将使判据简化。

## 三、部分陀螺系统及非陀螺系统

1．非陀螺系统，$G=0$ 情况。这时系统方程为：

$$M\ddot{x}+D\dot{x}+Kx=0 \tag{1-3}$$

考虑到$G=0$，条件（2-10）可以简化，由

$$L=\begin{bmatrix} O & I \\ -K_4 & O \end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix} [K_2\ O] \\ [O\ K_2] \\ -[K_2K_4\ O] \\ -[O\ K_2K_4] \\ \cdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_0 & O \\ O & S_0 \end{bmatrix},\quad S_0 \triangleq \begin{bmatrix} K_2 \\ K_2K_4 \\ K_2K_4^2 \\ \cdots \\ K_2K_4^{n-r-1} \end{bmatrix}$$

其中省略了某些正负号（这不影响秩的判定），得等价条件

$$\text{秩}\, S_0=n-r \tag{3-1}$$

注1．条件（3-1）比文献〔6〕中的条件（1-4）有较大的简化，这和二节中的情况类似。

注2．还可以从条件（1-4）直接导出条件（3-1）来。由式（2-1）及（2-3），记：

$$D=\begin{bmatrix} D_0 & O \\ O & O \end{bmatrix},\quad D(M^{-1}K)=\begin{bmatrix} L_1^1 & L_2^1 \\ O & O \end{bmatrix},\quad L_1^1 \triangleq D_0K_1,\quad L_2^1 \triangleq D_0K_2$$

$$D(M^{-1}K)^2=\begin{bmatrix} L_1^2 & L_2^2 \\ O & O \end{bmatrix},\quad L_1^2 \triangleq L_1^1K_1+L_2^1K_3,\quad L_2^2 \triangleq L_1^1K_2+L_2^1K_4$$

$$\cdots$$

$$D(M^{-1}K)^{n-1}=\begin{bmatrix} L_1^{n-1} & L_2^{n-1} \\ O & O \end{bmatrix},\quad L_1^{n-1} \triangleq L_1^{n-2}K_1+L_2^{n-2}K_3,\quad L_2^{n-1} \triangleq L_1^{n-2}K_2+L_2^{n-2}K_4$$

有以下等价关系：

$$\text{秩}\, S=\text{秩}\begin{bmatrix} D_0 & O \\ O & O \\ \hline L_1^1 & L_2^1 \\ O & O \\ \hline \vdots & \\ \hline L_1^{n-1} & L_2^{n-1} \\ O & O \end{bmatrix}=\text{秩}\begin{bmatrix} D_0 & O \\ L_1^1 & L_2^1 \\ \cdots & \\ L_1^{n-1} & L_2^{n-1} \end{bmatrix}=\text{秩}\begin{bmatrix} D_0 & O \\ O & L_2^1 \\ \cdots & \\ O & L_2^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$=r+\text{秩}\begin{bmatrix} L_2^1 \\ L_2^2 \\ \vdots \\ L_2^{n-1} \end{bmatrix}=r+\text{秩}\begin{bmatrix} D_0K_2 \\ L_2^1K_4 \\ \vdots \\ L_2^{n-2}K_4 \end{bmatrix}=r+\text{秩}\begin{bmatrix} D_0K_2 \\ D_0K_2K_4 \\ \cdots \\ D_0K_2K_4^{n-1} \end{bmatrix}=r+\text{秩}S_0$$

上式中的第3、5、6个等式是通过多次行块变换得到的，最末等式变换冗长，过程从略，这样证明了："秩$S=n$"等价于"秩$S_0=n-r$"。

注3．按耗散性可将力学系统进行如下分类：

Ⅰ．完全阻尼，$D>0$：系统渐近稳定。

Ⅱ．非完全阻尼，$D\geqslant 0$：

（1）充分阻尼，秩$S_0=n-r$：系统渐近稳定。

（2）非充分阻尼，秩$S_0<n-r$：系统稳定但非渐近稳定。

2．部分陀螺系统：$D=\begin{bmatrix} D_0 & O \\ O & O \end{bmatrix}$，$G=\begin{bmatrix} G_0 & O \\ O & O \end{bmatrix}$，方阵$G_0$的维数等于$D_0$的维数。

在本情况中，$M^{-1}G=\begin{bmatrix} G_1 & O \\ G_3 & O \end{bmatrix}$，条件（2-10）也化为（3-1），$G_0$ 对稳定性不产生作用。这是可期待的，因为 $x_1$ 表示的子系统是完全阻尼的。

3．部分陀螺系统：$G=\begin{bmatrix} O & O \\ O & G_0 \end{bmatrix}$，$M^{-1}G=\begin{bmatrix} O & G_2 \\ O & G_4 \end{bmatrix}$。在本情况中，由于惯性耦合，加在 $x_2$ 表示的子系统的陀螺力将对整个系统产生作用，它影响到阵 $S$ 的秩，即影响充分阻尼条件。但当惯性耦合不存在时，$M_2=M_3^T=0$，则条件（2-10）化为条件（3-1），证明从略。

4．陀螺耦合系统：$G=\begin{bmatrix} O & G_0 \\ -G_0^T & O \end{bmatrix}$，$M^{-1}G=\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix}$。

这时一般地说，陀螺力的耦合大大影响到阻尼的充分性，而且即便惯性无耦合，由

$$\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_1^{-1} & O \\ O & M_4^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & G_0 \\ -G_0^T & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} O & M_1^{-1}G_0 \\ -M_4^{-1}G_0^T & O \end{bmatrix}$$

可得出

$$G_1=0,\quad G_4=0,\quad G_2=M_1^{-1}G_0,\quad G_3=-M_4^{-1}G_0^T$$

可见 $G_0$ 耦合对系统的阻尼的充分性是有影响的。它可以使系统的部分阻尼变为充分的，从而使系统渐近稳定。

## 四、例　　子

1．考虑图1所示的力学系统。

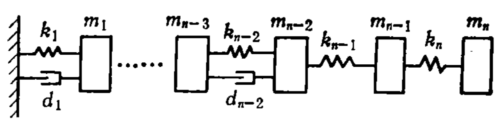


图1　充分阻尼力学系统

Fig. 1　Mechanical system with pervasive damping

系统方程为：

$$M\ddot{x}+D\dot{x}+Kx=0$$

$M=\mathrm{diag}[m_1,\ \cdots,\ m_n]$

$$K=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & & O \\ -k_2 & k_2+k_3 & \ddots & \\ & \ddots & k_{n-1}+k_n & -k_n \\ O & & -k_n & k_n \end{bmatrix},\quad D=\left[\begin{array}{cccc|cc} d_1+d_2 & -d_2 & & O & & \\ -d_2 & d_2+d_3 & \ddots & & & O \\ & \ddots & \ddots & -d_{n-2} & & \\ O & & -d_{n-2} & d_{n-2} & & \\ \hline & & & & O & O \\ & O & & & O & O \end{array}\right]$$

按定义，有：

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} = M^{-1}K,\quad K_2 = \begin{bmatrix} O & O \\ \vdots & \vdots \\ O & O \\ -\dfrac{k_{n-2}}{m_{n-2}} & O \end{bmatrix},\quad K_4 = \begin{bmatrix} \dfrac{k_{n-1}+k_n}{m_{n-1}} & -\dfrac{k_n}{m_{n-1}} \\ -\dfrac{k_n}{m_n} & \dfrac{k_n}{m_n} \end{bmatrix}$$

由于

$$\text{秩} S_0 = \text{秩} \begin{bmatrix} K_2 \\ K_2K_4 \\ \cdots \end{bmatrix} = \text{秩} \begin{bmatrix} -\dfrac{k_{n-2}}{m_{n-2}} & O \\ \times & \dfrac{k_{n-2}k_n}{m_{n-2}m_{n-1}} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = 2$$

可知系统渐近稳定，阻尼是充分的，结论的物理现象是显然的。

2．考虑图 2 所示的力学系统。

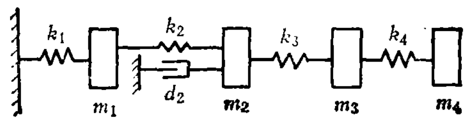


图2　非充分阻尼力学系统

Fig. 2　Mechanical system with nonpervasive damping

系统方程为：

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = 0$$

$$M = \mathrm{diag}(m_1 \cdots m_4),\quad D = \mathrm{diag}(O\ d_2\ O\ O),\quad K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_3 & O & O \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & O \\ O & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ O & O & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

改变坐标 $x_1$ 与 $x_2$ 的次序，系数阵分别化为：

$$M = \mathrm{diag}(m_2\ m_1\ m_3\ m_4),\quad D = \mathrm{diag}(d_2\ O\ O\ O),\quad K = \begin{bmatrix} k_2+k_3 & -k_2 & -k_3 & O \\ -k_2 & k_1+k_2 & O & O \\ -k_3 & O & k_3+k_4 & -k_4 \\ O & O & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

计算给出：

$$M^{-1}K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix},\quad K_4 = \begin{bmatrix} \dfrac{k_1+k_2}{m_1} & O & O \\ O & \dfrac{k_3+k_4}{m_3} & -\dfrac{k_4}{m_3} \\ O & -\dfrac{k_4}{m_4} & \dfrac{k_4}{m_4} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{k_3}{m_2} & O \end{bmatrix},$$

$$
秩\, S_0 = 秩 \begin{pmatrix}
-\dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_3}{m_2} & O \\
-\dfrac{k_1+k_2}{m_1}\,\dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_3}{m_2}\,\dfrac{k_3+k_4}{m_3} & \dfrac{k_3}{m_2}\,\dfrac{k_4}{m_3} \\
-\left(\dfrac{k_1+k_2}{m_1}\right)^2\dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_3}{m_2}\left(\dfrac{k_3+k_4}{m_3}\right)^2 - \dfrac{k_3k_4^2}{n_2m_3m_4} & \dfrac{k_3k_4}{m_2m_3}\,\dfrac{k_3+k_4}{m_3} + \dfrac{k_3k_4^2}{m_2m_3m_4} \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{pmatrix}
$$

若 $k_1=k_2=k_3=k$，$m_1=m_2=m_3=m_4=m$，则 $S$ 降秩条件为 $k=\frac{3}{2}k_4$。这时非完全阻尼是非充分的，可能出现运动：$m_2$ 不动，$m_1$ 的运动和 $m_3$ 及 $m_4$ 的运动是反向的谐振动。

## 五、结　论

与古典力学系统不同，那里主要研究保守系统，而近代力学系统中常常引用人工阻尼器，作为镇定的手段。引用较少数目的阻尼器以保证系统的渐近稳定性问题有一定的参考意义。在分析部分阻尼的力学系统时，将系统的系数阵分块，可建立维数低的秩判据，也便于分析系统的力学特征。

### 参 考 文 献

〔1〕 Ziegler H., Linear Elastic Stability, ZAMM, 4, 89-121, 168-185, 1953.
〔2〕 Debra D. D., Delp R. H., Rigid body stability and Natural Frequencies in Circular Orbit, J. Astrnaut. Sci., 8, 14-17, 1961.
〔3〕 Zajak E. E., The Kelvin-Tait-Chetaev Theorem and Extensions, J. of Aeronaut. Sci., 11, 46-49, 1964.
〔4〕 Roberson R. E., Notes on the Thompson-Tait-Chetaev Stability Theorem, J. of Astronaut. Sci., 15, 319-322, 1968.
〔5〕 Conell G. M., Asymptotic Stability of Second Order Linear Systems with Semidefinite Damping, AIAA. J., 7, 1185-1187, 1969.
〔6〕 Walker J. A., Schmitendorf W. E., A Simple Test for Asymptotic Stability in Partially Dissipative Symmetric Systems, Trans. of ASME, J. of Apll. Mech., 40, 1120-1121, 1973.
〔7〕 Hughes P. C., Gardner L. T., Asymptotic Stability of Linear Stationary Mechanical Systems, 同上, 42, 1975。
〔8〕 Fawzy I., A Simplified Stability Criterion for Nonconservative Systems, 同上, 46, 423-426, 1979。
〔9〕 LaSalle J., Lefchetz S., Stability by Lyapunov's Direct Method, Academic Press, New York, 1961.
〔10〕 Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, Гостехиздат, 1954.
〔11〕 Fortmann T. E., Hitz K. L., An Introduction to Linear Control Systems, Marcel Dekker, 1977.

# ASYMPTOTIC STABILITY OF PARTIALLY DAMPED MECHANICAL SYSTEMS

*Gao Weibin*

*(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)*

Abstract

In this paper the asymptotic stability of the partially damped linear mechanical system with gyroscopic forces is studied. The equation of motion for the system is a second order linear matrix differential equation. The stiffness matrix is assumed to be positive definite representing the conservative forces and then Lyapunov's second method is employed. By splitting the system matrices in block matrices the condition of asymptotic stability (e. g, the condition of pervasiveness) can be expressed as a rank condition of certain matrix with dimension lower than that of the system. Several cases with different gyroscopic coupling are discussed. The stability condition is not only simpler than that obtained by former authors, but also gives some insight to the mechanical properties of the system since it may be considered as two coupled subsystems then.