飞行控制系统中最优事前更换策略的研究

北京航空学院　焦国全　中国科学院应用数学所　董泽清

摘　要

为了最大限度地有效地利用现有资源，并尽可能地提高余度飞行控制系统的可靠性，对单点故障单元在发生故障前的某一时刻 t_0,采取事前更换或预防性维修，这是一个十分值得研究的问题。

本文对单点故障单元无故障工作时间分布服从$K(\geqslant 2)$阶爱尔朗分布的情况进行了研究（爱尔朗分布在很多实际问题中具有广泛的适应性），并求出了使连续折扣总期望费用、长期每单位时间平均期望费用达最小的最优事前更换时间 t_0^* 所满足的方程。这比一般情形的结果简单，易于作数值计算。若利用爱尔朗分布表与指数函数表，用本文的结果作近似数值计算，手算也是可行的。在文章末尾，对$K=2$的情形，通过一个实例进行了数值计算。

一、引　言

余度飞行控制系统可以使现代飞机即使出现两个或两个以上的故障情况下，驾驶员仍能继续驾驶飞机，使之安全返回机场，这是令人可喜的。然而，在实际中，出于某些条件的限制，如位置、空间、重量、费用、加工等，使系统中某些元部件（如舵机助力器、迎角传感器等）不宜采用余度技术。这些不能采用余度技术的元部件即所谓系统中的单点故障单元。它们对故障不具有容忍性，一旦出现突发性或由于性能恶化的任何一种形式的故障，将导致机毁人亡的严重后果。它们对系统的安全可靠性指标（失效概率）起决定性作用，整个余度飞行控制系统的可靠性，无论采用多少余度数，都不能超越单点故障单元的可靠性水平。研究如何提高和改善单点故障单元的可靠性，是一个很重要的问题。在故障未发生前的某一时刻 t_0，对这些元部件进行事前更换，是解决上述问题的一个好办法。以达到最大限度地、有效地利用现有资源的目的。

二、余度飞行控制系统的基本思想

余度飞行控制系统可以显著地提高现代飞机的安全可靠性，使飞机的各项性能得到充分的发挥。

余度飞行控制系统建立的基本思想，是采用那些从执行指令角度看来不需要，但从提

1982年11月收到。

高可靠性却又是不可缺少的，用多余元部件组成多重系统，它是通过消耗更多的资源来换取可靠性的提高。用可靠性一般的元部件，建立一个高可靠性的系统。

目前，组成系统的元部件，其可靠性不可能达到人们所期望的要求，这样，采用余度方法来提高系统的可靠性几乎成了唯一有效的手段。

三、余度飞行控制系统的可靠性结构图（某型飞机）

1．余度飞行控制系统纵向可靠性结构图

从图1可以看出，这是一个能源具有两余度，其余元部件具有三余度，助力器为单点故障单元的结构。

2．余度飞行控制系统的基本工作原理

1）单套情况的简单方块图

为说明其基本工作原理，这里只绘出单套情况，实际余度飞行控制系统是采用多套并增设余度管理部分。

2）基本工作原理简述

实质上是一种伺服系统，即驾驶杆——传感器——计算机——伺服控制机构——飞机姿态——运动参数（法向加速度、角速度等）反馈。它是利用反馈技术使飞机按控制参数而运动的主飞行控制系统。

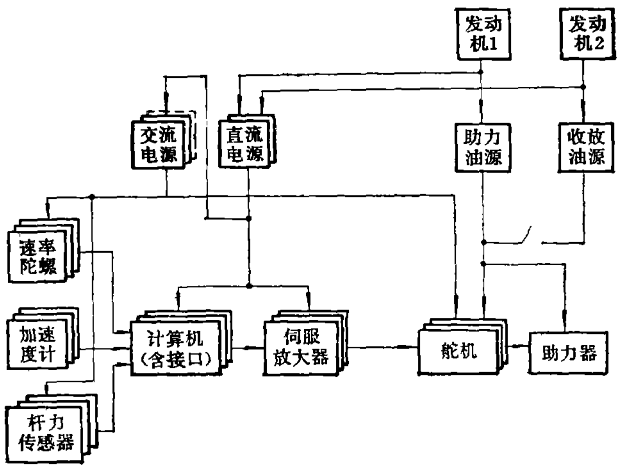

图1　系统纵向可靠性结构图

Fig. 1　Contruction diagram of longitudinal reliability of the system

信息的传递除输入装置(驾驶杆、人感系统)及输出装置（助力器、舵面机构）外，其间全部用电缆传递。机械联杆及钢索等装置全部被取消。

为了提高控制系统的可靠性，通常采用多余度。

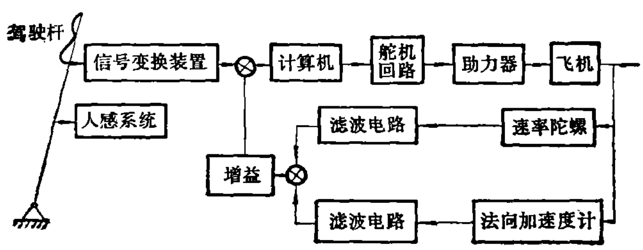

图2　单套情况的方块图

Fig. 2　Block diagram of single system

四、折扣模型及解

我们考虑单点故障单元（零件、部件）具有突发性且完全丧失功能的突发性故障，发

生这种故障不仅造成巨大经济损失，甚至会招致危险，因此，在故障发生之前的某一个时刻 t_0 就对单元进行更换，即采取事前更换策略（或称控制策略），意即当单元已工作了时刻 t_0，不管它是否还能进行工作均用新单元更换，设这种事前更换所需的费用为 c_2，若在 t_0 之前就发生了故障并用新单元更换，设这种事后更换所需费用为 c_1（包括造成的直接损失、购置新单元、停工更换损失及各种影响如信誉下降等造成的等效经济损失)。这里设 $c_1>c_2$。

我们的问题是要寻求一个最优事前更换时间 t_0^*，即寻求一个事前更换策略 t_0^*，使连续折扣总期望费用达到最小值。设折扣速率因子为 $\alpha>0$，各单元无故障工作时间服从独立、同分布，具有平均无故障时间为 $\frac{1}{\lambda}$ 的一般分布 $F(\lambda, t)$，$t>0$，假定具有 $F(\lambda, 0)=0$，且具有密度函数 $f(t)$。

在事前更换策略 t_0 下，令

$c(\alpha, t_0)$：表示连续折扣总期望费用。

$c_1(\alpha, t_0)$：表示从 $t=0$ 出发一周期折扣期望费用。

$T(\alpha, t_0)$ 表示从 $t=0$ 出发折扣期望更换时间，其中"一周期"意即从一个更换时刻起到下一个更换时刻止的间隔时间，假定更换是即时完成的。

从更新理论，我们有

$$c(\alpha, t_0)=c_1(\alpha, t_0)+T(\alpha, t_0)\times c(\alpha, t_0)$$

即

$$c(\alpha, t_0)=\frac{c_1(\alpha, t_0)}{1-T(\alpha, t_0)} \tag{1}$$

$$c_1(\alpha, t_0)=c_1\int_0^{t_0} e^{-\alpha t}dF(\lambda, t)+c_2e^{-\alpha t_0}\overline{F}(\lambda, t_0) \tag{2}$$

其中 $\overline{F}(\lambda, t_0)=1-F(\lambda, t_0)$，以及

$$T(\alpha, t_0)=\int_0^{t_0} e^{-\alpha t}dF(\lambda, t)+e^{-\alpha t_0}\overline{F}(\lambda, t_0)$$

故

$$1-T(\alpha, t_0)=1+e^{-\alpha t}\overline{F}(\lambda, t)\Big|_0^{t_0}+\int_0^{t_0} e^{-\alpha t}\overline{F}(\lambda, t)dt$$

$$-e^{-\alpha t_0}\overline{F}(\lambda, t_0)=\alpha\int_0^{t_0} e^{-\alpha t}\overline{F}(\lambda, t)dt \tag{3}$$

将（2）、（3）式代入（1）式得

$$c(\alpha, t_0)=\frac{c_1\int_0^{t_0} e^{-\alpha t}dF(\lambda, t)+c_2e^{-\alpha t_0}\overline{F}(\lambda, t_0)}{\alpha\int_0^{t_0} e^{-\alpha t}\overline{F}(\lambda, t)dt} \tag{4}$$

我们的目的是寻求一个最优的事前更换策略 t_0^*，即寻求一个 t_0^*，使

$$c(\alpha, t_0^*)=\min_{0\leqslant t\leqslant\infty} c(\alpha, t)$$

对（4）式关于 t_0 求微商，并令其等于零。经简化后得

$$\{c_1e^{-\alpha t_0}f(t_0)-c_2e^{-\alpha t_0}[\alpha\overline{F}(\lambda,\ t_0)+f(t_0)]\}\times\int_0^{t_0}e^{-\alpha t}\overline{F}(\lambda,\ t)dt$$
$$-\left[c_1\int_0^{t_0}e^{-\alpha t}dF(\lambda,\ t)+c_2e^{-\alpha t_0}\times\overline{F}(\lambda,\ t_0)\right]e^{-\alpha t_0}\overline{F}(\lambda,\ t_0)=0$$

其中

$$f(t)=\frac{dF(\lambda,\ t)}{dt}$$

并令

$$r(t)=\frac{f(t)}{\overline{F}(\lambda,\ t)}$$

$r(t)$ 为单元的故障率。对上式两端除以 $e^{-\alpha t_0}\times\overline{F}(\lambda,t_0)$ 得

$$\{(c_1-c_2)\ r(t_0)-c_2\alpha\}\int_0^{t_0}e^{-\alpha t}\overline{F}(\lambda,\ t)dt=c_1\int_0^{t_0}e^{-\alpha t}dF(\lambda,\ t)+c_2e^{-\alpha t_0}\overline{F}(\lambda,t_0)$$

而

$$\alpha\int_0^{t_0}e^{-\alpha t}\overline{F}(\lambda,\ t)dt=-\int_0^{t_0}\overline{F}(\lambda,\ t)de^{-\alpha t}$$
$$=-\overline{F}(\lambda,\ t_0)e^{-\alpha t_0}+1-\int_0^{t_0}e^{-\alpha t}dF(\lambda,\ t)$$

代入上式并化简得

$$r(t_0)\int_0^{t_0}e^{-\alpha t}\overline{F}(\lambda,\ t)dt-\int_0^{t_0}e^{-\alpha t}dF(\lambda,\ t)=\frac{c_2}{c_1-c_2}\tag{5}$$

这是最优事前更换时间 t_0^* 所必须满足的方程。问题是方程（5）的有限解是否存在，若存在，是否就是我们所需的最小解。

下面我们仅就一特殊情况来回答上述问题，即 $F(\lambda,\ t)$ 为 K 阶爱尔朗分布的情况。我们之所以选取爱尔朗分布是因为它对很多实际问题具有广泛的适应性。当 $K=1$ 时它为负指数分布；当 $K\geqslant30$ 时它近似为正态分布；当 $K\to\infty$ 时它趋于长度为 $\frac{1}{\lambda}$ 的定长分布。

$$F(\lambda,\ t)=1-e^{-K\lambda t}\left[1+\frac{K\lambda t}{1!}+\cdots+\frac{(K\lambda t)^{K-1}}{(K-1)!}\right]\quad t\geqslant0$$

为方便计，我们令 $G(K\lambda,\ t)\equiv F(\lambda,\ t)$，即

$$G(K\lambda,\ t)=1-e^{-K\lambda t}\left[1+\frac{K\lambda t}{1!}+\cdots+\frac{(K\lambda t)^{K-1}}{(K-1)!}\right]\quad t\geqslant0\tag{6}$$

它的密度函数 $g(K\lambda,\ t)$ 为

$$g(K\lambda,\ t)=\frac{K\lambda(K\lambda t)^{K-1}}{(K-1)!}e^{-K\lambda t}.\quad t\geqslant0\tag{7}$$

失效率 $r(t)$ 为

$$r(t)=\frac{g(K\lambda,\ t)}{\overline{G}(K\lambda,\ t)}=\frac{K\lambda(K\lambda t)^{K-1}}{(K-1)!}\Big/\left[1+\frac{K\lambda t}{1!}+\cdots+\frac{(K\lambda t)^{K-1}}{(K-1)!}\right]\tag{8}$$

由于

$$\int_0^{t_0} e^{-(\alpha+K\lambda)t}\frac{K\lambda t}{n!}dt=\frac{1}{\alpha+K\lambda}\left(\frac{K\lambda}{\alpha+K\lambda}\right)^n\left\{1-e^{-(\alpha+K\lambda)t_0}\left[1+\frac{(\alpha+K\lambda)t_0}{1!}+\cdots+\frac{(\alpha+K\lambda)^n t_0^n}{n!}\right]\right\}\quad n\geqslant 0 \tag{9}$$

由(6)式和(9)式得

$$\int_0^{t_0} e^{-\alpha t}\overline{G}(K\lambda,\ t)dt=\frac{1}{\alpha}\left[1-e^{-\alpha t_0}\overline{G}(K\lambda,t_0)-\left(\frac{K\lambda}{\alpha+K\lambda}\right)^K G(\alpha+K\lambda,\ t_0)\right] \tag{10}$$

由（9）式得

$$\int_0^{t_0} e^{-\alpha t}dG(K\lambda,\ t)=\left(\frac{K\lambda}{\alpha+K\lambda}\right)^K G(\alpha+K\lambda,\ t_0) \tag{11}$$

将（10)、(11）式代入（5）式并化简得

$$\frac{1}{\alpha}[r(t_0)-e^{-\alpha t_0}g(K\lambda,\ t_0)]-\left(\frac{K\lambda}{\alpha+K\lambda}\right)^K G(\alpha+K\lambda,\ t_0)\times\left[1+\frac{1}{\alpha}\ r(t_0)\right]=\frac{c_2}{c_1-c_2} \tag{12}$$

这就是当单元寿命服从K阶爱尔朗分布时，最优事前更换时间t_0^*所必须满足的方程。我们有以下结果。

定理一、当$K\geqslant 2$时，若

$$[(\alpha+K\lambda)^K-(K\lambda)^K][c_1K\lambda-c_2(\alpha+K\lambda)]>c_1(K\lambda)^K\alpha$$

最优事前更换时间t_0^*是方程（12）的唯一有限解。

证：把（12）式左端记作$h(t_0)$，因为$G(K\lambda,\ 0)=0$，$g(K\lambda,\ 0)=r(0)=0$，$c_1>c_2>0$，故

$$h(0)=0<\frac{c_2}{c_1-c_2}$$

即当$t_0=0$时，(12）式的左端小于右端。

由（6）、（7）、（8）式不难看出$h(t_0)$是t_0的连续函数，且关于t_0是严格增加的，事实上由（5）式

$$\frac{dh(t_0)}{dt}=\left[\frac{dr(t_0)}{dt_0}\right]\int_0^{t_0} e^{-\alpha t}\overline{G}(K\lambda,\ t)dt+r(t_0)e^{-\alpha t_0}\overline{G}(K\lambda,\ t_0)-e^{-\alpha t_0}g(K\lambda,\ t_0)$$
$$=\left[\frac{d}{dt}\ r(t_0)\right]\int_0^{t_0} e^{-\alpha t}\overline{G}(K\lambda,\ t)dt \tag{13}$$

由（8）式

$$\frac{d}{dt_0}r(t_0)=\frac{\frac{(K\lambda)^2(K\lambda t_0)^{K-1}}{(K-2)!}\left[1+\frac{K\lambda t_0}{1!}+\cdots+\frac{(K\lambda t_0)^{K-1}}{(K-1)!}\right]}{\left[1+\frac{K\lambda t_0}{1!}+\cdots+\frac{(K\lambda t_0)^{K-1}}{(K-1)!}\right]^2}-\frac{\frac{(K\lambda)^2(K\lambda t_0)^{K-1}}{(K-1)!}\left[1+\frac{K\lambda t_0}{1!}+\cdots+\frac{(K\lambda t_0)^{K-2}}{(K-2)!}\right]}{\left[1+\frac{K\lambda t_0}{1!}+\cdots+\frac{(K\lambda t_0)^{K-1}}{(K-1)!}\right]^2} \tag{14}$$

由此$\frac{d}{dt_0}r(t_0)>0$，且（13）式最右端的积分值为正（当 $t>0$）故 $\frac{d}{dt_0}h(t_0)>0$，$K\geqslant 2$，$t_0>0$，这证明了 $h(t_0)$ 关于 t_0是严格增加的。

由所设$[(\alpha+K\lambda)^K-(K\lambda)^K][c_1K\lambda-c_2(\alpha+K\lambda)]>c_1(K\lambda)^K\alpha$，两边同除以$(\alpha+K\lambda)^K$经简化后得$\left[K\lambda-\left(\frac{K\lambda}{\alpha+K\lambda}\right)^K\times(K\lambda+\alpha)\right](c_1-c_2)>c_2\alpha$，两边再除以$(c_1-c_2)\alpha$，得

$$\frac{K\lambda}{\alpha}-\left(\frac{K\lambda}{\alpha+K\lambda}\right)^K\left(1+\frac{K\lambda}{\alpha}\right)>\frac{c_2}{c_1-c_2} \tag{15}$$

由（8）、（7）式

$$\lim_{t_0\to\infty} r(t_0)=K\lambda;\qquad \lim_{t_0\to\infty} g(K\lambda,\ t_0)=0$$

在（12）式的左端，令 $t_0\to\infty$得

$$\lim_{t_0\to\infty} h(t_0)=\frac{K\lambda}{\alpha}-\left(\frac{K\lambda}{1+K\lambda}\right)^K\left(1+\frac{K\lambda}{\alpha}\right)$$

由（15）式可知，当 $t_0\to\infty$，（12）式的左端大于右端。综合上面所述，当$[(\alpha+K\lambda)^K-(K\lambda)^K][c_1K\lambda-c_2(\alpha+K\lambda)]>c_1(K\lambda)^K\alpha$时，（12）式存在唯一的有限解。不难验证这就是我们所需的最小解 t_0^*。

若$[(\alpha+K\lambda)^K-(K\lambda)^K][c_1K\lambda-c_2(\alpha+K\lambda)]\leqslant c_1(K\lambda)^K\alpha$最优事前更换时间$t_0^*=\infty$，即仅当单元故障以后才予以更换，是最优的。

这一问题的证明与上面完全类似，故从略。

当$K=2$，且 $2c_1\lambda>c_2(\alpha+4\lambda)$ 时，最优事前更换时间 t_0^* 是下面方程的唯一有限解

$$\frac{t_0(\alpha+2\lambda)-[1-e^{-(\alpha+2\lambda)t_0}]}{1+2\lambda t_0}\left(\frac{2\lambda}{\alpha+2\lambda}\right)^2=\frac{c_2}{c_1-c_2} \tag{16}$$

当 $2c_1\lambda\leqslant c_2(\alpha+4\lambda)$ 时，则 $t_0^*=\infty$。

证：直接验证即可得到。

关于 t_0^* 的上界有如下结论，它对 t_0^* 作粗略估计时是有用的。

定理二、当 $K\geqslant 2$ 时，且$[(\alpha+K\lambda)^K-(K\lambda)^K][K\lambda c_1-c_2(\alpha+K\lambda)]>c_1(K\lambda)^K\alpha$时，方程

$$r(t_0)=\alpha\frac{c_1(K\lambda)^K+c_2[(\alpha+K\lambda)^K-(K\lambda)^K]}{(c_1-c_2)[(\alpha+K\lambda)^K-(K\lambda)^K]} \tag{17}$$

有唯一有界解 t_0^{**}，且有 $t_0^{**}>t_0^*$。

证略。

当$K=2$，且 $2\lambda c_1>(\alpha+4\lambda)c_2$时

$$t_0^{**}=\frac{c_1 4\lambda^2+c_2(\alpha^2+4\lambda\alpha)}{2\lambda(\alpha+2\lambda)[2c_1\lambda-c_2(\alpha+4\lambda)]} \tag{20}$$

五、平均模型及解

讨论平均模型问题，这里只需把连续折扣总期望费用目标，换为长期每单位时间平均期望费用目标 $\bar{c}$，简称平均目标。为标明与事前更换时间 t_0的依赖性，记作 $\bar{c}(t_0)$。

设 $c(t_0, t)$ 表示事前更换时间为 t_0，在 $(0, t)$ 期间的总期望费用，$\bar{c}(t_0)$ 定义为

$$\bar{c}(t_0)=\lim_{t\to\infty}\frac{c(t_0, t)}{t}$$

由循环事件理论，我们有

$$\bar{c}(t_0)=\lim\frac{c(t_0, t)}{t}=\frac{\text{一周期的期望费用}}{\text{一周期的期望时间}}$$

$$\bar{c}(t_0)=\frac{c_1F(\lambda, t_0)+c_2\bar{F}(\lambda, t_0)}{\int_0^{t_0}\bar{F}(\lambda, t)dt} \tag{21}$$

我们的问题是要寻求一个 t_0^*，使 $\bar{c}(t_0^*)=\min\bar{c}(t)$ 这里也仅讨论K阶爱尔朗分布($K\geqslant 2$)的特殊情形。类似四节中定理一、定理二的证明，我们有如下结果。仍用 $G(K\lambda, t)\equiv F(\lambda, t)$，$t\geqslant 0$。

定理三、当$K\geqslant 2$时，若

$$(K-1)\lambda c_1>K\lambda c_2$$

最优事前更换时间 t_0^* 是下面方程的唯一有限解

$$r(t_0)\left\{\frac{1}{\lambda}G(K\lambda, t_0)+t_0\left[\bar{G}(K\lambda, t_0)-e^{-K\lambda t_0}\frac{(K\lambda t_0)^{K-1}}{(K-1)!}\right]\right\}$$

$$-\bar{G}(K\lambda, t)=\frac{c_2}{c_1-c_2} \tag{22}$$

若 $(K-1)\lambda c_1<K\lambda c_2$ 时，最优事前更换时间 $t_0^*=+\infty$，即单元直到出了故障以后才予以更换才是最优的。

当$K=2$，且 $\lambda c_1>2\lambda c_2$ 时，最优事前更换时间 t_0^* 是下面方程的唯一有限解

$$2\lambda t_0+e^{-2\lambda t_0}=\frac{c_1+2\lambda t_0c_2}{c_1-c_2} \tag{23}$$

当 $\lambda c_1\leqslant 2\lambda c_2$ 时，$t_0^*=+\infty$。

定理四、设$K\geqslant 2$，若 $(K-1)\lambda c_1>K\lambda c_2$ 时，则方程 $r(t_0)=\frac{\lambda c_1}{c_1-c_2}$ 存在唯一有限解 t_0^{**}，且满足 $t_0^*<t_0^{**}$。

当$K=2$，且 $\lambda c_1>2\lambda c_2$ 时，

$$t_0^{**}=\frac{c_1}{4\lambda[2(c_1-c_2)-\lambda^2c_1]} \tag{24}$$

应当指出，无论是对连续折扣模型，还是平均模型，我们求出的最优事前更换时间 t_0^*，是在事前更换策略类上为最优。这种问题可化为单一状态的半马尔柯夫决策规划。可以证明，最优事前更换策略 t_0^*，是在更大得多的策略类上也是最优的。

六、实例计算

对某型飞机舵机助力器最优事前更换策略 t_0^* 的计算。

助力器是一种根据输入运动的位置和速度而产生输出的功率放大器。

1．按连续折扣模型进行计算

给定如下已知数据

$$c_1=90(\text{万元}),\ c_2=0.9(\text{万元}),\ \alpha=0.05,\ 2\lambda=\frac{1}{300}(\text{次/小时}),\ K=2$$

由式（20）得

$$t_0^{**}=\frac{1.065}{0.01319}\approx 81\text{小时}$$

由式（16）得

$$3.5858=0.0448t_0^*+e^{-0.053t_0^*}$$

$$t_0^*\approx 79.5\ \text{小时}$$

因此，每台助力器最优事前更换策略是在飞行79.5小时，就应予以更换。

2．按平均模型进行计算

由式（24）得

$$t_0^{**}=\frac{27000}{356.4}\approx 76\text{小时}$$

由式（23）得

$$1.0101=0.0032\,t_0^*+e^{-0.0033t_0^*}$$

$$t_0^*\approx 74\ \text{小时}$$

七、几 点 说 明

1．由于过去国内对元部件及系统可靠性数据的积累，未能引起足够的重视。目前，国内从事可靠性方面的工作者，面临着一个共同的困难——所用原始数据其本身的可靠性几何？本文作者也不例外，本文所用某型飞机的一些数据乃是某些厂、所提供的经验数据，这些数据作为一种方法的验算，是完全可用的。待今后获得实测可靠性统计数据之后，计算的结果将是可信的。

2．目前，国外在设计先进的余度飞行系统时，其重点已不再是寻求余度数的增加，而着重点是如何尽可能降低余度系统中单次故障发生的概率。如果加上本文所述，对系统中那些薄弱的单元进行最优事前更换，无疑这将是对现有财富的一种最合理的使用办法——故障单元事前更换是在系统付诸使用之后，为提高可靠性或减少资源消耗，使现有设备得到有效使用的一种手段，因而系统可获得足够的可靠性和最小的消耗。

3．本文所采用的方法，对于寻求具有类似分布的数学模型的物理系统（如远洋舰船、热核电站等）中的某些单点故障单元的最优事前更换策略，也是可行的。如果单元是可维修的，可类似地寻求最优的预防性维修策略。

参 考 文 献

〔1〕 B.L.阿姆斯塔特著，彭兴文译，可靠性数学，科学出版社，1980。

〔2〕 Fox.B.Age replacement with discounting operations.Res.Vol.14.533～537.1966.

〔3〕 Morse.P.M.Queues Imventories and Maintenance.John wiley and sons.INC.Newyork 1958.

〔4〕 三根久等，信赖性、保全性システム技術の总合化に关する研究，京都大学 1980。

A STUDY ON TACTICS OF OPTIMUM ADVANCED CHANGE FOR FLIGHT CONTROL SYSTEM

Jiao Guoquan

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Dong Zeqing

(Applied Mathematical Institute, Academia Sinica)

Abstract

In order to utilize the resources available at present with maximum efficiency and enhance the reliability of a redundant flight control system to the utmost extent, it is of great value to study the change or the maintenance of a single stoppage unit in advance of a stoppage for a definite time t_0. This paper investigates how the distribution of stoppageless work time of a single stoppage unit follows K(K= 2) order Erlang distribution (in many practical problems Erlang distribution is of extensive adaptability) and then proposed an equation for the optimum advanced change time t_0^*, which minimizes both the continuous expection cost and the average expection cost per unit time in a long period. This equation is simpler than the available ones and easy to make numerical calculation. By the aid of Erlang distribution table and exponential function table it is possible to make an approximate numerical calculation even by hand on the basis of the results in this paper. Finally, a numerical example is given for $K=2$.