

# 基于超复数相位相关的彩色图像配准算法

冯巍, 胡波

(复旦大学电子工程系, 上海 200433)

**摘要:** 由于数学上的限制, 在使用传统相位相关技术对彩色图像进行配准时, 必须先将其转化为灰度图像, 在此过程中损失了图像的色度信息, 导致配准精度的降低。针对此问题, 提出了一种具有亚像素精度的彩色图像配准方法。首先通过数学推导得到一种新的超复数相位相关表达式及相关系数与图像位移间的解析表达式, 然后使用最小二乘法从相关系数矩阵中, 直接估计出图像间存在的位移。该算法能够充分利用彩色图像的灰度和色度信息, 提高配准精度。仿真实验结果证明了算法的有效性。

**关键词:** 彩色图像配准; 超复数相位相关; 最小二乘法; 相位相关

**中图分类号:** TN 911.73

**文献标志码:** A

## Novel color image registration algorithm using quaternion phase-only correlation

FENG Wei, HU Bo

(Dept. of Electronic Engineering, Fudan Univ., Shanghai 200433, China)

**Abstract:** Due to mathematical limitations, traditional phase-only correlation (POC)-based registration algorithms can only be applied to grayscale images or at most complex images. A color image must be first converted to a grayscale one before performing the POC, during which the chrominance information is wasted. The conventional POC technique is extended to the quaternion field (QPOC), and a subpixel color image registration algorithm based on the QPOC is proposed. The proposed algorithm can not only naturally make full use of the luminance as well as the chrominance information in color images, but also directly estimate the subpixel translational shift from the 2D data array of the QPOC function. Experimental results show the effectiveness of the proposed algorithm.

**Keywords:** color image registration; quaternion phase-only correlation; least square; phase-only correlation

## 0 引言

基于相位相关(phase-only correlation, POC)的图像配准技术是图像处理的关键技术之一, 它在模板匹配、运动估计、目标识别等领域中有着广泛的应用<sup>[1]</sup>。基于传统 POC 的图像配准最初被用来估计相似的图像间存在的平移关系<sup>[2]</sup>, 后续文献将其扩展到计算旋转和缩放的变化<sup>[3-4]</sup>。基于标准 POC 的图像配准计算公式为

$$poc = F^{-1} \left\{ \frac{FG}{|FG|} \right\} \quad (1)$$

式中,  $F$  和  $G$  分别为两幅图像  $f$  和  $g$  的傅里叶变换;  $G$  上的横杠表示复数共轭;  $F^{-1}$  表示傅里叶反变换。如果图像  $f$  和  $g$  间存在着整数平移的关系, 即满足  $g(n_1, n_2) = f(n_1 +$

$\delta_1, n_2 + \delta_2)$ , 那么计算得到的  $poc(n_1, n_2)$  系数矩阵是一个狄拉克函数, 即  $poc(n_1, n_2) = \delta(n_1 - \delta_1, n_2 - \delta_2)$ 。在实际应用中, 可以根据峰值点的位置估计出平移向量  $(\delta_1, \delta_2)$ 。

但是, 基于 POC 的配准算法只能对实数和复数矩阵进行处理, 这极大地限制了它在彩色图像处理中的应用。在使用基于 POC 的配准算法对彩色图像进行处理时, 必须首先将其转化为灰度图像, 这将不可避免造成色度信息的丢失, 进而导致在一些应用中配准算法的失败<sup>[5-6]</sup>。因此, 需要对现有的基于 POC 的配准算法进行改进, 使其可以充分利用彩色图像的灰度信息和色度信息, 以提升配准算法的性能。

超复数(四元数)作为复数运算的扩展, 可以很好地解决我们的问题。文献[7]最早将超复数用于彩色图像的处理中, 并提出了超复数傅里叶的概念。文献[8]首次提出了

收稿日期: 2008-05-13; 修回日期: 2009-05-13。

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2006CB705700)资助课题

作者简介: 冯巍(1983-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为彩色图像处理和视频跟踪。E-mail: weifeng@fudan.edu.cn

超复数相位相关 (quaternion phase-only correlation, QPOC) 算法。文献[9]提出了使用 QPOC 技术进行灰度图像与彩色图像配准的算法。文献[10]将 QPOC 与超复数互相关算法相结合,不仅可以解决图像间的位移估计问题,而且还可以对图像间存在的粗差和色彩旋转进行估计,引起了学者们的广泛关注。文献[5]对超复数傅里叶变换和超复数相关算法的计算复杂度进行了分析,并提出了降低计算量的快速算法。但是,现有的 QPOC 算法有着共同的缺陷:计算表达式极为复杂,计算量较大;而且更为重要的是,与基于传统 POC 的配准不同,现有的算法不能定量地描述出相关系数与图像间平移的关系,所以很难用于亚像素精度的平移估计。

本文提出了一种将传统 POC 扩展到超复数域的新算法,得到一种新的 QPOC 计算表达式,它有着与传统 POC 相似的简明表达式,将计算量降低到原算法的 50% 左右。在亚像素彩色图像配准应用中,它可以得出相关系数与位移间的解析表达式,进而从 QPOC 计算得到的二维系数矩阵中,利用最小二乘法直接估计出图像间存在的亚像素位移。

## 1 QPOC 算法

### 1.1 超复数运算法则及超复数傅里叶变换

超复数法则对传统复数法则的强有力扩展,由数学家 Hamilton 于 1843 年首先提出<sup>[11]</sup>。一个超复数  $q$  可以表示为  $q = a + bi + cj + dk$ ,其中  $a, b, c, d$  均为实数,而  $i, j, k$  为虚数单位,它们满足以下乘法法则

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1, i \cdot j = -j \cdot i = k \\ j \cdot k = -k \cdot j = i, k \cdot i = -i \cdot k = j \end{aligned} \quad (2)$$

需要特别指出并提请注意的是,与我们熟悉的矩阵计算法则一样,超复数是不满足乘法交换率的,即  $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$ ,式(2)清楚地指出了这一点。

超复数  $q$  的模定义为  $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ 。超复数  $q$  还可以表示成一个标量和一个矢量的和的形式,即  $q = S(q) + \mathbf{V}(q)$ 。其中,  $S(q) = a$  而  $\mathbf{V}(q) = bi + cj + dk$ ,当  $S(q) = 0$  时,  $q$  被称为纯四元数。四元数  $q$  的共轭表示为  $\bar{q}$ ,其计算方法是  $\bar{q} = S(q) - \mathbf{V}(q)$ 。

由于超复数的乘法法则不满足交换率,所以超复数傅里叶变换的形式并不是唯一的,本文采用文献[7-10]提出的定义。超复数傅里叶变换分为右手变换和左手变换两种形式。对于一个二维离散的四元数函数  $f_q(n_1, n_2)$  ( $n_1 \in [-M_1, M_1], n_2 \in [-M_2, M_2], n_1$  和  $n_2$  为整数)而言,其右手傅里叶变换的形式为

$$F^R(k_1, k_2) = F^R(f_q(n_1, n_2)) = \sum_{n_1=-M_1}^{M_1} \sum_{n_2=-M_2}^{M_2} f_q(n_1, n_2) \mathbf{W}_{N_1}^{k_1 n_1} \mathbf{W}_{N_2}^{k_2 n_2} \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{W}_{N_1} = e^{-u \frac{2\pi}{N_1}}$ ,  $\mathbf{W}_{N_2} = e^{-u \frac{2\pi}{N_2}}$ ,  $N_1 = 2M_1 + 1, N_2 = 2M_2 + 1, u$  为纯四元数,且  $u^2 = -1$ 。上述定义中使用了超复数欧拉公式,即  $e^{u\theta} = \cos \theta + u \cdot \sin \theta$ 。

其对应的反变换形式为

$$f_q(n_1, n_2) = F^{-R}(F^R(k_1, k_2)) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=-M_1}^{M_1} \sum_{k_2=-M_2}^{M_2} F^R(k_1, k_2) \mathbf{W}_{N_1}^{-k_1 n_1} \mathbf{W}_{N_2}^{-k_2 n_2} \quad (4)$$

相类似的,左手傅里叶变换及其反变换被定义为

$$\begin{aligned} F^L(k_1, k_2) &= F^L(f_q(n_1, n_2)) = \\ &= \sum_{n_1=-M_1}^{M_1} \sum_{n_2=-M_2}^{M_2} \mathbf{W}_{N_1}^{k_1 n_1} \mathbf{W}_{N_2}^{k_2 n_2} f_q(n_1, n_2) \\ f_q(n_1, n_2) &= F^{-L}(F^L(k_1, k_2)) = \\ &= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=-M_1}^{M_1} \sum_{k_2=-M_2}^{M_2} \mathbf{W}_{N_1}^{-k_1 n_1} \mathbf{W}_{N_2}^{-k_2 n_2} F^L(k_1, k_2) \end{aligned} \quad (5)$$

### 1.2 改进的 QPOC 算法

现有的 QPOC 方法是基于超复数互相关算法的,其缺点已在引言中有所介绍,不再赘述。本文将提出一种新的 QPOC 的计算形式,用于彩色图像间的位移估计。

首先,需要使用超复数对彩色图像进行建模,本文使用的建模方法与文献[7-10]所采用的模型是相同的,即将彩色图像  $f_q(n_1, n_2)$  ( $n_1 \in [-M_1, M_1], n_2 \in [-M_2, M_2], n_1$  和  $n_2$  为整数)表示为

$$\begin{aligned} f_q(n_1, n_2) &= f_R(n_1, n_2) \cdot i + \\ &= f_G(n_1, n_2) \cdot j + f_B(n_1, n_2) \cdot k \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $f_R(n_1, n_2), f_G(n_1, n_2), f_B(n_1, n_2)$  分别为彩色图像在 RGB 彩色空间中对应的三个分量。而在傅里叶变换中使用的单位纯四元数  $u = (i + j + k) / \sqrt{3}$  的物理含义可参考文献[10],其超复数傅里叶变换可由式(3)得到。

如果彩色图像  $g_q(n_1, n_2)$  是对  $f_q(n_1, n_2)$  进行平移得到的,即两者满足  $g_q(n_1, n_2) = f_q(n_1 - \delta_1, n_2 - \delta_2)$ ,则

$$\begin{aligned} G^R(k_1, k_2) &= \sum_{n_1=-M_1}^{M_1} \sum_{n_2=-M_2}^{M_2} g_q(n_1, n_2) \mathbf{W}_{N_1}^{k_1 n_1} \mathbf{W}_{N_2}^{k_2 n_2} = \\ &= \left\{ \sum_{n_1=-M_1}^{M_1} \sum_{n_2=-M_2}^{M_2} f_q(n_1, n_2) \mathbf{W}_{N_1}^{k_1 n_1} \mathbf{W}_{N_2}^{k_2 n_2} \right\} e^{-u \left( \frac{2\pi}{N_1} k_1 \delta_1 + \frac{2\pi}{N_2} k_2 \delta_2 \right)} \end{aligned} \quad (7)$$

将式(3)表示成极坐标形式为

$$F^R(k_1, k_2) = A_{Fq}(k_1, k_2) e^{u_{Fq}(k_1, k_2) \theta_{Fq}(k_1, k_2)} \quad (8)$$

式中,  $A_{Fq}(k_1, k_2) = |F^R(k_1, k_2)|$ 。将式(8)代入式(7)中,并利用超复数共轭相乘的性质  $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}$ ,对  $G^R(k_1, k_2)$  求取共轭,得到

$$\begin{aligned} \overline{G^R(k_1, k_2)} &= A_{Fq}(k_1, k_2) e^{u \left( \frac{2\pi}{N_1} k_1 \delta_1 + \frac{2\pi}{N_2} k_2 \delta_2 \right)} e^{-u_{Fq}(k_1, k_2) \theta_{Fq}(k_1, k_2)} = \\ &= e^{u \left( \frac{2\pi}{N_1} k_1 \delta_1 + \frac{2\pi}{N_2} k_2 \delta_2 \right)} A_{Fq}(k_1, k_2) e^{-u_{Fq}(k_1, k_2) \theta_{Fq}(k_1, k_2)} \end{aligned} \quad (9)$$

由式(8)和式(9),可知

$$PH(k_1, k_2) = e^{u \left( \frac{2\pi}{N_1} k_1 \delta_1 + \frac{2\pi}{N_2} k_2 \delta_2 \right)} = \frac{\overline{G^R(k_1, k_2)} F^R(k_1, k_2)}{| \overline{G^R(k_1, k_2)} F^R(k_1, k_2) |} \quad (10)$$

而由式(10),定义新的 QPOC 公式

$$\begin{aligned} \mathbf{ph}(n_1, n_2) &= F^{-L}(PH(k_1, k_2)) = \\ &= F^{-L} \left\{ \frac{\overline{G^R(k_1, k_2)} F^R(k_1, k_2)}{| \overline{G^R(k_1, k_2)} F^R(k_1, k_2) |} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

相类似的,可以得到采用左手傅里叶变换时的 QPOC 公式

$$\mathbf{ph}(n_1, n_2) = F^{-R}(PH(k_1, k_2)) = F^{-R} \left\{ \frac{F^L(k_1, k_2) \overline{G^L(k_1, k_2)}}{|F^L(k_1, k_2) \overline{G^L(k_1, k_2)}|} \right\} \quad (12)$$

### 1.3 QPOC 系数矩阵与位移关系的闭合表达式

在定义了 QPOC 的计算方法后,通过数学推导可以得到 QPOC 系数矩阵与平移关系的闭合表达式,即

$$\mathbf{ph}(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \frac{\sin \{\pi(n_1 + \delta_1)\}}{\sin \{\pi(n_1 + \delta_1)/N_1\}} \frac{\sin \{\pi(n_2 + \delta_2)\}}{\sin \{\pi(n_2 + \delta_2)/N_2\}} \quad (13)$$

其证明过程如下,将式(10)代入式(11)得到

$$\begin{aligned} \mathbf{ph}(n_1, n_2) &= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=-M_1}^{M_1} \sum_{n_2=-M_2}^{M_2} \mathbf{W}_{N_1}^{-k_1 n_1} \mathbf{W}_{N_2}^{-k_2 n_2} e^{u \left( \frac{2\pi}{N_1} k_1 \delta_1 + \frac{2\pi}{N_2} k_2 \delta_2 \right)} = \\ &= \frac{1}{N_1 N_2} \left\{ \sum_{n_2=-M_2}^{M_2} e^{u \frac{2\pi}{N_2} k_2 (n_2 + \delta_2)} \left( \sum_{n_1=-M_1}^{M_1} e^{u \frac{2\pi}{N_1} k_1 (n_1 + \delta_1)} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{N_1 N_2} \frac{\sin \{\pi(n_1 + \delta_1)\}}{\sin \{\pi(n_1 + \delta_1)/N_1\}} \left( \sum_{n_2=-M_2}^{M_2} e^{u \frac{2\pi}{N_1} k_1 (n_1 + \delta_1)} \right) = \\ &= \frac{1}{N_1 N_2} \frac{\sin \{\pi(n_1 + \delta_1)\}}{\sin \{\pi(n_1 + \delta_1)/N_1\}} \frac{\sin \{\pi(n_2 + \delta_2)\}}{\sin \{\pi(n_2 + \delta_2)/N_2\}} \end{aligned}$$

根据式(13)可以知道,经 QPOC 计算得到的 QPOC 系数矩阵是一个实数矩阵。

### 1.4 计算量分析

由文献[5]可知,对于大小为  $M \times N$  的彩色图像  $f_q(n_1, n_2)$  和  $g_q(n_1, n_2)$  而言,原有的 QPOC 算法的计算量为

$$C_{old} = MN(8.5 \log_2(MN) + 127) \quad (14)$$

同时,超复数傅里叶变换及反变换的计算量为  $MN(1.5 \log_2(MN) + 13)$ 。那么,对于本文提出的方法,计算式(11)中的分子部分,需要做两次傅里叶变换和一次乘法,所以其计算量是  $MN(3 \log_2(MN) + 26)$ ; 分母部分的计算量为  $8MN$ ,除法的计算量为  $MN$ ,计算超复数傅里叶反变换的计算量为  $MN(1.5 \log_2(MN) + 13)$ 。所以,提出的 QPOC 的计算量为

$$\begin{aligned} C_{new} &= MN(3 \log_2(MN) + 26) + \\ &MN(1.5 \log_2(MN) + 13) + 9MN = \\ &MN(4.5 \log_2(MN) + 48) \end{aligned} \quad (15)$$

本文提出的 QPOC 算法计算量与原有方法计算量的比值为

$$r = \frac{C_{new}}{C_{old}} \times 100\% = \frac{4.5 \log_2(MN) + 48}{8.5 \log_2(MN) + 127} \times 100\% \approx 50\% \quad (16)$$

## 2 彩色图像配准算法

在 1.3 节中,已经得到了 QPOC 系数矩阵  $\mathbf{ph}(n_1, n_2)$  与位移向量  $(\delta_1, \delta_2)$  的闭合表达式,即式(13)。在式(13)中,如果  $\delta_1$  和  $\delta_2$  均为整数,则  $\mathbf{ph}(n_1, n_2)$  的峰值为 1,设其峰值的坐标为  $(p_1, p_2)$ ,可以据此求出  $\delta_1 = -p_1, \delta_2 = -p_2$ ,这就是整数像素精度的位移估计。在这一点上,本文提出的算

法与原有的 QPOC 算法获得的估计结果是完全相同的。

在式(13)中,当  $\delta_1$  和  $\delta_2$  的值是分数时,由于  $\mathbf{ph}(n_1, n_2)$  是离散化的二维矩阵,所以  $\mathbf{ph}(n_1, n_2)$  的峰值不能取到 1,只能通过  $\mathbf{ph}(n_1, n_2)$  峰值点的坐标估计到  $\delta_1$  和  $\delta_2$  的整数部分。如何利用现有的  $\mathbf{ph}(n_1, n_2)$  矩阵来估计出  $\delta_1$  和  $\delta_2$  的精确值,就是我们所说的亚像素精度的位移估计问题,这是传统的超复数 POC 算法所不能解决的。

对于  $\mathbf{ph}(n_1, n_2)$  曲面上距离峰值点较近的点而言,  $n_1 + \delta_1 \rightarrow 0$  且  $n_2 + \delta_2 \rightarrow 0$ ,则可以近似得到

$$\begin{aligned} \sin \{\pi(n_1 + \delta_1)/N_1\} &\approx \pi(n_1 + \delta_1)/N_1 \\ \sin \{\pi(n_2 + \delta_2)/N_2\} &\approx \pi(n_2 + \delta_2)/N_2 \end{aligned} \quad (17)$$

所以,式(13)可以化简为

$$\mathbf{ph}(n_1, n_2) = \frac{\sin \{\pi(n_1 + \delta_1)\}}{\pi(n_1 + \delta_1)} \cdot \frac{\sin \{\pi(n_2 + \delta_2)\}}{\pi(n_2 + \delta_2)} \quad (18)$$

设  $(p_{1m}, p_{2m})$  为  $\mathbf{ph}(n_1, n_2)$  曲线上的峰值点,而  $(p_{1m} + d_{1m}, p_{2m})$  ( $d_{1m}$  取 1 或者 -1) 是沿  $n_1$  方向上的边值点(与峰值点  $(p_{1m}, p_{2m})$  距离为 1 的点),则  $(p_{1m}, p_{2m})$  和  $(p_{1m} + d_{1m}, p_{2m})$  两点间的相位相关系数存在如下的关系

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{ph}(p_{1m}, p_{2m})}{\mathbf{ph}(p_{1m} + d_{1m}, p_{2m})} &= \frac{(p_{1m} + \delta_{1m} + d_{1m})}{(p_{1m} + \delta_{1m})} \cdot \\ \frac{\sin \{\pi(p_{1m} + \delta_{1m})\}}{\sin \{\pi(p_{1m} + \delta_{1m} + d_{1m})\}} &= (-1) \cdot \frac{(p_{1m} + \delta_{1m} + d_{1m})}{(p_{1m} + \delta_{1m})} \end{aligned} \quad (19)$$

根据式(19),可以解出

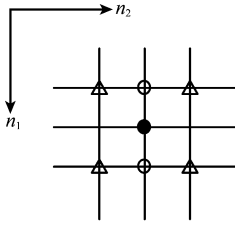
$$\delta_{1m} = v(p_{1m}, d_{1m}, p_{2m}) / u(p_{1m}, d_{1m}, p_{2m}) \quad (20)$$

式中,  $u(p_{1m}, d_{1m}, p_{2m}) = \mathbf{ph}(p_{1m}, p_{2m}) + \mathbf{ph}(p_{1m} + d_{1m}, p_{2m})$ ,  $v(p_{1m}, d_{1m}, p_{2m}) = -p_m \cdot \mathbf{ph}(p_{1m}, p_{2m}) - (p_{1m} + d_{1m}) \cdot \mathbf{ph}(p_{1m} + d_{1m}, p_{2m})$ 。

可以通过上述方法,将二维相位相关中的一维如  $n_2$  固定,然后求解出另一维  $n_1$  上的亚像素位移  $\delta_1$ ; 再将  $n_1$  固定,求取  $n_2$  上的亚像素位移  $\delta_2$ 。这样,可以得到亚像素位移  $(\delta_1, \delta_2)$ 。而对于  $d_m$  值的选择,文献[12]中选取相位相关系数较大的点,即

$$d_{1m} = \begin{cases} -1, \mathbf{ph}(p_{1m} - 1, p_{2m}) \geq \mathbf{ph}(p_{1m} + 1, p_{2m}) \\ +1, \mathbf{ph}(p_{1m} - 1, p_{2m}) < \mathbf{ph}(p_{1m} + 1, p_{2m}) \end{cases}$$

在文献[12-14]中,均是利用相位相关曲线上的峰值点同一行或一列的相位相关系数来对  $\delta_1$  和  $\delta_2$  分别进行估计。但其均忽视了图像的二维特性,由式(13)可知,  $\mathbf{ph}(n_1, n_2)$  曲线的能量主要集中在四个点上,它们是  $(-\lfloor \delta_1 \rfloor, -\lfloor \delta_2 \rfloor)$ 、 $(-\lceil \delta_1 \rceil, -\lfloor \delta_2 \rfloor)$ 、 $(-\lfloor \delta_1 \rfloor, -\lceil \delta_2 \rceil)$  和  $(-\lceil \delta_1 \rceil, -\lceil \delta_2 \rceil)$  (符号  $\lfloor \cdot \rfloor$  表示向上取整数,符号  $\lceil \cdot \rceil$  表示向下取整数)。也就是说,在峰值点  $(p_{1m}, p_{2m})$  的对角顶点(与峰值点距离为  $\sqrt{2}$  的点)中,仍然存在相位相关系数较大的点。以  $(0.5, 0.5)$  的位移为例,在  $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$  三个位置的相位相关系数较大,其实  $(1, 1)$  点的相位相关系数也很大。可以利用这些对角顶点的系数来减小式(18)近似带来的误差,进一步提高亚像素位移估计的精度。



●: 峰值点; ○: 边值点; △: 对角点

图 1 峰值点、边值点和角点的位置关系

因此,假设点  $(p_{1c}, p_{2c})$  为峰值点  $(p_{1m}, p_{2m})$  的四个角顶点中相位相关系数最大的点,则

$$\delta_1 \cdot u(p_{1c}, d_{1c}, p_{2c}) = v(p_{1c}, d_{1c}, p_{2c}) \quad (21)$$

式中,  $d_{1c} = -d_{1m}$ 。

可以把式(20)和式(21)结合在一起,通过下面的方法对  $\delta_1$  进行估计来求得  $\hat{\delta}_1$ ,即

$$\hat{\delta}_1 = \operatorname{argmin}_{\delta_1} \left\{ \sum_{i=\{m,c\}} |v(p_{1i}, d_{1i}, p_{2i}) - \delta_1 \cdot u(p_{1i}, d_{1i}, p_{2i})|^2 \right\} \quad (22)$$

使用最小二乘法来解决,可得到

$$\hat{\delta}_1 = (U_1^T U_1)^{-1} U_1^T V_1 \quad (23)$$

式中

$$U_1 = [u(p_{1m}, d_{1m}, p_{2m}), u(p_{1c}, d_{1c}, p_{2c})]^T \quad (24)$$

$$V_1 = [v(p_{1m}, d_{1m}, p_{2m}), v(p_{1c}, d_{1c}, p_{2c})]^T \quad (25)$$

可以参照上面的方法,相类似地得到  $\delta_2$  的估计值  $\hat{\delta}_2$ 。

### 3 仿真结果

#### 3.1 计算量比较

为了对本文提出的 QPOC 计算量定量分析进行验证,在计算机上进行了仿真,计算机的配置为 P4 3.2 GHz,内存为 1 GB,仿真所使用的软件平台为 Matlab 2007b。仿真的方法是选取同样大小的两幅彩色图像,然后对超复数相

关的计算过程进行计时,得出计算时间。为了减少误差,对于每种尺寸的图像都进行 100 次计算。表 1 给出了本文算法与原有 QPOC 算法<sup>[10]</sup>计算时间的对比。

表 1 本文算法与原有算法的计算时间比较(100 次计算)

图像大小	本文算法计算时间/s	原有算法计算时间/s	计算时间比(新/原)/(%)
64×64	4.89	7.75	63.1
128×128	7.06	13.20	53.5
256×256	27.64	49.01	56.4
512×512	111.60	214.91	51.9
1 024×1 024	503.88	1 014.76	49.7

从表 1 可知,仿真结果与分析基本吻合。本文算法的计算时间比原有算法降低了至少 1/3。同时,随着图像尺寸的不断增大,计算时间比会逐渐降低,最后趋近于 50% 左右。需要再次指出的是,原有算法在计算得到相位相关系数矩阵之后,只能确定彩色图像间的整数平移,而本文算法可以在得出相位相关矩阵后,利用最小二乘法进一步估计出彩色图像间的亚像素平移。

#### 3.2 亚像素位移估计仿真

首先介绍具有亚像素平移关系的彩色图像对的生成方法,在本文的仿真中采用了文献[12]提到的方法,其数学表达式为

$$f_{\text{subpixel}} = K \times f_m \quad (26)$$

式中,亚像素平移图像  $f_{\text{subpixel}}$  是由一幅高分辨率图像  $f_m$  经过整数像素的平移后进行相应倍数的降采样得到的;  $K$  为抗混叠低通滤波器(算法中假设  $K$  未知)。例如,需要获得  $(0.5, 0.5)$  平移的图像,则首先将高分辨  $f_m$  的图像平移  $(1, 1)$ ,经抗混叠低通滤波器  $K$  后,进行水平和垂直方向的降 2 采样得到  $f_{\text{subpixel}}$ 。而未经平移的图像则可通过对  $K \times f_m$  直接进行水平和垂直方向的降 2 采样得到。

对 60 幅具有不同特征的高分辨率图像进行了仿真,由于篇幅所限,这里仅给出其中的 6 幅及其仿真结果,如图 2 所示。



图 2 测试用的彩色图像

首先考虑在无噪声的情况下,在  $[-1, +1]$  区间内以 0.1 个像素为间隔进行取值,作为彩色图像在水平或垂直方向上

的亚像素位移,即在水平和垂直方向上各有 21 种亚像素位移,对共  $21 \times 21 = 441$  种组合进行仿真。利用估计值的误差

来衡量算法性能的优劣。为了方便描述,对于每幅图像,采用 441 次实验的均方误差值( $e_1, e_2$ )来衡量算法的性能。其表征了算法估计误差的平均值, ( $e_1, e_2$ ) 越小,算法的精度越高,性能越好。

$$e_1 = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (\hat{\delta}_{1i} - \delta_{1i})^2}, e_2 = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (\hat{\delta}_{2j} - \delta_{2j})^2} \quad (27)$$

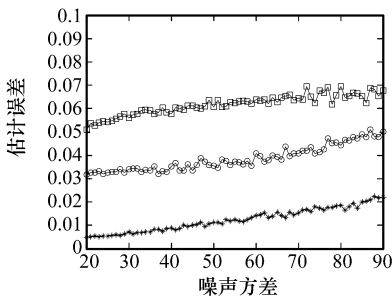
式中,  $L$  为测试中所采用的亚像素位移的组合数, 即 441 种。表 2 列出了对 6 幅彩色图像进行的亚像素位移估计的仿真结果。

表 2 估计误差比较

		文献[12] 算法	文献[13] 算法	文献[14] 算法	本文 算法
长城	$e_1$	0.011	0.015	0.064	0.006
	$e_2$	0.009	0.012	0.020	0.005
故宫	$e_1$	0.025	0.023	0.035	0.009
	$e_2$	0.023	0.024	0.035	0.008
布达 拉宫	$e_1$	0.012	0.014	0.046	0.006
	$e_2$	0.015	0.026	0.010	0.007
五角 大楼	$e_1$	0.010	0.010	0.413	0.007
	$e_2$	0.012	0.011	0.033	0.006
金字塔	$e_1$	0.024	0.024	0.051	0.009
	$e_2$	0.025	0.025	0.045	0.008
城堡	$e_1$	0.008	0.011	0.071	0.007
	$e_2$	0.009	0.014	0.033	0.006

为了更好地评估本文算法的性能,表 2 还列出了利用文献[12-14]算法的估计结果。从表 2 中可以看出,本文算法的估计精度较高,可达到  $10^{-2}$  像素的量级,性能远远优于其他三种算法。

考虑存在噪声时的情况,在仿真过程中,对测试用的彩色图像先利用式(26)产生具有亚像素平移关系的彩色图像对,然后在彩色图像对上分别叠加均值为零、方差相同的高斯白噪声(R、G、B 三个分量上叠加方差相同的白噪声),再利用本文算法进行仿真,仿真次数为 1 000 次。图 3 列出了在位移为(0.5,0.5)的彩色图像长城上叠加均值为零的高斯白噪声时,估计误差与白噪声方差间的关系曲线。文献[14]算法由于在噪声情况下估计误差较大,即噪声方差超过 50 时,得到的估计误差是实际位移值的 2 倍以上,所以图中未予显示。



—○—: 文献[12]算法; —□—: 文献[13]算法; —●—: 本文算法

图 3 估计误差与叠加的高斯白噪声方差的关系曲线

从图 3 中可以看出,估计误差随着噪声方差的逐渐增大而增大,但是本文算法的性能仍然要全面优于其他三种算法;即使白噪声的方差达到 90(像素取值范围[1,255])时,本文算法仍能进行较为精确的估计,估计误差约为 0.02 像素,这也充分证明了本文算法具有较强的鲁棒性。

### 4 结束语

本文提出的基于 QPOC 的彩色图像配准算法,克服了传统的 QPOC 只能解决整数像素的位移估计的局限性,提出了一种新的 QPOC 计算公式,经过数学推导,得到了 QPOC 系数与彩色图像位移关系的解析表达式,利用最小二乘法对亚像素位移进行估计。同时,计算量大大降低,约为原有算法的 50% 左右。仿真实验表明:本文算法具有较高的精度,对噪声具有较好的鲁棒性,估计性能要优于基于传统 POC 的亚像素图像配准算法。

### 参考文献:

- [1] 孟建. 相位相关技术研究[J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25(2): 140-142. (Meng Jian. A new method of phase correlation for signal processing[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2003, 25(2): 140-142.)
- [2] Chen Q, Defrise M, Deconinck F. Symmetric phase only matched filtering of Fourier-Mellin transforms for image registration and recognition[J]. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1994, 16(12): 1156-1168.
- [3] Reddy B S, Chatterji B N. An FFT-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1996, 5(8): 1266-127.
- [4] Keller Y, Averbuch A, Israeli M. Pseudo polar-based estimation of large translations, rotations, and scalings in images [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2005, 14(1): 12-22.
- [5] 江淑红, 郝明非, 张建秋, 等. 快速超复数傅氏变换和超复数相关的新算法及应用[J]. 电子学报, 2008, 36(1): 100-105.
- [6] Feng W, Hu B, Yang C. A quaternion phase-only correlation algorithm for color images[C]// *IEEE International Conference on Image Processing*, 2008: 461-464.
- [7] Ell T A. Hypercomplex spectral transforms[D]. *Minneapolis: University of Minnesota*, 1992.
- [8] Sangwine S J, Ell T A, Moxey C E. Vector phase correlation [J]. *Electronics Letters*, 2001, 37(25): 1513-1515.
- [9] Moxey C E, Sangwine S J, Ell T A. Color-grayscale image registration using hypercomplex phase correlation[C]// *IEEE International Conference on Image Processing*, 2002: 385-388.
- [10] Moxey C E, Sangwine S J, Ell T A. Hypercomplex correlation techniques for vector images[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2003, 51(7): 1941-1953.
- [11] Hamilton W R. Elements of quaternions[M]. *London: Longmans, Green and Co.*, 1866.
- [12] Foroosh H, Zerubia J B, Berthod M. Extension of phase correlation to subpixel registration[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2002, 11(3): 188-200.
- [13] Nagashima S, Aoki T, Higuchi T, et al. A subpixel image matching technique using phase-only correlation[C]// *International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems*, 2006: 701-704.
- [14] Ren J, Vlachos T, Jiang J. Subspace extension to phase correlation approach for fast image registration[C]// *IEEE International Conference on Image Processing*, 2007: 481-484.