多面体集下多目标优化问题近似解的若干性质*

高 英[1,†]

摘要 研究了多目标优化问题的近似解. 首先证明了多面体集是co-radiant集，并证明了一些性质. 随后研究了多面体集下多目标优化问题近似解的特殊性质.

关键词 多目标优化，多面体集，近似解
中图分类号 O221.6
2010 数学分类号 90C29, 90C46

Some properties of approximate solutions for multiobjective optimization problems with respect to polyhedral set*

GAO Ying[1,†]

Abstract In this paper, we consider approximate solutions for multiobjective optimization problems. First, we prove polyhedral set is co-radiant set, and present some properties for this special co-radiant set. And then, we present some properties for approximate solutions with respect to polyhedral set.

Keywords multiobjective optimization problem, polyhedral set, approximate solutions
Chinese Library Classification O221.6
2010 Mathematics Subject Classification 90C29, 90C46

0 引 言

在多目标优化问题中，有多种近似解的概念. Kutateladze[1]最先引进了一种近似解的概念. 随后，诸多学者在此基础上引进了新的近似解的概念，并研究了向量变分原理，多目标优化问题近似Kuhn-Tucker型条件和近似对偶定理等[1−10]. 最近，Gutiérrez 等[7,8]利用co-radiant集引进了新的ε-有效解的概念，推广和统一了以往诸多近似解的概念[1−4]. 高英等[11,12] 在此基础上引进了新的近似真有效解和统一近似解的概念，给出了标量化定理和Lagrange乘子定理. 基于[11] 中近似真有效解的概念，Gutierrez等[13]给出了等价的概念，并研究了标量化特征，Lagrange乘子定理和Lagrange鞍点定理.

收稿日期：2012年9月3日
* 基金项目：国家自然科学基金 (Nos. 11126348, 11226233, 11201511), 重庆市自然科学基金 (CSTC, 2011BA0030), 重庆市教委项目 (No. KJ110624), 重庆市重点项目专项项目 (CSTC,2011KLORSE03)
1. 重庆师范大学数学学院，重庆 400047；Department of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China
† 通讯作者 Corresponding author, Email: gaoying5324@163.com

我们在本文考虑多面体集下多目标优化问题的ε-有效解，给出其特殊的性质. 具体内容安排如下: 第1节，给出了基本概念和结论; 第2节，证明了多面体集是co-radiant集，并研究多面体集下多目标优化问题近似解的特殊性质.

1 基本概念和结论

设$\mathbb{R}^n$是n-维欧式空间，$\mathbb{R}^n_+$表示非负象限. 引进如下符号：

$$x < y \Longleftrightarrow y - x \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+;$$
$$x \leqslant y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\};$$
$$x \leqq y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^n_+.$$

考虑如下多目标优化问题：

$$\min\{f(x) : x \in S\}, \tag{1.1}$$

其中，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$.

定义1.1 设$M \subset \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^m$是点凸锥.
(*i*) 若 $(\bar{y} - D) \cap M = \{\bar{y}\}$, 称$\bar{y} \in M$是集合$M$关于$D$的有效点;
(*ii*) 设$\operatorname{int}D \neq \emptyset$, 若 $(\bar{y} - \operatorname{int}D) \cap M = \emptyset$, 称$\bar{y} \in M$是集合$M$关于$D$的弱有效点.

定义1.2[7] 若对所有的$d \in C$和$\alpha > 1$有$\alpha d \in C$, 集合$C \subset \mathbb{R}^m$ 称为*co-radiant*集.
而且，我们定义$C(\varepsilon) = \varepsilon C, \forall \varepsilon > 0$,

$$C(0) = \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon).$$

下面引进co-radiant点集的一些性质.

引理1.1[7,11] 设C为*co-radiant*点集，则
(*i*) $\forall \varepsilon > 0$, $C(\varepsilon)$ 是*co-radiant*点集;
(*ii*) $C(\varepsilon_2) \subset C(\varepsilon_1), \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$满足 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$;
(*iii*) $C(0)$是点锥;
(*iv*) 若C是凸集，则$C(0) + C(\varepsilon) \subset C(\varepsilon), \forall \varepsilon \geqq 0$. 特别地，$C(0)$是点凸锥;
(*v*) 若C是内部非空的凸集，则$C(0)$是内部非空的点凸锥.

定义1.3[7] 设$M \subset \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \geqq 0$, $C \subset \mathbb{R}^m$是*co-radiant*点集.
(*i*) 若 $(\bar{y} - C(\varepsilon)) \cap M \subset \{\bar{y}\}$，称$\bar{y} \in M$是集合$M$关于$C$的$\varepsilon$- 有效点.
(*ii*) 设$\operatorname{int}C \neq \emptyset$, 若 $(\bar{y} - \operatorname{int}C(\varepsilon) \cap M = \emptyset$, 称$\bar{y} \in M$是集合$M$ 关于C的ε-弱有效点.
$AE(M, C, \varepsilon)$和$WAE(M, K, \varepsilon)$分别表示集合M关于C 的ε-有效点和ε-弱有效点的集合.

定义1.4[7,11] 设$\varepsilon \geqq 0$, $\bar{x} \in S$, $C \subset \mathbb{R}^m$是*co-radiant*点集.
(*i*) 若$f(\bar{x}) \in AE(f(S), C, \varepsilon)$, 即

$$(f(\bar{x}) - C(\varepsilon)) \cap f(S) \subset \{f(\bar{x})\},$$

称$\bar{x}$ 是问题 *(1.1)* 关于C的ε-有效解;

(ii) 设$\mathrm{int}C \neq \emptyset$, 若$f(\bar{x}) \in WAE(f(S), C, \varepsilon)$, 即

$$(f(\bar{x}) - \mathrm{int}C(\varepsilon)) \cap f(S) = \emptyset,$$

称$\bar{x}$是问题(1.1) 关于C的ε-弱有效解;

(iii) 若

$$\mathrm{cl\ cone}(f(S) + C(\varepsilon) - f(\bar{x})) \cap (-C(\varepsilon)) \subset \{0\},$$

称$\bar{x}$为问题 (1.1) 关于C的ε-真有效解.

$AE(f, C, \varepsilon)$, $WAE(f, C, \varepsilon)$和$PAE(f, C, \varepsilon)$ 分别表示问题 (1.1) 关于C的ε-有效解，ε-弱有效解和ε-真有效解的集合.

定义1.5[10] 设$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$, 则$C = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \geqq b\}$为多面体集. 当$b = 0$时，$C = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \geqq b\}$ 为多面体锥.

2 主要结果

本节我们研究多面体集下多目标优化问题近似解的性质.

引理2.1 设$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, C是由A和b定义的多面体集，即$C = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \geqq b\}$, 则

(i) $0 \notin C$, C是co-radiant点凸集.

(ii) $\mathrm{int}C = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax > b\}$, $\mathrm{cl}C(0) = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \geqq 0\}$.

(iii) $C(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \geqq \varepsilon b\}$, $\forall \varepsilon > 0$, $C(0) \cup \{0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \geqq 0\}$.

(iv) 设$\varepsilon > 0$, $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^{n\times m}$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^m : A_1x \geqq b_1\}$, $C_2 = \{x \in \mathbb{R}^m : A_2x \geqq b_2\}$. 若$C_1(\varepsilon) = C_2(\varepsilon)$，则$C_1 = C_2$.

证明(i) 易知$0 \notin C$, 且C是凸集. 下面我们证明C是co-radiant点集.

假设$x \in C \cap (-C)$, 则$b \leqq Ax \leqq -b$, 这与$b \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$矛盾. 因此，$C$是点集.

对任意的$\lambda > 1$和$x \in C$, $A(\lambda x) = \lambda Ax \geqq \lambda b \geqq b$. 因此，$C$是co-radiant集.

(ii) 和 (iii) 的证明显然.

下面我们证明 (iv). 假设$C_1(\varepsilon) = C_2(\varepsilon)$, 任取$x \in C_1$, 由 (iii) 可知$\varepsilon x \in C_1(\varepsilon) = C_2(\varepsilon)$. 这表明$x \in C_2$. 交换$C_1$和$C_2$的位置可证明另一包含关系. 因此，结论成立.

注1 当C是由$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$和$b \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$定义的多面体集时，$C(0) \cup \{0\} = \mathrm{cl}C(0)$也不一定成立. 参见以下例子.

例1 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则$C = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \geqq b\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geqslant 1, x_2 \geqslant 1\}$, 但$C(0) \cup \{0\} \neq \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \geqq 0\} = \mathrm{cl}C(0)$.

例2 设$D = \mathbb{R}^n_+$, $q \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$, $C = \{q\} + D$, 则C是co-radiant闭凸点集，且$0 \notin C$. 但C不能表示成矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 和向量$b \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$的多面体集. 而且，$\mathrm{cl}C(0) = \mathbb{R}^n_+$, $C(0) \cup \{0\} = \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \cup \{0\}$.

但对某些由矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$和向量$b \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$给出的多面体集，以上结果可能成立.

例3 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 则$C = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \geqq b\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geqslant 1, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}$. $C(0) \cup \{0\} = \mathbb{R}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \geqq 0\} = \mathrm{cl}C(0)$.

引理2.2 设$A \subset \mathbb{R}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \geqq b\}$, 则

(*i*) $AE(f, C, \varepsilon) \subset WAE(f, C, \varepsilon)$;

(*ii*) $PAE(f, C, \varepsilon) \subset WAE(f, C, \varepsilon)$.

证明 由近似解的定义易得出证明.

注2 在引理2.2的假设下$PAE(f, C, \varepsilon) \subset AE(f, C, \varepsilon)$不一定成立. 参见以下例子.

例4 设$C = \{(x_1, x_2)^{\mathrm{T}} : x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_1 + x_2 \geqslant 1\}$. $S = \{(x_1, x_2)^{\mathrm{T}} : x_1 = 0, x_2 \geqslant 0 \text{ or } x_1 \geqslant 0, x_2 = 0\}$,$f(x) : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = x$. 取$\bar{x} = (0, \frac{1}{4})^{\mathrm{T}}, \varepsilon = \frac{1}{4}$, 则$\bar{x} \in PAE(f, C, \varepsilon)$, 但$x \notin AE(f, C, \varepsilon)$. 事实上, $\mathrm{cl\ cone}(f(S) - f(\bar{x}) + C(\varepsilon)) = \{(x_1, x_2)^{\mathrm{T}} : x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant -x_1\}$, 故$\mathrm{cl\ cone}(f(S) - f(\bar{x}) + C(\varepsilon)) \cap (-C(\varepsilon)) = \emptyset$, 这表明$\bar{x} \in PAE(f, C, \varepsilon)$. 另一方面，$(0, 0)^{\mathrm{T}} \in f(S)$, $(0, 0)^{\mathrm{T}} \in f(\bar{x}) - C(\varepsilon)$, 从而$\bar{x} \notin AE(f, C, \varepsilon)$.

引理2.3[8] 设$b \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, $K = \mathbb{R}^n_+ + b$, 则K是*co-radiant*集，且$K(\varepsilon) = \mathbb{R}^n_+ + \varepsilon b$.

在下面的定理中，我们设$A[Y] = \{Ay : y \in Y\}$, 其中，$Y \subset \mathbb{R}^m$.

定理2.1 设$A \subset \mathbb{R}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \geqq b\}$, $K = \mathbb{R}^n_+ + b$, $\varepsilon > 0$, 则

(*i*) $A[\bigcup\limits_{x \in AE(f,C,\varepsilon)} f(x)] = AE(A[f(S)], K, \varepsilon)$;

(*ii*) $A[\bigcup\limits_{x \in WAE(f,C,\varepsilon)} f(x)] = WAE(A[f(S)], K, \varepsilon)$;

(*iii*) $A[\bigcup\limits_{x \in PAE(f,C,\varepsilon)} f(x)] \subset WAE(A[f(S)], K, \varepsilon)$. 反之，若$u \in S$, $d = A(f(u))$, $A(f(S)) - A(f(u)) \cap (-\varepsilon b - \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}) = \emptyset$, $C(0) \subset \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \geqslant 0\}$, 则$d \in A[\bigcup\limits_{x \in PAE(f,C,\varepsilon)} f(x)]$.

证明 (i) 若$d \in A[\bigcup\limits_{x \in AE(f,C,\varepsilon)} f(x)]$, 则存在$u \in AE(f, C, \varepsilon)$, 使得$d = A(f(u))$. 由$u \in AE(f, C, \varepsilon)$可知$u \in S$, 且$f(u) - f(x) \notin C(\varepsilon)$, $\forall x \in S \setminus \{u\}$. 因此，

$$A(f(u) - f(x)) \ngeqq \varepsilon b,\ \forall x \in S \setminus \{u\},$$

这表明$d \in AE(A[f(S)], K, \varepsilon)$.

反之，若$d \in AE(A[f(S)], K, \varepsilon)$, 则$d \in A[f(S)]$, $d - A(f(x)) \notin (\mathbb{R}^n_+ + \varepsilon b)$. 因此，存在$u \in S$, 使得$d = A(f(u))$, 且$(f(u) - f(x)) \cap C(\varepsilon) = \emptyset$, $\forall x \in S \setminus \{u\}$.

(ii) 若$d \in A[\bigcup\limits_{x \in WAE(f,C,\varepsilon)} f(x)]$, 则存在$u \in WAE(f, C, \varepsilon)$, 使得$d = A(f(u))$. 由$u \in WAE(f, C, \varepsilon)$可知$u \in S$, 且$f(u) - f(x) \notin \mathrm{int}C(\varepsilon)$, $\forall x \in S$. 因此，

$$A(f(u) - f(x)) \ngtr \varepsilon b,\ \forall x \in S \setminus \{u\}.$$

这表明$d \in WAE(A[f(S)], K, \varepsilon)$.

反之，若$d \in WAE(A[f(S)], K, \varepsilon)$, 则$d \in A[f(S)]$, 且$d - A(f(x)) \notin \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+ + \varepsilon b)$. 因此，存在$u \in S$, 使得$d = A(f(u))$, 且$(f(u) - f(x)) \cap \mathrm{int}C(\varepsilon) = \emptyset$, $\forall x \in S$.

(iii) 若$d \in A[\bigcup\limits_{x \in PAE(f,C,\varepsilon)} f(x)]$, 则存在$u \in PAE(f, C, \varepsilon)$, 使得$d = A(f(u))$. 由$u \in PAE(f, C, \varepsilon)$可知$u \in S$, 且$\mathrm{cl\ cone}(f(S) - f(u) + C(\varepsilon)) \cap (-C(\varepsilon)) = \emptyset$, $\forall x \in S$. 因此，

$$\mathrm{cl\ cone}(f(S) - f(u) + C(\varepsilon)) \cap (-C(0)) = \emptyset,\ \forall x \in S.$$

因$C(0) \cup \{0\} = \mathrm{cl}C(0)$, 故$A(f(u) - f(x) - q) \ngeqslant 0, \forall x \in S, q \in C(\varepsilon)$. 由$q \in C(\varepsilon)$和$Aq \geqq \varepsilon b$可知

$$A(f(x) - f(u)) \ngeqslant -\varepsilon b, \forall x \in S.$$

这表明$d \in WAE(A[f(S)], \mathbb{R}^n_+ + \varepsilon b)$.

反之，我们要证明$u \in PAE(f, C, \varepsilon)$. 假设$u \notin PAE(f, C, \varepsilon)$则

$$\text{cl cone}(f(S) - f(u) + C(\varepsilon)) \cap (-C(\varepsilon)) \neq \emptyset.$$

因此，存在$q \in C(0)$, 使得$q \in \text{cl cone}(f(u) - f(S) - C(\varepsilon))$. 即存在$\lambda_n > 0, x_n \in S$和$q_n \in C(\varepsilon)$, 使得

$$\lambda_n(f(u) - f(x_n) - q_n) \to q.$$

因$C(0) \subset \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \geqslant 0\}$, 故存在$n_1 \in N$, 使得

$$A(f(u) - f(x_{n_1}) - q_{n_1}) \geqslant 0.$$

再由$q_{n_1} \in C(\varepsilon)$可知$A(f(u) - f(x_{n_1})) \geqslant \varepsilon b$, 这与假设矛盾. 因此，$u \in PAE(f, C, \varepsilon)$.

参 考 文 献

[1] Kutateladze S S. Convex ε-programming [J]. *Soviet Math Dokl*, 1979, **20**: 391-393.

[2] White D J. Epsilon efficiency [J]. *J Optim Theory Appl*, 1986, **49**: 319-337.

[3] Helbig S. On a new concept for ε-efficency [R]. *Talk at Optimization Days*, 1992.

[4] Tanaka. A new approach to approximation of solutions in vector optimization problems [C]//Proceedings of APORS, Singapore: World Scientific, 1995.

[5] Gutiérrez C, Jiménez B, Novo V. A set-valued Ekeland's variational principle in vector optimization [J]. *SIAM J Control Optim*, 2008, **47**: 883-903.

[6] Gutiérrez C, Jiménez B, Novo V. Generalized ε-quasi-solutions in multiobjective optimization problems: Existence results and optimality conditions [J]. *Nonlinear Anal*, 2010, **72**: 4331-4346.

[7] Gutiérrez C, Jiménez B, Novo V. A unified approach and optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems [J]. *SIAM J Optim*, 2006, **17**: 688-710.

[8] Gutiérrez C, Jiménez B, Novo V. On approximate efficiency in multiobjective programming [J]. *Math Methods Oper Res*, 2006, **64**: 165-185.

[9] Gutiérrez C, Jiménez B, Novo V. Optimality conditions via scalarization for a new ε-efficiency concept in vector optimization problems [J]. *European J Oper Res*, 2010, **201**: 11-22.

[10] Engau A, Wiecek M M. Cone characterizations of approximate solutions in real vector optimization [J]. *J Optim Theory Appl*, 2007, **134**: 499-513.

[11] Gao Y, Yang X M, Teo K L. Optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems [J]. *J Industrial Appli*, 2011, **7**: 483-496.

[12] Gao Y, Hou S H, Yang X M. Existence and optimality conditions for approximate solutions to vector optimization problems [J]. *J Optim Theory Appl*, 2012, **152**: 97-120.

[13] Gutiérrez C, Huerga L, Novo V. Scalarization and saddle points of approximate proper solutions in nearly subconvexlike vector optimization problems [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, **389**: 367-383.