2013年6月 运 筹 学 学 报 第17卷 第2期
June, 2013 Operations Research Transactions Vol.17 No.2

无爪图上团横贯数的界*

梁作松[1] 单而芳[2,†] 管 梅[3]

摘要 设 $G=(V,E)$ 为简单图，图 G 的每个至少有两个顶点的极大完全子图称为 G 的一个团. 一个顶点子集 $S\subseteq V$ 称为图 G 的团横贯集, 如果 S 与 G 的所有团都相交，即对于 G 的任意的团 C 有 $S\cap V(C)\neq\emptyset$. 图 G 的团横贯数是图 G 的最小团横贯集所含顶点的数目，记为 $\tau_C(G)$. 证明了棱柱图的补图(除5-圈外)、非奇圈的圆弧区间图和Hex-连接图这三类无爪图的团横贯数不超过其阶数的一半.

关键词 团横贯数，团横贯集，无爪图，界

中图分类号 O157.6

2010 数学分类号 05C69

The bound of clique-transversal numbers in claw-free graphs*

LIANG Zuosong[1] SHAN Erfang[2,†] GUAN Mei[3]

Abstract A clique-transversal set S of a graph $G=(V,E)$ is a subset of vertices of G such that S meets all cliques of G, where a clique is defined as a complete subgraph maximal under inclusion and having at least two vertices. The clique-transversal number, of G denoted by $\tau_C(G)$, is the minimum cardinality of a clique-transversal set in G. In this paper we discuss the bound of clique-transversal numbers in several subclasses of claw-free graphs.

Keywords clique-transversal number, clique-transversal set, claw-free graph, bound

Chinese Library Classification O157.6

2010 Mathematics Subject Classification 05C69

0 引 言

本文所讨论的图均为有限简单无向图. 我们用 $G=(V,E)$ 表示一个图，其中 V 和 E

收稿日期：2012年11月21日

* 国家自然科学基金 (No. 11171207), 安徽省高等学校省级优秀青年人才基金 (No. 2012SQRL170)

1. 上海大学数学系，上海 200444；Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China

2. 上海大学管理学院，上海 200444；School of Management, Shanghai University, Shanghai 200444, China

3. 合肥学院数学与物理系，合肥 230601；Department of Mathematics and Physics, Hefei College, Hefei 230601, China

† 通讯作者 Corresponding author, Email: efshan@shu.edu.cn

分别表示图的点集和边集. 图 G 中点的数目称为图的阶数. 对 $V' \subseteq V$，用 $G[V']$ 表示由 V' 所导出的子图. 对于点 $v \in V$, $N(v)$表示 v 在 G 中所有邻居的集合. 点 v 的度数定义为$|N(v)|$，记作 $d_G(v)$ 或者简记为 $d(v)$. 此外，用 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示图 G 的最大度和最小度. 对 $X, Y \subseteq V$, $E(X,Y)$ 表示点集 X 和 Y 之间边的集合. K_n, P_n 和 C_n 分别表示具有 n 个点的完全图，路和圈. 图 G 中的圈 C_3 也叫做图 G 的一个三角形. 在本文中团表示图中至少包含 2 个点的极大的完全子图. 因此在这里孤立点不是团. 一个 i-团表示具有 i 个点的团. 图 G 的独立集是指图的两两不邻接的点的集合. 本文中未加说明的其他符号和定义可参阅文献[1].

图 G 的一个团横贯集指 G 的一个点子集 S，使得图中的每一个团都至少有一个点在 S 中. 图的一个最小团横贯集是指含点最少的团横贯集. 图 G 的团横贯数 $\tau_C(G)$ 是图的最小团横贯集所含点的数目. 图的团横贯集在网络问题中有着重要的应用. 首先看在通讯网络中的一个应用模型. 每个通讯网络均可归结为一个图，其中图的节点(顶点)对应网络中的成员. 图中的每一个团可代表一组具有快速交换信息能力的成员团体, 也就是通讯网络中的一个聚簇. 在网络图中，图的团横贯集组成一个网络控制中心，它既可通过信息对整个网络实施监控又可以使得每个聚簇中至少拥有一个控制核心. 由于费用关系，尽可能地寻找这样一个具有最少成员的控制中心, 也就是在图中找一个最小团横贯集. 另一个模型来自社会网络. 表示社会网络的图的每个团代表一个具有某种共同特征的团体. 欲在社会网络中确定一个“核心组织”，使得每个团体都能够在此组织内拥有一个席位，这个核心组织形成图的一个团横贯集. 我们的目的是确定这样一个最精简的机构，也就是最小团横贯集. 另外，图的团横贯集理论对于解决图的染色问题也有着重要的理论意义：King[2]注意到寻找图 G 的一个独立团横贯集在设计完美图染色算法时具有关键的作用.

Erdős 等[3]注意到在一般图中求解最小团横贯集问题是 NP-难的. 事实上，最小团横贯集问题在分离图[4]、可比较图的补图、平面图、线图和全图[5]上仍然为NP-难问题. 不过，人们已经发现最小团横贯集问题在可比较图[6]、强弦图[4,5]、距离遗传图[7]和Helly-圆弧图[5]上存在多项式时间算法. 其次，人们在确定图的团横贯数的界方面取得了一些结果. Erdós 等[3]证明了如下结果：(1) 对任意 n阶图其团横贯数不超过 $n-\sqrt{2n}+\frac{3}{2}$；(2) 若图 G 不是 5 个点的奇圈且 G 的每一个团至少有 $(k+1)$个点，则图 G 的团横贯数不超过 $n-\sqrt{kn}$; (3) 存在图 G，使得 G 的团横贯数几乎逼近图的阶数 n，即有 $\tau_C(G) \geqslant n-o(n)$ 成立. 基于(3)的事实，对特殊图类估计其团横贯数的界显得颇有意义. Andreae 等[8]研究了团横贯数不超过图的阶数的一半的图, 他们证明了除奇圈外的所有连通线图其团横贯数不超过图的阶数的一半；同时证明了除 5 个小阶图外所有线图的补图其团横贯数不超过图的阶数的一半. 图 G 的一个 k-团染色是指用 k 种颜色给图的点着色使得 G 的每一个团至少有 2 种颜色. 显然，如果图 G 是 2-团可染色的，那么图的每一个色类都形成图 G 的一个团横贯集，因此图 G 的团横贯数不超过图的阶数的一半. Bacsó 等[9]证明了不含奇洞的无爪图是 2-团可染色的，这说明不含奇洞的无爪图其团横贯数不超过它的阶数的一半. Bacsó 和Tuza[10]进一步证明了除奇圈外，最大度至多为 4 的无爪图是 2-团可染色的. 关于团横贯数研究的进展情况可参见文献[7,11-17].

本文讨论了几类无爪图的团横贯数的界. 我们证明了三类无爪图即棱柱图的补图(除5-圈外)、非奇圈的圆弧区间图和 Hex-连接图的团横贯数不超过它们阶数的一半.

1 无爪图上的团横贯数

本节开始讨论棱柱图的补图、圆弧区间图和Hex-连接图的团横贯数的上界.

1.1 棱柱图的补图的团横贯数

在图论中，图 G 被称为棱柱图(prismatic)，如果对 G 的每一个三角形 T, T 之外的每一个点 v 在该三角形 T 中恰有一个邻居. 著名组合数学专家Chudnovsky 和 Seymour 注意到棱柱图的补图是一类无爪图并且借助棱柱图的补图给出了无爪图的一个结构分解定理[18]. 这里我们证明了除 5-圈外，每个棱柱图的补图的团横贯数不超过它的阶数的一半. 为了完成此证明, 首先给出下列引理.

引理 1.1 设图 G 是一个不含三角形的图且 (X,Y) 是图的点集 $V(G)$ 的一个划分. 若 G 满足如下条件:

(*i*) X 是 G 的一个独立点集;

(*ii*) $|X|=|Y|=m\geqslant 3$;

(*iii*) 对于点 $x\in X$, $y\in Y$, 有 $d(x)\geqslant(m-1)$ 和 $d(y)\geqslant m$,

则 G 是具有二分类 (X,Y) 的完全二部图.

证明 我们只需证明图 $G[Y]$ 不含任何边即可. 假设 $G[Y]$ 中存在一条边，由图 G 不含三角形以及条件(i)和(iii), 可得到对每一个点 $x\in X$, 必有 $d(x)=m-1$. 另外，如果对 X 中的任意两点 x_1 和 x_2 都有 $N(x_1)=N(x_2)$, 则 $Y\setminus N(x_1)$ 恰含有一个点，记为 y. 则 y 最多与 $Y\setminus\{y\}$ 中的点相邻接从而 $d(y)$ 不超过 $(m-1)$, 与 $d(y)\geqslant m$ 矛盾. 因此可假定存在点 $x_1,x_2\in X$, 有 $N(x_1)\neq N(x_2)$, 不妨设 $\{y_1\}=N(x_1)\setminus N(x_2)$ 以及 $\{y_m\}=N(x_2)\setminus N(x_1)$. 此时, 因为 G 不含三角形，则图 $G[Y]$ 最多含有一条边 y_1y_m. 又由我们的假设知 $G[Y]$ 中恰存在一条边 y_1y_m. 此时考虑 X 与 Y 之间的边数. 一方面因对每一个点 $x\in X$ 必有 $d(x)=m-1$, 可得 $|E(X,Y)|=m(m-1)$. 另一方面，点 y_1 和 y_m 在 X 中至少要有 $(m-1)$ 个邻居而 Y 中其他点在 X 中至少要有 m 个邻居，从而得到 $m(m-1)=|E(X,Y)|\geqslant(m-2)m+2(m-1)$, 也即 $m\leqslant 2$, 与 $m\geqslant 3$矛盾. 所以 $G[Y]$ 中没有边. 于是得到 G 是一个完全二部图且 (X,Y) 为其点集的二分类.

定理 1.1 设 G 是一个 n 阶棱柱图的补图且 G 不是 5-圈，则 $\tau_C(G)\leqslant\frac{n}{2}$.

证明 设图 G 是一个棱柱图的补图，则 $\overline{G}$ 是一个棱柱图. 我们分以下情况证明该定理.

情形1 $\overline{G}$ 无三角形.

如果 $\overline{G}$ 是非连通的，则图 G 的每个团包含 $\overline{G}$ 的每个分支的至少一个点. 设 C 是 $\overline{G}$ 中具有最少点数的一个分支，则 $V(C)$ 必是 G 的一个团横贯集，从而有 $\tau_C(G)\leqslant\frac{n}{2}$. 如果 $\overline{G}$ 是连通的. 设 $v\in V(\overline{G})$ 且有 $d_{\overline{G}}(v)=\delta(\overline{G})$. 我们定义：$A_0=\{v\}$；$A_1=N_{\overline{G}}(v)$；$\forall i\geqslant 2$, $A_i=N_{\overline{G}}(A_{i-1})\setminus(A_{i-1}\cup A_{i-2})$. 易知集合 A_i 为 $\overline{G}$ 中与点 v 的距离为 i 的点的全体. 这样，对 A_i,A_j, 若 $|i-j|\geqslant 2$, 则在 $\overline{G}$ 中 A_i 与 A_j 之间没有边相连, 因此在 G 中 A_i 与 A_j 之间有边存在. 设 $d=\max\{i|A_i\neq\emptyset\}$.

假定 $d=1$, 由于 $\overline{G}$ 中无三角形，所以 $\overline{G}[A_1]$ 没有边，因点 v 为 $\overline{G}$ 的最小度点, 故可得 $\overline{G}=K_2$. 这意味着 G 由两个孤立点组成. 由于孤立点不是团，容易得出 $\tau_C(G)=0\leqslant\frac{n}{2}$.

假定 $d=2$, 则 G 中的每个团必为下列情形之一：(i) 由 $G[A_1]$ 组成；(ii) 它由点 v 和 A_2 的部分点组成；(iii) 它由 A_1 的部分点和 A_2 的部分点组成. 如果 $d=2$ 且 $d_{\overline{G}}(v)=1$, 则由于 $\overline{G}$ 中不含三角形，从而 $\overline{G}$ 是一个星图. 此时，显然有 $\tau_C(G)=1\leqslant\frac{n}{2}$. 如果 $d=2$ 且 $d_{\overline{G}}(v)=\delta(\overline{G})=2$, 我们考虑集合 A_2. 如果 $|A_2|\leqslant 2$, 因为 G 不是 5-圈，那么 G 必是两个 K_2 的不交并或者是一个三角形和一个 K_2 的不交并, 此时容易知道结论成立. 如果 $|A_2|\geqslant 3$, 由于 $A_0\cup A_1$ 组成 G 的一个团横贯集，从而得到 $\tau_C(G)\leqslant\frac{n}{2}$. 如果 $d=2$ 且 $d_{\overline{G}}(v)=\delta(\overline{G})\geqslant 3$, 设 u 是 v 在 $\overline{G}$ 的一个邻居. 则易知 $A_0\cup A_1$ 和 $\{u\}\cup A_2$ 都是图 G 的团横贯集. 若有 $|A_0\cup A_1|\leqslant\frac{n}{2}$ 或者 $|\{u\}\cup A_2|\leqslant\frac{n}{2}$, 则结论成立. 若不然，则 $|A_1|=|A_2|\geqslant 3$. 由于 v 为 $\overline{G}$ 的最小度点，因此得到 $\overline{G}[A_1\cup A_2]$ 满足引理1.1. 于是 $\overline{G}[A_1\cup A_2]$ 是一个完全二部图从而易知 $\tau_C(G)=2\leqslant\frac{n}{2}$. 结论成立.

假定 $d\geqslant 3$, 则在图 G 中， $A_0\cup A_1$ 中的每个点与 $A_i(i\geqslant 3)$ 中的所有点都邻接. 则容易验证 $A_0\cup A_1$ 和 $V(G)\setminus(A_0\cup A_1)$ 都是 G 的团横贯集. 因此 $\tau_C(G)\leqslant\frac{n}{2}$.

情形2 $\overline{G}$ 有三角形.

在这种情形下，对 $\overline{G}$ 中的每一个三角形 T 及 $\overline{G}$ 中不在 T 中的每一个点 v, 我们有 v 在 T 中有且只有一个邻居. 设 $T=[uvw]$ 是 $\overline{G}$ 的一个三角形，则集合 $S_1=N_{\overline{G}}(v)\setminus\{u,w\}$, $S_2=N_{\overline{G}}(u)\setminus\{v,w\}$ 以及 $S_3=N_{\overline{G}}(w)\setminus\{u,v\}$ 是两两不交的点集. 我们只需分以下情况考虑图 G 的团横贯集. 假定 $S_1=S_2=S_3=\emptyset$, 则 G 仅由三个孤立点构成，结论显然成立. 假定 $S_1=S_2=\emptyset$ 但 $S_3\neq\emptyset$, 则$\{u,v\}$ 是 G 的一个团横贯集，从而 $\tau_C(G)\leqslant\frac{n}{2}$. 假定 $S_1=\emptyset$, $S_2\neq\emptyset$ 以及 $S_3\neq\emptyset$. 此时，若 $|S_2|=|S_3|=1$, 则易知 $\tau_C(G)=2$, 结论成立. 若否，则 $\{u,v,w\}$ 是 G 的一个团横贯集，从而仍然有 $\tau_C(G)\leqslant\frac{n}{2}$. 假定 S_1, S_2, S_3 都为非空集，不妨假设 $1\leqslant|S_1|\leqslant|S_2|\leqslant|S_3|$. 此时，若 $|S_3|\leqslant 2$, 则容易验证 $\tau_C(G)\leqslant\frac{n}{2}$. 若 $|S_3|\geqslant 3$, 则 $S_1\cup\{u,v,w\}$是 G 的一个团横贯集，从而有 $\tau_C(G)\leqslant\frac{n}{2}$. 结论得证.

1.2 圆弧区间图的团横贯数

圆弧图和圆弧区间图是两类模型不同的图. 它们的定义如下. 圆弧图是由圆上一系列弧形成的交图. 设 $\mathcal{I}=\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$ 是圆 C 上的一系列弧的集合，则 $\mathcal{I}$ 所对应的圆弧图为图 $G=(V,E)$, 其中 $V=\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$, $E=\{(I_i,I_j)|I_i\cap I_j\neq\emptyset\}$. 此时我们称 $\mathcal{I}$ 为圆弧图 G 的弧模型. 设$\mathcal{I}'$是圆C的一些区间的集合(这里的区间是指同构于$[0,1]$的圆上的弧且不存在其中的三个区间覆盖整个圆C)而V是圆C上一些有限点的集合. 在图 $G=(V,E)$ 中，对 $u,v\in V$, $uv\in E$当且仅当点 u 和 v 在 $\mathcal{I}'$ 的同一区间中. 这样构成的图称为圆弧区间图并且称 $\mathcal{I}'$ 和 V 为圆弧区间图 G 的模型. Chudnovsky和Seymour[18,19]首先给出圆弧区间图的定义并说明了圆弧区间图是一类无爪图. 尽管圆弧图和圆弧区间图是两类模型不同的图，Chudnovsky和Seymour[19]指出圆弧区间图为圆弧图的一个子类，即圆弧区间图存在弧模型. 正如引言中所提到的，图的一个 2-团染色是指用 2 种颜色给图的每一个点着色，使得图 G 的每一个团至少有 2 种颜色. Cerioli和 Korenchendler[20] 证明了：除奇圈外，每个圆弧图 G 是 2-团可染色的. 由于对 2-团可染色的图每一个颜色类都构成了图的一个团横贯集，由此立即得到如下的结论.

定理 1.2 *若图 G 是一个 n 阶圆弧区间图且非奇圈，则 $\tau_C(G)\leqslant\frac{n}{2}$.*

注 由于 n 阶偶圈为圆弧区间图且团横贯数 $\tau_C(G)=\frac{n}{2}$, 从而定理1.2 的界是紧的.

1.3 Hex-连接图的团横贯数

设图 $G=(V,E)$, 其中 (V_1,V_2) 是 V 的一个划分. 若对于 $i=1,2$, 存在完全图 $A_i,B_i,C_i\subseteq G[V_i]$ 且满足如下性质：

(1) 对 $i=1,2$，集合 $V(A_i),V(B_i),V(C_i)$ 恰形成 V_i 的一个划分,

(2) 除了 A_1 和 A_2, B_1 和 B_2 以及 C_1 和 C_2 之间没有边外，V_1 和 V_2 之间的任何两点是相连的,

则称图 G 是一个Hex-连接图. Chudnovsky 和 Seymour 注意到Hex-连接图是一类无爪图并且借助棱柱图的补图给出了无爪图的一个结构分解定理[18].

对于Hex-连接图的团横贯数，我们给出如下定理.

定理 1.3 *若 G 是一个 n 阶Hex-连接图，则 $\tau_C(G)\leqslant\frac{n}{2}$. 特别地，若 $n=|V(G)|\geqslant 10$, 则 $\tau_C(G)\leqslant\frac{n}{3}+2$.*

证明 由Hex-连接图的结构可知：图 G 的每个团 C 必具有如下的划分形式之一：

(1) $V(C)=V(A_i)\cup V(B_j)$ 或者 $V(C)=V(A_i)\cup V(C_j)$ 或者 $V(C)=V(B_i)\cup V(C_j)$, 其中 $i\neq j$；

(2) $V(C)=V(A_i')\cup V(B_i')\cup V(C_i')$, 其中 $V(A_i')\subseteq V(A_i)$, $V(B_i')\subseteq V(B_i)$, $V(C_i')\subseteq V(C_i)$；

(3) $V(C)=V(A_i')\cup V(B_i')\cup V(C_j')$ 或者 $V(C)=V(A_i')\cup V(C_i')\cup V(B_j')$ 或者 $V(C)=V(B_i')\cup V(C_i')\cup V(A_j')$, 其中 $i\neq j$.

下面讨论图 G 的团横贯集. 若图 G 的阶数至多为 9, 则容易验证图 G 的团横贯数 $\tau_C(G)\leqslant\frac{n}{2}$. 若 G 的阶数至少为 10, 且不妨假设 $|A_1\cup A_2|\leqslant|B_1\cup B_2|\leqslant|C_1\cup C_2|$. 则有 $|A_1\cup A_2|\leqslant\frac{n}{3}$. 取 $u\in B_1$, $v\in C_1$, 则容易验证 $A_1\cup A_2\cup\{u,v\}$ 是图 G 的一个团横贯集，从而 $\tau_C(G)\leqslant\frac{n}{3}+2\leqslant\frac{n}{2}$. 结论得证.

注 由于 6 阶偶圈可以看做一个Hex-连接图且团横贯数 $\tau_C(G)=\frac{n}{2}$, 从而定理1.3 的界是紧的.

2 结论和展望

本文证明了几类无爪图的团横贯数不超过其阶数的一半. 在此之前，除奇圈外，人们已证明了几类其它无爪类图也满足它们的团横贯数不超过其阶数的一半[8−10,16]，而且目前尚未发现非奇圈的无爪图其团横贯数超过其阶数的一半. 作为本文的结束，我们提出如下问题.

问题: 对任意阶数为 n 的非奇圈连通无爪图 G，它的团横贯数是否满足 $\tau_C(G)\leqslant\frac{n}{2}$?

参 考 文 献

[1] Bondy J A, Murty U S R. *Graph Theory* [M]. Berlin: Springer, 2008.

[2] King A D. Hitting all maximum cliques with a stable set using lopsided independent transversals [J]. *Journal of Graph Theory*, 2010, **67**: 300-305.
[3] Erdős P, Gallai T, Tuza Z. Covering the cliques of a graph with vertices [J]. *Discrete Math*, 1992, **108**: 279-289.
[4] Chang G J, Farber M, Tuza Z. Algorithmic aspects of neighbourhood number [J]. *SIAM J Discrete Math*, 1993, **6**: 24-29.
[5] Guruswami V, Rangan C P. Algorithmic aspects of clique-transversal and clique-independent sets [J]. *Discrete Appl Math*, 2000, **100**: 183-202.
[6] Balachandhran V, Nagavamsi P, Rangan C P. Clique transversal and clique independence on comparability graphs [J]. *Information Processing Letters*, 1996, **58**: 181-184.
[7] Lee C M, Chang M S. Distance-hereditary graphs are clique-perfect [J]. *Discrete Appl Math*, 2006, **154**: 525-536.
[8] Andreae T, Schughart M, Tuza Z. Clique-transversal sets of line graphs and complements of line graphs [J]. *Discrete Math*, 1991, **88**: 11-20.
[9] Bacsó G, Gravier S, Gyárfás A, et al. Coloring the maximal cliques of graphs [J]. *SIAM J Discrete Math*, 2004, **17**: 361-376.
[10] Bacsó G, Tuza Z. Clique-transversal sets and weak 2-colorings in graphs of small maximum degree [J]. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 2009, **11**: 15-24.
[11] Andreae T. On the clique-transversal number of chordal graphs [J]. *Discrete Math*, 1998, **191**: 3-11.
[12] Bonomo F, Chudnovsky M, Durán G. Partial characterizations of clique-perfect graphs I: Subclasses of claw-free graphs [J]. *Discrete Appl Math*, 2008, **156**: 1058-1082.
[13] Durán G, Lin M C, Szwarcfiter J L. On clique-transversals and clique-independent sets [J]. *Annals of Operations Research*, 2002, **116**: 71-77.
[14] Lakshmanan S A, Vijayakumar A. The $\langle t \rangle$-property of some classes of graphs [J]. *Discrete Math*, 2008, **309**: 259-263.
[15] Liang Z S, Shan E F. Approximation algorithms for clique-transversal sets and clique-independent sets in cubic graphs [J]. *Information Processing Letters*, 2011, **111**: 1104-1107.
[16] Shan E F, Cheng T C E, Kang L Y. Bounds on the clique-transversal number of regular graphs [J]. *Science in China A: Mathematics*, 2008, **51**: 851-863.
[17] Tuza Z. Covering all cliques of a graph [J]. *Discrete Math.*, 1990, **86**: 117-126.
[18] Chudnovsky M, Seymour P. Claw-free graphs IV. Decomposition theorem [J]. *J. Combin. Theory Ser. B*, 2008, **98**: 839-938.
[19] Chudnovsky M, Seymour P. Claw-free graphs III. Circular interval graphs [J]. *J. Combin. Theory Ser. B*, 2008, **98**: 812-834.
[20] Cerioli M R, Korenchendler A L. Clique-coloring circular-arc graphs [J]. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2009, **35**: 287-292.