

纯方位跟踪中最优轨线的影响因素分析

张 武¹, 赵宗贵², 赵 丰¹, 刘 敏¹

(1. 解放军理工大学指挥自动化学院, 江苏 南京 210007;
2. 中国电子科技集团公司第 28 研究所, 江苏 南京 210014)

摘 要: 针对常加速目标跟踪的最优观测者轨迹问题, 基于最优控制理论建立最优观测者轨迹的优化模型, 然后运用解析法得到全局精度指标下常速率观测者最优航向的必要条件, 通过仿真讨论目标加速度、观测者速率、目标与观测者的初始距离、目标航向对最优观测者轨迹的影响。仿真结果表明, 当目标从近处以较小加速度作接近观测者的运动时, 观测者的最优轨迹较光滑; 为对常加速目标进行精确跟踪, 观测者应沿最优轨迹作高速率的机动。

关键词: 纯方位跟踪; 最优观测者轨迹; 最小值原理; 常加速运动

中图分类号: TP 273.1; TN 953.5 **文献标志码:** A

Analysis of influencing factors on the optimal observer trajectory in bearings-only tracking

ZHANG Wu¹, ZHAO Zong-gui², ZHAO Feng¹, LIU Min¹

(1. Inst. of Command and Automation, the PLA Univ. of Science & Technology, Nanjing 210007, China;
2. 28th Inst., Chinese Electronic Technology Corporation, Nanjing 210014, China)

Abstract: The optimization of an observer trajectory when the observer tracks a constant acceleration target is taken into account. First, optimal control theory is applied to establish the optimal trajectory model of an observer. Second, at the global range accuracy criterion, necessary conditions for the optimal observer course are resolved by analytical means. Finally, the influences of speed of the observer, acceleration of targets, relative target initialization range, and target course on the optimal observer trajectory are discussed by simulation. Simulation results show that the optimal observer trajectory is almost smooth when near targets approach the observer at small acceleration and the observer should maneuver at high speed along the optimal trajectory for the sake of tracking constant acceleration targets accurately.

Keywords: bearings-only tracking; optimal observer trajectory; minimum principle; constant acceleration movement

0 引 言

无源探测具有隐蔽性好、不受干扰等优点, 是电子战环境中目标跟踪的重要手段。研究表明, 观测者要对目标始终保持可观性, 并从采集的方位测量序列中得到某最优准则下目标运动参数的最优估计, 观测者须沿最优轨迹运动^[1]。

纯方位跟踪的最优观测者轨迹(最优轨迹)系指观测者沿此轨迹运动所获得的目标相对方位能使目标运动参数(位置、速度等)估计达到最优。目前, 最优轨迹问题典型成果有: 文献[1]运用极大值原理, 在全局精度指标和距离精

度指标下, 导出常速目标跟踪的最优轨迹必要条件, 并通过仿真得到最优轨迹的部分性质。文献[2]以 Fisher 信息矩阵(Fisher information matrix, FIM)行列式的下界为优化性能指标, 采用最优控制论中的 Halmilton-Jacobi 方程, 研究固定目标定位时最优轨迹。文献[3]以 Fisher 信息矩阵的行列式为优化指标, 采用非线性优化算法求解最优轨迹。文献[4]在文献[3]的基础上引入了轨迹约束范围, 分别采用梯度数值方法和微分包含方法研究固定目标定位时的最优轨迹, 目标状态估计精度较文献[3]有改进。文献[5]采用多重线性代数方法, 得出了在远距离、有界控制的前提

下,观测者的最优控制序列为 bang-bang 控制。文献[6]将最优轨迹建模为离散时间随机优化控制问题,运用随机逼近方法进行研究。文献[7]基于固定目标的最优观测者轨迹集合,实时计算距离-基线比率并结合马尔科夫模型来确定近似常速目标跟踪的最优轨迹。文献[8]针对固定目标定位的最优观测者轨迹问题,利用最优轨迹对相关参数的比例缩放不变性,提出了随机搜索算法,该算法能够实时产生最优观测者轨迹,且在没有目标位置先验信息的情况下,当观测者沿次优轨迹运动时仍能够保证不丢失目标。文献[9]在方位差最大的性能指标下,得到最优轨迹的部分定性结论。总之,现有研究成果主要是固定目标定位和常速目标跟踪时的最优轨迹。

本文基于最优控制论中的最小值原理,在全局精度指标下建立常加速目标跟踪的最优轨迹模型,并通过数值法分析相关参数对最优轨迹的影响。

1 常加速目标纯方位跟踪原理

1.1 纯方位目标跟踪模型

设观测者和目标在同一平面内运动,如图 1 所示。

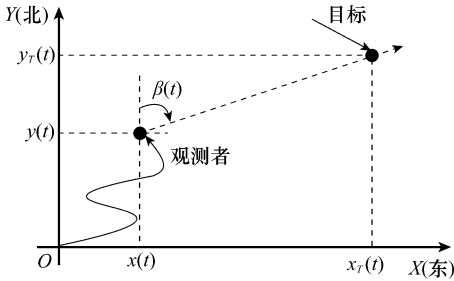


图 1 纯方位跟踪几何图示

设目标作常加速运动,其状态向量记为 $\mathbf{X}_T(t) \triangleq [x_T(t), y_T(t), V_{Tx}(t), V_{Ty}(t), a_{Tx}, a_{Ty}]^T$, 其中 $[x_T(t), y_T(t)]$ 、 $[V_{Tx}(t), V_{Ty}(t)]$ 、 $[a_{Tx}, a_{Ty}]$ 分别表示 t 时刻目标的位置、速度、加速度。则对任意时刻 t' 和 t'' , 目标的离散状态向量满足递推方程式(1)。

$$\mathbf{X}_T(t'') = \Phi(t'', t') \mathbf{X}_T(t') \quad (1)$$

式中

$$\Phi(t'', t') = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & (t'' - t') \mathbf{I}_2 & \frac{1}{2} (t'' - t')^2 \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{I}_2 & (t'' - t') \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{O}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

式中, $\mathbf{I}_2, \mathbf{O}_2$ 分别表示 2×2 阶单位矩阵和零矩阵。

观测者以常速率 V 沿航向 $u(t)$ 运动,它在 t 时刻的位置记为 $[x(t), y(t)]$, 则其运动方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V \sin u(t) \\ \dot{y}(t) = V \cos u(t) \\ x(0) = x_0; y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

记 $\beta(t) \triangleq \beta(t; \mathbf{X}_T)$ 为 t 时刻目标相对于观测者的方位真值,即

$$\beta(t; \mathbf{X}_T) = \arctan \left(\frac{x_T(t) - x(t)}{y_T(t) - y(t)} \right) \quad (3)$$

纯方位跟踪系统的测量方程为

$$\beta_m(t_i) = \beta(t_i) + v(t_i) \quad (4)$$

式中, $t_i (i=1, \dots, k)$ 是测量时刻; $v(t_i)$ 假设是相互独立的均值为零、方差为 σ^2 高斯型测量噪声。

1.2 目标状态估计方法

本文选用最大似然法估计目标状态向量。对于式(1)~式(4)描述的纯方位跟踪系统,设由测量序列 $\{\beta_m(t_i) | t_i \leq t\}$ 得到 t 时刻目标状态 $\mathbf{X}_T(t)$ 的估计值记为 $\hat{\mathbf{X}}_T(t)$, 则在测量误差适度且观测者作适当机动时,该估计值近似高斯无偏且估计误差达到 Cramer-Rao 下界^[10], $\tilde{\mathbf{X}}_T(t/t) = \hat{\mathbf{X}}_T(t) - \mathbf{X}_T(t)$ 可视为零均值、协方差矩阵等于 FIM 之逆的高斯向量。该系统采用最大似然法估计所产生的 FIM^[1] 为

$$\mathbf{F}(t) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t_i \leq t} \Phi^T(t_i, t) \mathbf{b}(t_i) \mathbf{b}^T(t_i) \Phi(t_i, t) \quad (5)$$

式中

$$\mathbf{b}(t) \triangleq \frac{\partial \beta(t; \mathbf{X}_T(t))}{\partial \mathbf{X}_T(t)} =$$

$$\frac{1}{r(t)} [\cos \beta(t) \quad -\sin \beta(t) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

式中, $r(t)$ 表示 t 时刻目标与观测者的相对距离。

2 最优轨迹模型

2.1 基于 FIM 的最优轨迹估计准则

最优轨迹依赖于目标状态的估计方法及其产生的估计误差。由于式(2)中含有未知的航向 $u(t)$, 因此 FIM 中含有 $u(t)$, 由此产生选择 $u(t)$ 的优化准则问题。本文选用全局精度作为确定航向 $u(t)$ 的最优准则。全局精度准则是指在终端时刻 T 使对目标运动参数估计的误差达最小,即

$$Q(\mathbf{F}(T), T) = -\ln |\mathbf{F}(T)| \quad (6)$$

2.2 最优轨迹的约束方程

利用目标状态转移矩阵 $\Phi(t_i, t_j)$ 的初等性质,由式(5)可推导出离散时间状态的 FIM 递推方程为

$$\mathbf{F}(t_k) = \Phi^T(t_{k-1}, t_k) \mathbf{F}(t_{k-1}) \Phi(t_{k-1}, t_k) + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{b}(t_k) \mathbf{b}^T(t_k) \quad (7)$$

依据导数定义,由式(7)可得 FIM 连续时变方程为

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} = -\mathbf{A}^T \mathbf{F}(t) - \mathbf{F}(t) \mathbf{A} + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{b}(t) \mathbf{b}^T(t) \\ \mathbf{F}(t_0) = \mathbf{O}_6 \end{cases} \quad (8)$$

式中, $\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{O}_2 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{O}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{O}_2 & \mathbf{O}_2 \end{bmatrix}$; \mathbf{O}_6 表示 6×6 的零矩阵。式(2)

和式(8)即为 $u(t)$ 应满足的约束方程。

2.3 最优控制意义下的最优轨迹问题

本节运用最优控制论的最小值原理描述和求解常加速目标纯方位跟踪的最优轨迹问题。由于要确定任意 t 时刻观测者的位置 $[x(t), y(t)]$, 且最优准则式(6)是 $\mathbf{F}(t)$ (其元素记为 F_{ij}) 的函数, 因此依据最小值原理, 设待优化系统的状态向量为 $\mathbf{X}(t) = [x(t), y(t), \mathbf{F}_{11}(t), \mathbf{F}_{12}(t), \dots, \mathbf{F}_{66}(t)]^T$, 该系统状态方程为

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = f(\mathbf{X}(t), u(t), t) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \quad (9)$$

式(9)即可转换为

$$\begin{cases} \dot{x} = V \sin u(t) \\ \dot{y} = V \cos u(t) \\ \dot{\mathbf{F}} = -\mathbf{A}^T \mathbf{F}(t) - \mathbf{F}(t) \mathbf{A} + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{b}(t) \mathbf{b}^T(t) \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \mathbf{F}(t_0) = \mathbf{F}_0 = \mathbf{O}_6 \end{cases} \quad (10)$$

与状态向量 $\mathbf{X}(t)$ 对应的协变向量记为 $\Psi(t) \triangleq [\psi_x(t), \psi_y(t), \psi_{11}(t), \psi_{12}(t), \dots, \psi_{66}(t)]^T$, 令 Ψ_F 表示以 ψ_{ij} 为元素的 6×6 矩阵, 由于本问题的最优准则式(6)中只含终端时刻 T 的优化函数, 不包含过程优化的积分项, 因此该问题的 Hamilton 函数为

$$\begin{aligned} H[\mathbf{X}(t), \Psi(t), u(t), t] &\triangleq \Psi^T(t) f(\mathbf{X}(t), u(t), t) = \\ &\psi_x \frac{dx}{dt} + \psi_y \frac{dy}{dt} + \sum_{ij} \psi_{ij} \frac{dF_{ij}}{dt} = \\ &V(\psi_x(t) \sin u(t) + \psi_y(t) \cos u(t)) - \\ &\text{tr} \{ (\mathbf{F}^T(t) \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{F}^T(t)) \Psi_F(t) \} + \\ &\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{b}^T(t) \Psi_F(t) \mathbf{b}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

于是问题转化为

$$u^*(t) = \arg \min_{u(t)} H[\mathbf{X}(t), \Psi(t), u(t), t] \quad (12)$$

由最小值原理知, 在时间范围 $[t_0, T]$ 内, 使 Hamilton 函数在控制区域 $[-\pi, \pi]$ 中达到最小值的最佳航向 $u^*(t)$, 应使对应的最优轨线 $\mathbf{X}^*(t)$ 和协变向量 $\Psi^*(t)$ 满足如下欧拉方程组

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Psi} = f(\mathbf{X}(t), u(t), t) \\ \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} = -\left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \right]^T \Psi \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \Psi(T) = \left[\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{X}} \right]_{t=T} \end{cases} \quad (13)$$

式(13)中的第 2 式即可转换为

$$\begin{cases} \frac{d\psi_x}{dt} = -\frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{b}^T(t) \Psi_F(t) \mathbf{b}(t)] \\ \frac{d\psi_y}{dt} = -\frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial y} [\mathbf{b}^T(t) \Psi_F(t) \mathbf{b}(t)] \\ \frac{d\Psi_F}{dt} = \mathbf{A} \Psi_F(t) + \Psi_F(t) \mathbf{A}^T \end{cases} \quad (14)$$

由式(13)中的第 4 式得

$$\Psi_F(T) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} (-\ln |\mathbf{F}(T)|) = -\mathbf{F}^{-1}(T) \quad (15)$$

由于式(14)中的第 3 式是协变向量 Ψ_F 的一阶齐次线性微分方程, 结合式(15)得该方程的解为

$$\Psi_F(t) = -\Phi(t, T) \mathbf{F}^{-1}(T) \Phi^T(t, T) \quad (16)$$

式中

$$\Phi(t, T) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & (t-T)\mathbf{I}_2 & \frac{1}{2}(t-T)^2 \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{I}_2 & (t-T)\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{O}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

将式(16)代入式(14)前两式, 再由式(13)中第 4 式给出终端条件, 得到

$$\begin{cases} \frac{d\psi_x}{dt} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{b}^T(t) \Phi(t, T) \mathbf{F}^{-1}(T) \Phi^T(t, T) \mathbf{b}(t)) \\ \frac{d\psi_y}{dt} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{b}^T(t) \Phi(t, T) \mathbf{F}^{-1}(T) \Phi^T(t, T) \mathbf{b}(t)) \\ \psi_x(T) = 0; \psi_y(T) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

通过对 Hamilton 函数式(11)求取变量 $u(t)$ 的导数并令其为零, 可知观测者最优航向 $u^*(t)$ 满足

$$u^*(t) = \arctan \left(\frac{\psi_y^*(t)}{\psi_x^*(t)} \right) + \pi \quad (18)$$

需要指出, 式(18)是必要条件, 即满足该条件的点 $\{\mathbf{X}^*(t), \Psi^*(t), u^*(t)\}$ 并不一定对应于式(6)所描述的全局精度指标的最小值。由于 $\psi_x(t)$ 和 $\psi_y(t)$ 的最优值 $\psi_x^*(t)$ 和 $\psi_y^*(t)$ 未知, 因此无法从式(18)得到最优航向 $u^*(t)$, 此时可结合具体情况采用数值迭代法求其近似解。

3 仿真分析

由于采用解析法研究观测者速率、目标加速度等参数对观测者最优轨迹的影响比较困难, 因此采用数值仿真方法进行研究。下面以海上目标隐蔽跟踪为背景进行仿真研究。

3.1 观测者速率对最优轨迹的影响

设目标舰从 (0 km, 10 km) 出发, 以初始速率 4 m/s、120° 航向、0.04 m/s² 的加速度作常加速运动; 观测舰从 (0 km, 0 km) 出发作常速率运动, 5 min 内, 按秒间隔采集方位, 测量误差 σ 标准差等于 0.5°。观测舰速率分别取 4 m/s、8 m/s、12 m/s、16 m/s 进行仿真, 仿真结果如图 2 所示。

由图 2 可见, 观测舰速率为 4 m/s 时, 最优轨迹包含 4 次强机动; 当速率为 8 m/s、12 m/s、16 m/s 时, 最优轨迹包含 3 次较强机动, 且最优轨迹基本光滑。可见, 观测舰速率越高, 其最优轨迹越光滑。

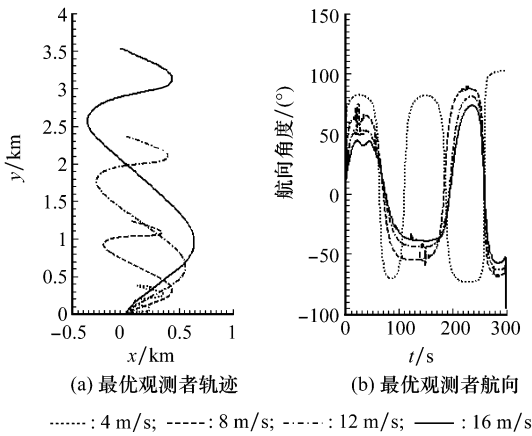


图 2 观测者速率对其最优轨迹及航向的影响

仿真获得相应最优 $Q(T)$ 值分别为 -7.19 、 -11.04 、 -13.75 、 -16.27 ，对应的全局估计误差分别为 7.54×10^{-4} 、 1.6×10^{-5} 、 1.07×10^{-6} 、 8.59×10^{-8} ，因此，观测者进行高速率机动才能对目标进行高精度的跟踪。

3.2 目标加速度对最优轨迹的影响

设目标舰的加速度分别取 0.04 m/s^2 、 0.08 m/s^2 、 0.12 m/s^2 、 0.2 m/s^2 ，观测舰速率为 12 m/s ，其他条件同 3.1 节脚本，仿真结果如图 3 所示。

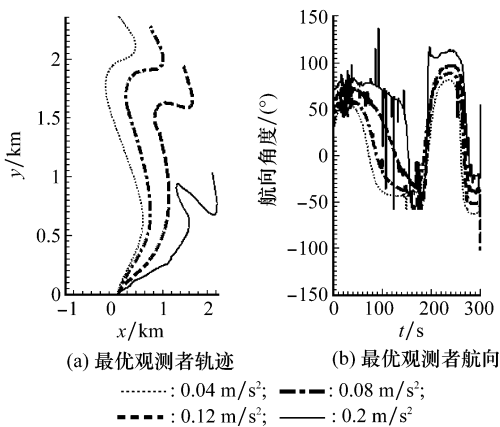


图 3 目标加速度对观测者最优轨迹及航向的影响

仿真得到相应的最优 $Q(T)$ 值分别为 -13.75 、 -14.86 、 -15.68 、 -15.28 ，结合图 3 可知，当目标加速度较小 (0.12 m/s^2 以下) 时，其数量增加可使目标状态估计精度有些许提高，但最优轨迹光滑度降低。当加速度为 0.12 m/s^2 时，最优轨迹在第 $260 \text{ s} \sim 300 \text{ s}$ 内有一次强机动；当目标加速度为 0.2 m/s^2 时，最优轨迹在第 $145 \text{ s} \sim 300 \text{ s}$ 内有两次强机动，且对目标跟踪精度下降。因此，当目标加速度较大时 (如 0.2 m/s^2) 会导致对目标跟踪精度下降且观测舰需作较强机动。

3.3 目标初始距离对最优轨迹的影响

目标舰的初始位置分别取 $(0 \text{ km}, 5 \text{ km})$ 、 $(0 \text{ km}, 10 \text{ km})$ 、 $(0 \text{ km}, 20 \text{ km})$ 、 $(0 \text{ km}, 40 \text{ km})$ ，观测舰的速率为

12 m/s ，其他条件同 3.1 节脚本，仿真结果如图 4 所示。

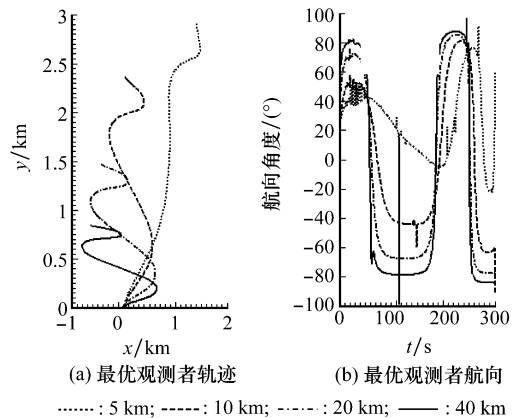


图 4 目标初始距离对观测者最优轨迹及航向的影响

仿真得到相应的最优 $Q(T)$ 值分别为 -32.17 、 -13.75 、 0.41 、 13.49 ，同时结合图 4 可知，观测舰与目标的初始相对距离对观测舰的最优轨迹影响较大，目标与观测舰初始距离越近，最优轨迹越光滑，对目标跟踪精度也越高。

3.4 目标航向对最优轨迹的影响

目标舰加速度 0.08 m/s^2 ，目标航向与观测线的夹角 (从观测舰的观测线顺时针旋转到目标航向) 分别取 0° 、 30° 、 60° 、 90° 、 120° 、 150° 、 180° ，观测舰的速率为 12 m/s ，其他条件同 3.1 节脚本，仿真结果如图 5 所示。仿真得到相应的最优 $Q(T)$ 值分别为 -7.18 、 -8.84 、 -10.66 、 -12.63 、 -14.86 、 -17.42 、 -17.65 。

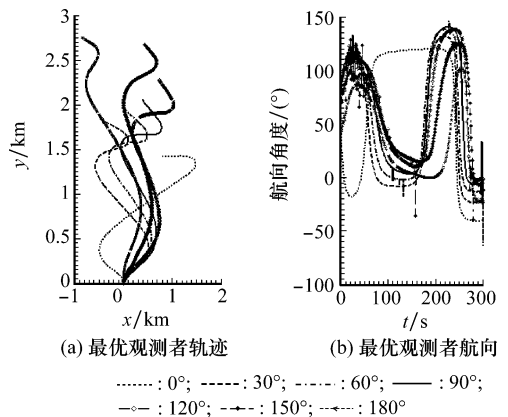


图 5 目标航向对观测者最优轨迹及航向的影响

图 5 结合相应最优 $Q(T)$ 值可知，目标航向与观测线夹角对观测舰的最优轨迹影响较大，该夹角绝对值越大 (夹角越大)，观测舰最优轨迹越光滑，其对目标跟踪精度也越高。

3.5 常速目标单平台纯方位跟踪轨迹对比

纯方位跟踪平台的最优运动轨迹与目标的状态模型和所选用的优化准则 (极大值原理中的性能指标) 等密切相关，由于现有文献讨论的大都是固定目标或常速目标定位跟踪的观测者最优轨迹问题，因此，这里将目标加速度为 0

(即目标作常速运动)时,利用本文模型所获得的观测者最优轨迹与相关文献所获得的观测者最优轨迹进行比较。

关于常速运动目标跟踪时观测者的最优运动轨迹问题,有如下两个定性结论^[1-10]。

(1) 观测者应沿最快接近目标的轨线运动;

(2) 观测者必须不断进行机动,以使得跟踪期间目标测量方位的变化率最大。

设目标以速率 4 m/s,沿 120°航向作常速运动,观测舰速率为 12 m/s。分别利用本文和文献[1]建立的两个最优轨迹模型,经仿真得到观测舰的最优轨迹及最优航向如图 6所示。其中最优轨迹 1 和最优航向 1 是采用本文模型得到的,最优轨迹 2 和最优航向 2 是采用文献[1]模型得到的。

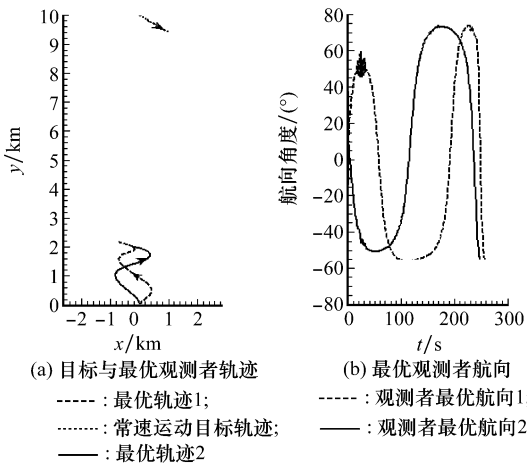


图 6 跟踪常速目标时观测者最优轨迹及航向

从图 6(a)可见,采用本文和文献[1]的最优轨迹模型得到的观测舰优化轨迹均朝向目标作蛇形运动;从图 6(b)可见,观测舰的航向是实时变化的,也就是说观测者须进行航向机动来获得目标状态的可观测性。因此,对于常速目标跟踪,利用本文所建立的观测者最优轨迹与现有文献的相关结论是一致的。然而,当目标退化为常速(加速度为 0)运动时,由于存在估计误差,采用本文模型进行目标状态(六维)估计时,目标加速度并不为 0(尽管接近 0),这会影响到目标速度和位置估计;而文献[1]是针对常速运动目标的最优轨迹模型,目标状态是四维的(位置和速度),不存在目标加速度估计误差对目标速度和位置的影响。因此,对于常速运动目标来说,文献[1]比本文建立的观测者最优轨迹所获得的目标状态(位置和速度)估计更精确一些。但文献[1]模型不能用于建立常加速目标跟踪时观测者的最优轨迹。

4 结束语

本文建立了全局精度指标下常加速目标纯方位跟踪最优观测者轨迹的数学模型,并通过数值仿真研究了相关因素对最优观测者轨迹的影响。仿真表明:为对目标状态进行精确估计,观测者应作高速率的机动;观测者与目标初始相对距离越小,观测者对目标跟踪精度越高;当目标加速度在较低范围内适度增加时,若观测者沿最优轨迹跟踪目标,则可提高对目标的跟踪精度,但最优轨迹光滑度随之下降,而当目标加速度超过某范围(如 3.2 节仿真场景中的 0.12 m/s²)时,观测者需作较强机动,且跟踪精度下降;当目标对观测者做接近航行时,观测者最优轨迹越光滑且对目标跟踪精度也越高。

参考文献:

- [1] Passerieux J M, Cappel D V. Optimal observer maneuver for bearings-only tracking[J]. *IEEE Trans. on Aerospace Electronic System*, 1998, 34(3):777-788.
- [2] Liu P T. An optimum approach in target tracking with bearing measurements[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1987, 56(2):205-214.
- [3] Hammel S E, Liu P T, Hilliard E J, et al. Optimal observer motion for localization with bearing measurements[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 1989, 18(1):171-180.
- [4] Oshman Y, Davidson P. Optimization of observer trajectories for bearings-only target localization[J]. *IEEE Trans. on Aerospace Electronic System*, 1999, 35(3):892-901.
- [5] Cadre J P Le. Optimization of the observer motion for bearings-only target motion analysis[C]// *IEEE Proc. of the 36th Conference on Decision and Control*, 1997:3126-3131.
- [6] Sumeetpal Singh. Stochastic approximation for optimal observer trajectory planning[C]// *IEEE Proc. of the 42th Conference on Decision and Control*, 2003:6313-6318.
- [7] Ghassemi F, Krishnamurthy V. A method for constructing the observer trajectory in bearings-only tracking of targets with a markovian model [C] // *IEEE International Conference of Information Acquisition*, 2005:1-5.
- [8] Ghassemi F, Krishnamurthy V. A stochastic search approach for UAV trajectory planning in localization problems[C]// *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2006:1196-1199.
- [9] 董志荣. 纯方位系统定位与跟踪的本载体最优轨线方程及其最优轨线[J]. *情报指挥控制系统与仿真技术*, 2007, 29(1):7-15.
- [10] Olsder G J. On the optimal maneuvering during bearings-only tracking[C]// *IEEE Proc. of 23th Conference on Decision and Control*, 1984:935-940.