第3章　逐次逼近法

求解线性方程组的迭代解法

本章主要介绍求解线性方程组、非线性方程

之

迭代解法

3.1　解线性方程组的迭代法

前面已经介绍了用直接法求解线性方程组：

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \qquad （3\text{-}1）$$

其中　$\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^{n}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{n}$

在用直接法求解的过程中，我们发现系数矩阵*A*在不断变动，如果A的阶数较大时，占用计算机的内存就很大，而且程序较复杂，对程序设计的技巧要求也较高。

因此，我们希望找到一种在求解过程中系数矩阵不变，且程序设计又不复杂的求解方法，这种方法就是迭代法。

使用迭代法求解（3-1）时，首先要将它变形，变成如下形状的等价方程组

$$x = Bx + f \qquad (3\text{-}2)$$

其中 $B \in \mathbf{R}^{n\times n}, f \in \mathbf{R}^{n}, x \in \mathbf{R}^{n}$

即（3-1）的解是（3-2）的解，反之，（3-2）的解也是（3-1）的解。用不同的方法构造（3−2）就可得到不同的迭代法。（3-2）中的矩阵*B*称为迭代矩阵。

$$Ax = b \Leftrightarrow (3\text{-}2)$$

如果已导出（3-1）的等价方程组（3-2）后，计算（3-1）的解就变成求序列的极限。

取初始向量 $x^{(0)}$ 代入 $x = Bx + f$ 的右端。

$$x^{(1)} = Bx^{(0)} + f$$

$$x^{(2)} = Bx^{(1)} + f$$

$$x^{(3)} = Bx^{(2)} + f$$

$$\vdots$$

其一般形式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (3\text{-}3)$$

通常称使用（3-3）式求解的方法为迭代法，也称迭代过程或迭代格式。

如果对任意 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，都有当 $k \to \infty$ 时，$x^{(k)} \to x^{*}$。

其中 $\boldsymbol{x}^{(k)} = (\boldsymbol{x}_1^{(k)}, \boldsymbol{x}_2^{(k)}, \cdots, \boldsymbol{x}_n^{(k)})^T$，$\boldsymbol{x}^{*} = (\boldsymbol{x}_1^{*}, \boldsymbol{x}_2^{*}, \cdots, \boldsymbol{x}_n^{*})^T$

也可写成

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{*} \qquad \text{即} \qquad \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_i^{(k)} = \boldsymbol{x}_i^{*}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

称该迭代法收敛，否则称迭代法发散。

由于

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

所以收敛迭代法的极限向量 x^*，满足

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f}$$

即为方程组（3-2）的解，从而也是（3-1）的解。

因此，使用迭代法求解就是求向量序列 $\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots$ 的极限向量*x**。

3.1.1 简单迭代法

简单迭代法也称基本迭代法，有些迭代法可以通过对基本迭代法的加速或变形而得到。设线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其中矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$为非奇异， 且$a_{ii}\neq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。

对上式移项和变形后可得等价的方程组：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ \qquad\vdots \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}(b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{ii-1}x_{i-1} - a_{ii+1}x_{i+1} - \cdots - a_{in}x_n) \\ \qquad\vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases} \tag{3-4}$$

将（3-4）写成迭代格式，即

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right] \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3-5}$$

也可写成

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right] \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3-6}$$

迭代法（3-5）或（3-6）称为**Jacobi迭代法**。

例1 将线性方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 & \Rightarrow & x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}\left(3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} + 20\right) \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 & \Rightarrow & x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}\left(-4x_1^{(k)} + x_3^{(k)} + 33\right) \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 & \Rightarrow & x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(-2x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + 12\right) \end{cases}$$

解：写成Jacobi迭代格式（3-5）：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad \textbf{（3-5）}$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}\left(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}\left(33 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}\left(12 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

$$x_1^{(1)} = \frac{20}{8},\quad x_2^{(1)} = \frac{33}{11} = 3,\quad x_3^{(1)} = \frac{12}{4} = 3\,;$$

$$x_1^{(1)} = \frac{20}{8}, \qquad x_2^{(1)} = \frac{33}{11} = 3, \qquad x_3^{(1)} = \frac{12}{4} = 3\,;$$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{8}\left(20 + 3\times 3 - 2\times 3\right) \approx 2.875 \quad \ldots, \quad x_1^{(10)} \approx 3.00032$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{11}\left(33 + 4\times\frac{20}{8} + 3\right) \approx 2.3636 \quad \ldots, \quad x_2^{(10)} \approx 1.999838$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(12 - 2\times\frac{20}{8} - 3\right) \approx 1 \quad \ldots, \quad x_3^{(10)} \approx 0.999881$$

终止条件为：$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le 10^{-5}$。**精确解为：**$x^* = (3, 2, 1)^T$。

在Jacobi迭代过程中，对已经算出来的信息未加充分利用，在计算 $x_2^{(k+1)}$ 时 $x_1^{(k+1)}$ 已经算出，计算 $x_i^{(k+1)}$ 时 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$ 已经算出。一般说来，后面的计算值 $x_i^{(k+1)}$ 比前面的计算值 $x_i^{(k)}$ 要精确些。故对Jacobi迭代法（3−5）可作如下改进。

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33-4x_1^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12-2x_1^{(k)}-x_2^{(k)}) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33-4x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12-2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$ ，得到

$$x_1^{(1)}=2.5$$

$$x_2^{(1)}=3-0.363636\times 2.5\approx 2.0909091$$

$$x_3^{(1)}=3-0.5\times 2.5-0.25\times 2.0909091\approx 1.768939$$

$$\vdots$$

$x_1^{(5)}\approx 2.999843$， $x_2^{(5)}\approx 2.000072$， $x_3^{(5)}\approx 1.000061$。

终止条件为： $\left\| x^{(k+1)}-x^{(k)} \right\| \le 10^{-5}$

将迭代格式可写成如下的分量形式，即

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \\ k = 0, 1, 2, \cdots; \\ i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{3-9}$$

称为**Gauss-Seidel**迭代法。

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$ **Jacobi**迭代法

若记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii-1} & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ -a_{21} & 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ -a_{j1} & \cdots & -a_{jj-1} & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nj-1} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1j} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & -a_{j-1j} & \cdots & -a_{j-1n} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & -a_{n-1n} \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

则
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$$

下面考察**Jacobi**迭代法和**Gauss-Seidel**迭代法的收敛性。

观察Jacobi迭代法

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

则其矩阵的表示形式为：

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

注意:

$$\underset{\boldsymbol{B}}{\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{nn}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}} = \underset{\boldsymbol{D}^{-1}}{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & & & \\ & \dfrac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dfrac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}} \underset{\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}}{\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix} = \underset{\boldsymbol{D}^{-1}}{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & & & \\ & \dfrac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dfrac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}} \underset{\boldsymbol{b}}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}$$

则Jacobi迭代法可写成为：

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

令 $\boldsymbol{B}_J = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}),\ \boldsymbol{f}_J = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$

注意，由 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}$ ，得 $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$ 从而

$$\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}$$

则得（3-1）的等价方程组为： $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}_J\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}_J$

迭代格式（3.5）的等价方程组为： $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}_J\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}_J$

迭代格式（3.6）的等价方程组为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{(k+1)} &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)})\end{aligned} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

将Gauss-Seidel公式改写成

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

从而可写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

从而有

$$(D-L)x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b$$

整理后可得

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b$$

令

$$B_{G-S} = (D-L)^{-1}U \qquad f_G = (D-L)^{-1}b$$

则

$$x^{(k+1)} = B_G x^{(k)} + f_G \quad （k = 0,1,\cdots） \quad （\mathbf{3\text{-}10}）$$

（**3-10**）就是**Gauss-Seidel**迭代法。

迭代法的收敛性

我们要考虑如下问题：

① 如何判断迭代过程是否收敛呢?

② 迭代格式收敛的充要条件、充分条件是什么?

③ 决定迭代收敛速度的因素是什么?

设某种迭代格式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

且该线性方程组的精确解为 $\boldsymbol{x}^*$，则

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f}$$

两式相减，得

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{*}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{*}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{*})=\cdots=\boldsymbol{B}^{k+1}\left(\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}^{*}\right)$$

令 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{*}$，则

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=\boldsymbol{B}^{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)}=\cdots=\boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$$

故当 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\right)=\boldsymbol{0}$

而 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}=\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}^{*}$ 是一个非零的常向量，因此只有

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{B}^{k+1}=\boldsymbol{O}_{n\times n}\quad（零矩阵）$$

定理 3.1 $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=0$（即 $\boldsymbol{x}_i^{(k)}\to\boldsymbol{x}_i^*,\ i=1,2,\cdots,n$）的充分而且必要条件是 $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{O}_{n\times n}\Leftrightarrow\rho(\boldsymbol{B})<1$。

定理 3.2 迭代法 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}$ 对任意$\boldsymbol{x}^{(0)}$和$\boldsymbol{f}$均收敛的充要条件为：$\rho(\boldsymbol{B})<1$。

定理 3.3 （充分条件）若 $\|\boldsymbol{B}\|<1$，则迭代法收敛，且有

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|\le\frac{\|\boldsymbol{B}\|}{1-\|\boldsymbol{B}\|}\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}\|$$

例，$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **Jacobi法和G-S法求解是否收敛。**

解： 由，

$$B_J=D^{-1}(L+U)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

令，

$$\det(\lambda I-B_J)=\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \lambda & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3+\frac{5}{4}\lambda=0$$

得，$\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=\pm i\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\rho(B_J)=\frac{\sqrt{5}}{2}>1$。

由

$$B_G=(D-L)^{-1}U=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & & \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ & 0 & -2\\ & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ & & 0\end{pmatrix}$$

则

$$\det\left(\lambda I-B_{G-s}\right)=\begin{vmatrix}\lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ & \lambda+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ & & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)=0$$

得 $\rho(B_G)=\frac{1}{2}<1$ 从而，J迭代法发散，G-S迭代法收敛。

提示：G-S迭代矩阵为 $B_G=(D-L)^{-1}U$, 则B_G的特征值λ满足：

$$\det\left(\lambda I-(D-L)^{-1}U\right)=\det(D-L)^{-1}\det[\lambda(D-L)-U]=0$$

因为 $\det(D-L)^{-1}\neq 0$，故必有 $\det[\lambda(D-L)-U]=0$

记

$$C=\lambda(D-L)-U=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn}\end{pmatrix}$$

则只需求，$\det\left(C(\lambda)\right)=0$。

例　设线性方程组$Ax=b$, 其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

问使用**Jacobi**法和**G-S**法求解是否收敛。

（1）**Jacobi**迭代法的迭代矩阵为:

$$\boldsymbol{B}_J=\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

则

$$\det\left(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_J\right)=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \lambda & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-\frac{2}{3}\lambda-\frac{1}{4}\lambda=\lambda\left(\lambda^2-\frac{11}{12}\right)=0$$

得　$\rho(\boldsymbol{B}_J)=\sqrt{\frac{11}{12}}=0.9574<1$，故**Jacobi**迭代法收敛。

（2）设G-S迭代法的迭代矩阵$\boldsymbol{B}_G$，由

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_G\right)=\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\right)$$

$$=\det\left((\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\right)\cdot\det\left(\lambda\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}\right)-\boldsymbol{U}\right)=0$$

得 $$\det\left(\lambda\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}\right)-\boldsymbol{U}\right)=\begin{vmatrix} 3\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 2\lambda & 1 \\ -2\lambda & \lambda & 2\lambda \end{vmatrix}=12\lambda^3-8\lambda^2-3\lambda^2$$

$$=\lambda^2(12\lambda\ -11)=0$$

即 $\rho(\boldsymbol{B}_G)=\dfrac{11}{12}=0.9167<1$， 故**G-S**迭代法收敛。

例4　设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}，其中\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

问使用**Jacobi**法和**G-S**法求解是否收敛。

（1）求Jacobi迭代法的迭代矩阵

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & +2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$\det(\lambda I - B_J) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 = 0$$

即 $\rho(B) = 0 < 1$ ，故Jacobi迭代法收敛。

（2）求**G-S**迭代法的迭代矩阵$\boldsymbol{B}_G$，由

$$\det\left(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\right)=\begin{vmatrix}\lambda a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23}\\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & -2\\ \lambda & \lambda & 1\\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda=\lambda(\lambda-2)^2=0$$

进一步得 $\rho(\boldsymbol{B}_G)=2>1$，故**G-S**迭代法发散。

对于某些特殊的方程组，从方程组本身就可判定其收敛性。不必求迭代矩阵的特征值或范数。

定义3.1 如果矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的元素满足不等式

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad \textbf{(3-14)}$$

则称矩阵A为对角占优阵，如果（3-14）中严格不等式成立，称矩阵A为严格对角占优阵。

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

对角占优矩阵　　　　严格对角占优矩阵

可以证明严格对角占优阵A为非奇异矩阵，即

$$\det(A) \neq 0$$

定理3.4（充分性条件）若线性方程组

$$Ax = b$$

中的A为严格对角占优阵，则**Jacobi**法和**Gauss-Seidel** 法均收敛。

THE END

Carl Jacobi 雅各比 （1804.12.10—1851.2.18）

Jacobi出生在德国 Potsdam一个犹太家庭，卒于柏林 。

他对数学主要的贡献是在椭圆函数及椭圆积分上，并把这些理论应用在数论上而得到很好的结果。

Jacobi很具有数学天份。他从欧拉及**Lagrange** 的著作中学习代数及微积分，并被吸引到数论的领域。他处理代数问题的手腕只有**Euler**可以相提并论。

年轻的时候，Jacobi 有许多发现都跟**Gauss**的结果重迭。高斯很看重Jacobi，1849年45岁的时候，除了**Gauss**之外，**Jacobi** 已经是欧洲最有名的数学家了。

1834年**Jacobi**证明：如果一个单变量单值函数有两个周期，则其比值为虚数。

Jacobi在一阶偏微分方程的研究中做出了许多工作，并把他们应用到了微分动态方程中。他还研究了函数的判定，发现了函数判定的**Jacobi**行列式（Jacobian）。他证明：如果n个自变量为n个的函数是相关的，那么其**Jacobian**恒为0，如果是独立的，那么**Jacobian**不恒为0。

他在数学物理上也有建树，在量子力学中他的 Hamilton-Jacobi方程扮演了一个革命性的角色。

1851年1月 Jacobi感染了流感，后来又感染了天花病毒。几天后的1851年2月18日，Jacobi因天花而死去。享年47岁！