

# 基于灰关联度的多目标规划新求解算法

柯宏发<sup>1,2</sup>, 刘思峰<sup>1</sup>, 陈永光<sup>3</sup>, 方志耕<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学经济与管理学院, 江苏 南京 210016;

2. 中国人民解放军 63880 部队, 河南 洛阳 471003;

3. 军械工程学院, 河北 石家庄 050003)

**摘要:** 针对多目标规划的求解问题, 提出了一种新的基于灰色关联度的求解算法, 该算法将多目标规划模型的多个目标函数理想值组成一个理想目标向量。在相同的约束条件下, 基于目标函数向量与理想目标向量之间的灰色关联度而构造一个实值偏好函数。通过最大化这个实值偏好函数, 可把多目标规划问题转变为单目标规划问题, 并给出了基于遗传算法的求解步骤。通过实际算例表明, 该算法正确有效, 且相对于线性加权和法、平方加权和法和理想点法而言, 具有较好的综合距离均衡性能。

**关键词:** 多目标规划; 灰色理论; 灰关联度; 遗传算法; 距离均衡

**中图分类号:** O 221.6

**文献标志码:** A

## New solution algorithm for multiple objective programming model based on grey relational degree

KE Hong-fa<sup>1,2</sup>, LIU Si-feng<sup>1</sup>, CHEN Yong-guang<sup>3</sup>, FANG Zhi-geng<sup>1</sup>

(1. Coll. of Economics and Management, Nanjing Univ. of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. Unit 63880 of the PLA, Luoyang 471003, China;

3. Ordnance Engineering College, Shijiazhuang 050003, China)

**Abstract:** Aiming at the solving of the multiple objective programming model, a new algorithm based on grey relational degree is put forward. Firstly, the ideal target value vector is constructed by all the ideal target values of the multiple objective programming model, and under the same constraint conditions, a grey relational function is formed based on grey relational degree between the actual target value vector and the ideal target value vector. Then, the multiple objective programming model is changed into a single objective programming model through maximizing the grey relational function. Its solution steps based on genetic algorithm are introduced. The example shows that the proposed algorithm is correct and effective, and has the better synthetical performance of distance equilibrium compared with the linear weighted summation, square weighted summation and ideal point method.

**Keywords:** multiple objective programming; grey theory; grey relational degree; genetic algorithm; distance equilibrium

## 0 引言

在许多科学领域中, 很多实际问题建立规划模型时经常需要考虑多个目标, 这种在一组约束条件下具有多个目标函数的优化问题就称为多目标规划。自 20 世纪 70 年代以来, 国内外许多学者对多目标最优化求解方法进行研究, 取得了许多研究成果<sup>[1-13]</sup>。例如, 文献[2]把模糊多目标决策问题转化为一个单目标问题求解, 文献[5]提出了混合遗

传算法解决带上限约束条件的模糊多目标决策问题, 文献[6]提出了一种修改的蚁群算法求解多目标决策问题, 文献[12]针对多目标线性规划提出了一个修改的内点算法。这些算法中最主要的是评价函数法和目标规划法。评价函数法是根据事先给出的多个目标函数, 利用线性加权和法、极大极小法和理想点法等算法将多目标最优化问题转化成单目标最优化问题; 目标规划法则是由决策者事先给出每个目标函数的目标值组成目标向量, 然后将多目标最优化问

收稿日期: 2008-12-01; 修回日期: 2009-05-15。

基金项目: 中国博士后科学基金(20090450217)资助课题

作者简介: 柯宏发(1969-), 男, 高级工程师, 博士, 主要研究方向为电子战系统试验技术、不确定性理论与应用。E-mail: kehongfa2004@163.com

题转化成目标函数向量与目标向量之间在某种意义下的距离的极小化问题。

本文集成评价函数法和目标规划法的思想,将多目标规划模型的多个目标函数理想值组成目标向量。基于均衡每个向量目标函数与理想目标向量距离的思想,在相同的约束条件下,构造一个使向量目标函数与理想目标向量关联度最大的实值偏好函数,从而得到一个单目标规划模型。求出这个单目标规划模型的最优解,这个最优解就被认为是多目标规划模型的最优解。实际算例表明本文所提算法可行有效。

### 1 基于灰关联度的多目标规划求解算法

在多目标规划问题中,把目标函数中求最小统一转化为求最大,多目标规划模型可以表述为

$$\begin{cases} \max f_1(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ \max f_k(\mathbf{X}) \\ \text{s. t.} \begin{cases} g_i(\mathbf{X}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ h_j(\mathbf{X}) = 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{X}$  是一个多维优化向量;  $g_i(\mathbf{X})$  和  $h_j(\mathbf{X})$  为系统约束函数;  $f_1(\mathbf{X}), \dots, f_k(\mathbf{X})$  为目标函数。当  $k=1$  时,上述模型就是单目标规划模型。上述目标函数有时是相互矛盾的,或者是互不相容的,通常不存在最优解使得所有的目标函数同时达到最优,求得的最优解只是一个尽可能达到或接近一个或多个目标函数值的满意解。

#### 1.1 基于灰关联度的求解模型

这里的求解模型是基于将多目标规划模型转化为单目标规划模型而构造实值偏好函数的求解思想。对于多目标规划模型(1),可以先求解第  $p$  个单目标规划模型。

$$\begin{cases} \max f_p(\mathbf{X}) \\ \text{s. t.} \begin{cases} g_i(\mathbf{X}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ h_j(\mathbf{X}) = 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

设其最优解为  $f_p^*$ , 则称  $f^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_k^*)^T$  为多目标规划模型(1)解域中的一个理想点,但是这个理想点根本达不到。于是,大多数情况下,可以寻求距离  $f^*$  最近的  $f$  作为模型(1)的满意解。为了均衡各个目标的理想可达距离差异,可以想象距离  $f^*$  最近的且与  $f^*$  形状相近的  $f$  应该是模型(1)的“最优”解。

考察  $f$  与  $f^*$  的接近性与相似性,只要求得数据列  $f$  与  $f^*$  的灰色关联度即可,用  $\gamma(f, f^*)$  表示。灰色关联度  $\gamma(f, f^*)$  越大,表示曲线  $f$  与曲线  $f^*$  越接近,几何形状越相似。这时极大化  $\gamma(f, f^*)$ , 即求解单目标规划

$$\begin{cases} \max \gamma(f, f^*) \\ \text{s. t.} \begin{cases} g_i(\mathbf{X}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ h_j(\mathbf{X}) = 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

则将该模型的最优解作为多目标规划模型(1)在均衡各个目标的理想可达距离差异意义下的满意解。

#### 1.2 灰关联度

定义灰关联空间  $\{P(X); \Gamma\}$  来分析给定多目标规划模型中目标序列相对于理想点序列的关系,其中  $X$  是数据列集

$$x_i = \{x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(k)\} \in X \quad (4)$$

式中,  $i=0, 1; k=1, 2, \dots, n$ 。

假设数据列  $x_0$  为理想点参考数据列,  $x_1$  为目标值比较数据列,  $\Gamma$  为灰关联映射集,  $\gamma \in \Gamma$  是其中的一个映射。定义  $\gamma_k(x_1, x_0)$  是数据列  $x_0$  和  $x_1$  在  $k$  点的灰关联系数,则在  $k$  点的灰关联系数  $\gamma_k(x_1, x_0)$  为

$$\gamma_k(x_1, x_0) = \frac{\min_k |x_0(k) - x_1(k)| + \xi \max_k |x_0(k) - x_1(k)|}{|x_0(k) - x_1(k)| + \xi \max_k |x_0(k) - x_1(k)|} \quad (5)$$

式中,  $\xi$  为分辨系数,一般取  $\xi=0.5$ 。

考虑各个目标函数的相对重要性,设各个目标函数之间的权向量  $\mathbf{W} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ , 聚集灰关联系数在各目标函数处的值,得到目标序列相对于理想点序列的灰关联度为

$$\gamma(x_0, x_1) = \sum_{k=1}^n \omega_k \cdot \gamma_k(x_0, x_1) \quad (6)$$

#### 1.3 求解算法

通过上述分析,可以得到多目标规划模型的基于灰关联度的求解模型为

$$\begin{cases} \max \sum_{p=1}^k \omega_p \frac{\min_p |f_p - f_p^*| + \xi \max_p |f_p - f_p^*|}{|f_p - f_p^*| + \xi \max_p |f_p - f_p^*|} \\ \text{s. t.} \begin{cases} g_i(\mathbf{X}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ h_j(\mathbf{X}) = 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$

该模型为非线性规划模型,计算工作量很大,可以选用遗传算法进行求解。

遗传算法以遗传学作为其问题求解模型,利用繁殖、基因交叉和变异,使虚拟的物种在优胜劣汰之后进化成新的物种。一般的遗传算法由4部分组成:编码机制、控制参数、适应度函数、遗传算子。其基本步骤为

**步骤1 初始化:** 设置进化代数计数器  $t \leftarrow 0$ , 设置最大迭代数  $T$ , 随机生成  $m$  个个体作为初始群体  $M(0)$ ;

**步骤2 个体评价:** 计算群体  $M(t)$  中各个个体的适应度值  $U(m)$ ;

**步骤3 选择、交叉和变异运算:** 依概率从群体  $M(t)$  中选择若干个体,通过选择算子、交叉算子和变异算子的作用,得到下一代群体  $M(t+1)$ ;

**步骤4 终止条件判断:** 若  $t \leq T$ , 则  $t \leftarrow t+1$ , 继续进行步骤2和步骤3; 若  $t > T$ , 则以进化过程中所得到的最大适应度值的个体作为最优解输出。

### 2 仿真示例

例如,求解多目标规划

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f_1 = 0.5x_1 + 0.6x_2 + 0.4x_3 + 0.9x_4 + 0.7x_5 + 0.4x_6 \\ \max f_2 = 0.9x_1 + 0.4x_2 + 0.5x_3 + 0.4x_4 + 0.6x_5 + 0.9x_6 \\ \max f_3 = 0.75x_1 + 0.8x_2 + 0.85x_3 + 0.6x_4 + \\ \quad 0.85x_5 + 0.7x_6 \\ \text{s. t.} \begin{cases} 3x_1 + x_4 + x_6 = 14 \\ 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 40 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_6 = 18 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6 \end{cases} \end{array} \right.$$

### 2.1 基于灰关联度求解模型的构造

首先求解单目标规划 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f_1 = 0.5x_1 + 0.6x_2 + 0.4x_3 + 0.9x_4 + 0.7x_5 + 0.4x_6 \\ \text{s. t.} \begin{cases} 3x_1 + x_4 + x_6 = 14 \\ 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 40 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_6 = 18 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6 \end{cases} \end{array} \right.$$

其解为  $\mathbf{X}=(4.667, 2, 12, 0, 7, 0)$ , 目标值为 13.233 5;

单目标规划 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f_2 = 0.9x_1 + 0.4x_2 + 0.5x_3 + 0.4x_4 + 0.6x_5 + 0.9x_6 \\ \text{s. t.} \begin{cases} 3x_1 + x_4 + x_6 = 14 \\ 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 40 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_6 = 18 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6 \end{cases} \end{array} \right.$$

其解为  $\mathbf{X}=(0.5, 5.26, 7, 0, 7)$ , 目标值为 24.3;

单目标规划 3:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f_3 = 0.75x_1 + 0.8x_2 + 0.85x_3 + 0.6x_4 + \\ \quad 0.85x_5 + 0.7x_6 \\ \text{s. t.} \begin{cases} 3x_1 + x_4 + x_6 = 14 \\ 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 40 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_6 = 18 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6 \end{cases} \end{array} \right.$$

其解为  $\mathbf{X}=(0.5, 5.26, 7, 0, 7)$ , 目标值为 35.6。

从而得到多目标规划模型解域中的一个理想点  $f^* = (f_1^*, f_2^*, f_3^*)^T = (13.233\ 5, 24.3, 35.6)^T$ , 假设 3 个目标函数的相对重要性是同等的, 于是可以得到多目标规划模型的灰关联度求解模型为

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{p=1}^3 \frac{1}{3} \cdot \frac{\min_p |f_p - f_p^*| + 0.5 \max_p |f_p - f_p^*|}{|f_p - f_p^*| + 0.5 \max_p |f_p - f_p^*|} \\ \text{s. t.} \begin{cases} 3x_1 + x_4 + x_6 = 14 \\ 2x_2 + x_5 = 11 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 40 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_6 = 18 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6 \end{cases} \end{array} \right.$$

式中,  $(f_1, f_2, f_3)^T = (0.5x_1, 0.6x_2 + 0.4x_3 + 0.9x_4 + 0.7x_5 + 0.4x_6, 0.9x_1 + 0.4x_2 + 0.5x_3 + 0.4x_4 + 0.6x_5 + 0.9x_6, 0.75x_1 + 0.8x_2 + 0.85x_3 + 0.6x_4 + 0.85x_5 + 0.7x_6)^T, (f_1^*, f_2^*, f_3^*)^T = (13.233\ 5, 24.3, 35.6)^T$ 。

### 2.2 遗传算法求解

(1) 数据结构与遗传算法参数

基因型采用浮点数编码方法, 根据约束方程组, 只需要确定两个值即可以确定各未知数, 这里需要个体基因为  $x_1$  和  $x_2$ 。由于有约束条件, 所以初始化种群以及通过交叉算子或变异算子产生个体时, 均判断新产生的个体是否满足约束条件。如果通过交叉算子产生的新个体不符合约束条件, 则保留父个体; 如果通过变异算子产生的新个体不符合约束条件, 则保留变异前的个体。

种群大小为 200, 染色体长度为 2, 进化最大代数 200, 总运行次数为 10, 交叉率为 0.6, 变异率为 0.2。每代保留最佳个体, 程序运行结束时所得到的最佳个体为 200 代中所有个体中的最佳个体。

(2) 遗传操作设计

① 适应度函数

适应度函数为个体

$$\sum_{p=1}^k \omega_p \cdot \frac{\min_p |f_p - f_p^*| + \xi \max_p |f_p - f_p^*|}{|f_p - f_p^*| + \xi \max_p |f_p - f_p^*|}$$

的立方。

② 选择

采用轮盘赌选择方法。

③ 交叉

采用中间重组方法, 个体的产生如下。

$$\text{子个体} = \text{父个体} 1 + a^* (\text{父个体} 2 - \text{父个体} 1) \quad (8)$$

式中,  $a$  是一个比例因子, 由  $[-d, 1+d]$  上均匀分布随机数产生, 本文选择  $d=0.25$ 。

④ 变异

采用实值变异方法, 采用如下的变异算子。

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} \pm 0.5LV \quad (9)$$

式中,  $V = \sum_{i=1}^{20} \frac{a(i)}{2^i}$ ;  $a(i)$  以概率 0.05 取值 1, 以概率 0.95 取值 0;  $L$  分别为变量  $x_1$  与  $x_2$  的取值范围长度;  $\mathbf{X}$  为变异前变量取值,  $\mathbf{X}'$  为变异后变量取值。

在 MATLAB 中编程实现该算法, 进化过程中的适应度值曲线如图 1 所示, 在最优个体  $x_1=2.980\ 1, x_2=4.450\ 4, x_3=21.801\ 6, x_4=4.900\ 8, x_5=2.099\ 2, x_6=0.159\ 0$  处得到灰关联度最优值 0.969 6, 原多目标规划目标最优值为

$(f_1^{**}, f_2^{**}, f_3^{**}) = (18.8247, 18.7260, 29.16296)$ 。

### 3 讨论分析

针对3个目标函数的相对重要性,引入不同的权重系数  $W_1 = \{1/3, 1/3, 1/3\}$ 、 $W_2 = \{0.2, 0.3, 0.5\}$ 、 $W_3 = \{0.2, 0.4, 0.4\}$ 和  $W_4 = \{0.1, 0.3, 0.6\}$ ,利用2.2节中相同的数据结构和遗传算法参数,得到每个解向量的目标函数值与理想目标函数点的距离如图2所示。从图2中可以看到,本文算法能客观地、较好地反映决策偏好信息,当目标函数的权重系数增大时,相应目标函数值更逼近于理想目标函数点。

另外,取权重系数  $W_1 = \{1/3, 1/3, 1/3\}$ ,本文算法与国内外目前很成熟的线性加权和法、平方加权和法和理想点

法相比较,同样利用2.2节中相同的数据结构和遗传算法参数,得到每个算法解向量的目标函数值与理想目标函数点的距离如图3所示,其均方差分别为5.8813、5.3083、4.3657和9.6696。取权重系数  $W_4 = \{0.1, 0.3, 0.6\}$ 时,相应的距离如图4所示,其均方差分别为5.4417、5.4278、5.0495和9.6165。在解向量的目标函数值与理想目标函数点的距离均方差意义上讲,本文算法的有效性接近于线性加权和法和平方加权和法,但优于理想点法。而且从两个图中可以看出,本文算法有较好的综合距离均衡性能,不会发生为了追求一个目标的最优化而大幅度地牺牲另一个目标的情况。另外,对比两个图还可以看出,本文算法和线性加权和法和理想点法对权重系数的敏感程度都较高。

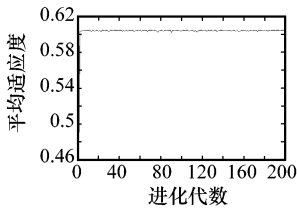


图1 遗传算法的适应度值曲线

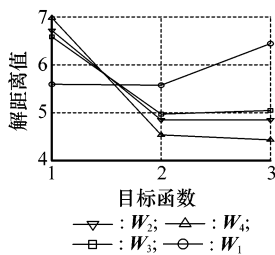


图2 不同权重系数下解距离的比较

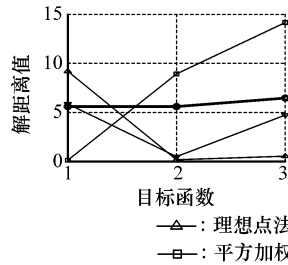


图3  $W_1 = \{1/3, 1/3, 1/3\}$ 时不同算法解距离的比较

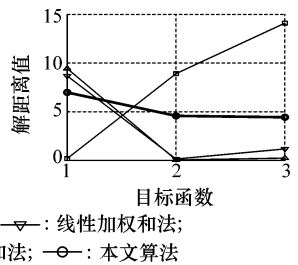


图4  $W_4 = \{0.1, 0.3, 0.6\}$ 时不同算法解距离的比较

### 4 结束语

本文集成评价函数法和目标规划法的思想,将多目标规划模型的多个目标函数理想值组成目标向量,在相同的约束条件下,基于每个向量目标函数与理想目标向量的灰色关联度,将多目标规划模型转化为一个单目标规划模型,求出这个单目标规划模型的最优解,这个最优解就被认为是多目标规划模型的最优解,本文给出了详细的遗传算法求解步骤。最后进行了实际算例的求解,结果表明本文所提算法可行有效。

### 参考文献:

[1] Hipel K W, Radford K J, Fang Liping. Multiple participant-multiple criteria decision making[J]. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 1993, 23(4): 1184-1189.

[2] Yang Lili, Jones B F, Yang Shuanghua. A fuzzy multi-objective programming for optimization of fire station locations through genetic algorithms [J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 181(2): 903-915.

[3] Venkat V, Jacobson S H, Stori J A. A post-optimality analysis algorithm for multi-objective optimization [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2004, 28(3): 357-372.

[4] Hawe G I, Sykulski J K. A scalarizing one-stage algorithm for efficient multi-objective optimization [J]. *IEEE Trans. on Magnetics*, 2008, 44(6): 1094-1097.

[5] Sasaki M, Gen M. A method of fuzzy multi-objective nonlinear programming with GUB structure by hybrid genetic algorithm[J]. *International Journal of Smart Engineering System Design*,

2003, 5(4): 281-288.

[6] Chaharsooghi S K, Meimand K A H. An effective ant colony optimization algorithm (ACO) for multi-objective resource allocation problem (MORAP) [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 200(1): 167-177.

[7] Reddy M J, Kumar D N. An efficient multi-objective optimization algorithm based on swarm intelligence for engineering design[J]. *Engineering Optimization*, 2007, 39(1): 49-68.

[8] Ruetsch G R. An interval algorithm for multi-objective optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2005, 30(1): 27-37.

[9] Shi Chuan, Kang Lishan, Li Yan, et al. Multi-objective optimal evolutionary algorithm based on tree-ranking[J]. *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, 2003, 8(1B): 207-211.

[10] Konak A, Coit D W, Smith A E. Multi-objective optimization using genetic algorithms: a tutorial [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2006, 91(9): 992-1007.

[11] Chen Wenping, Kang Lishan. New evolutionary algorithm for solving multi-objective optimization problems[J]. *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, 2003, 8(1B): 202-206.

[12] Lin C T, Chen C B, Chen P T. On the modified interior point algorithm for solving multi-objective linear programming problems[J]. *International Journal of Information and Management Sciences*, 2006, 17(1): 107-127.

[13] 王正新, 党耀国, 杨虎. 改进的多目标灰靶决策方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2009, 31(11): 2634-2636. (Wang Zhengxin, Dang Yaoguo, Yang Hu. Improvements on decision method of grey target[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, 31(11): 2634-2636.)