第5章

抛物型方程的差分法

抛物型方程有限差分法

1.2 抛物方程有限差分法

椭圆方程描述的状态是不随时间t改变，即与t无关。如温度、电位能量等，这类问题就称为驻定问题。

本章开始我们要讨论与时间t有关的非驻定问题，如抛物方程、双曲型方程。有些驻定问题可以看成某一非驻定问题，当 $t\to\infty$ 的渐进状态，即只关心最终状态，而不关心瞬间状态和中间过程。

对于非驻定问题恰恰是瞬间状态有物理意义，需要我们求解，这就是驻定问题与非驻定问题之间的联系与区别。

下面我们着重讨论求解非驻定问题的差分法。

1.2 简单差分法

考虑一维模型的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) \qquad 0 < t \le T \qquad (1.1)$$

其中a为常数。$f(x)$是给定的连续函数。(1. 1)的定解问题分两类：

第一，初值问题(**Cauchy** 问题)：求具有所需次数偏微商的函数$U(t, x)$满足方程（1. 1）和初始条件：

$$u(x, 0) = \varphi(x) \qquad -\infty < x < \infty \qquad (1.2)$$

第二，边值问题(也称混合问题)：求具有所需次数偏微商的函数满足方程（1. 1）和初始条件：

$$u(x, 0) = \varphi(x) \qquad -\infty < x < \infty \qquad (1.3)_1$$

及边值条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \qquad 0 \le t \le T \qquad (1.3)_2$$

假定 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在相应的区域光滑，并且于 $(0,0)$, $(1,0)$ 点满足相容条件。这样上述问题有唯一充分光滑解。

现在考虑边值问题（**1.1**），（**1.3**）的差分逼近

取 $h=\dfrac{l}{N}$ 为空间步长，$\tau=\dfrac{T}{M}$ 为时间步长，其中N, M是自然数。

$$x=x_j=jh\quad\left(j=0,1,\cdots,N\right),\quad y=y_k=k\tau\quad\left(k=0,1,\cdots,M\right)$$

将矩形域 $\overline{\mathbf{G}}=\{0\le x\le l;\ 0\le t\le T\}$ 分割成矩形网格。其中 (x_i, y_j) 表示网格节点；

$\mathbf{G}_h$表示网格内点（位于开矩形 $\mathbf{G}$ 中的网格节点）的集合；

$\overline{\mathbf{G}}_h$表示位于闭矩形 $\overline{\mathbf{G}}$ 中的网格节点的集合；

Γ_h表示 $\overline{\mathbf{G}}_h-\mathbf{G}_h$ 网格界点的集合；

u_j^k表示定义在网点 (x_j, t_k) 处的函数。

注意到，在节点(x_j, t_k)处的微商和差商之间的下列关系：

$$\frac{u(x_j,t_{k+1})-u(x_j,t_k)}{\tau}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^k+O(\tau)$$

$$\frac{u(x_j,t_{k+1})-u(x_j,t_{k-1})}{2\tau}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^k+O(\tau^2)$$

$$\frac{u(x_j,t_k)-u(x_{j-1},t_k)}{h}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^k+O(h)$$

$$\frac{u(x_{j+1},t_k)-u(x_j,t_k)}{h}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^k+O(h)$$

$$\frac{u(x_{j+1},t_k)-u(x_{j-1},t_k)}{2h}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^k+O(h^2)$$

$$\frac{u(x_{j+1},t_k)-2u(x_j,t_k)+u(x_{j-1},t_k)}{h^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^k+O(h^2)$$

可得到以下几种最简差分格式

（一）向前差分格式

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=a\,\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}+f_j\quad\left(f_j=f\left(x_j\right)\right)\qquad(1.4)_1$$

$$u_j^0=\varphi_j=\varphi\left(x_j\right),\quad u_0^k=u_N^k\qquad(1.4)_2$$

$$j=1,\cdots,N-1,\quad k=0,1,\cdots,M-1$$

取 $r=\frac{a\tau}{h^2}$ 为网比，则进一步有

$$u_j^{k+1}=ru_{j+1}^k+\left(1-2r\right)u_j^k+ru_{j-1}^k+\tau f_j\qquad(1.4)_1'$$

此差分格式是按层计算：

首先，取k=0，则有

$$u_j^1=ru_{j+1}^0+\left(1-2r\right)u_j^0+ru_{j-1}^0+\tau f_j$$

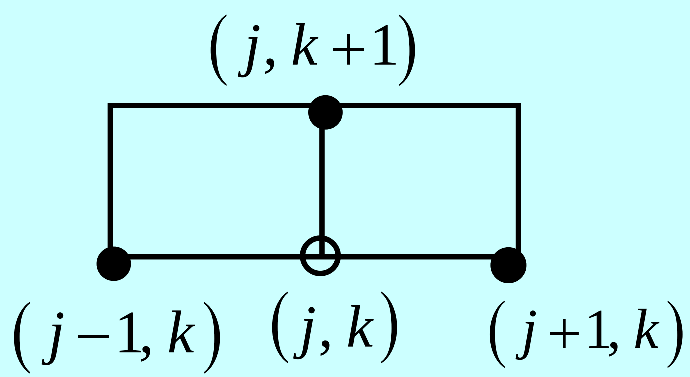
利用初值 $u_j^0=\varphi_j=\varphi\left(x_j\right)$，和边值 $u_0^0=u_N^0$ ，可算出第一层的 u_j^1 ， $j=1,\cdots,N-1$。 再由 $(1.4)_1'$ 取k=1，再利用 u_j^1 ,$u_0^1=u_N^1$ ，可算出第二层的 u_j^2 , $j=0,1,\cdots,N-1$。

如此下去，即可逐层算出所有

$$u_j^k\,,\quad k=0,1,\cdots,M-1\qquad j=1,\cdots,N-1。$$

由于第(k+1)层值可以通过第(k)层值直接表示, 如此的格式成为显格式。

第(k+1)层点和第(k)层点的分布图为：



○ 表示以此点为基列出的差分方程；

● 表示差分格式中用到的点。

对于 $$u_j^{k+1}=ru_{j+1}^k+(1-2r)u_j^k+ru_{j-1}^k+\tau f_j$$

$$k=0,1,\cdots,M-1 \qquad j=1,\cdots,N-1。$$

若记

$$\boldsymbol{u}^k=\left(u_1^k,u_2^k,\cdots,u_{N-1}^k\right)^T \qquad \varphi=\left(\varphi(x_1),\varphi(x_2),\cdots,\varphi(x_{N-1})\right)^T$$

$$\boldsymbol{f}=\left(\tau f(x_1),\tau f(x_2),\cdots,\tau f(x_{N-1})\right)^T$$

则显格式 $(1.4)'_1$ 可写成向量形式

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}^{k+1}=\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{u}^k+\boldsymbol{f}, \quad k=0,1,\cdots,M-1\\ \boldsymbol{u}^0=\varphi\end{cases}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1-2r & r & 0 & \cdots & 0\\ r & 1-2r & r & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & r & 1-2r & r\\ 0 & \cdots & 0 & r & 1-2r\end{pmatrix}$$

若记

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad L_h^{(1)}u_j^k=\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}-a\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}$$

那么，截断误差

$$R_j^k(u)=L_h^{(1)}u\left(x_j,t_k\right)-\left[Lu\right]_j^k=-\tau\left(\frac{1}{12r}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}\right)_j^k+O(\tau)=O\left(\tau+h^2\right)$$

其中 $\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}\right)_j^k$ 是 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 在矩形 $x_{j-1}<x<x_{j+1}$ $t_k<t<t_{j+1}$ 中某一点的值。

事实上，注意到 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$$R_j^k(u)=\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^k+O\left(\tau^2\right)-a\cdot\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4\hat{u}}{\partial x^4}\right)_j^k=\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^k+O\left(\tau^2\right)-a\cdot\frac{h^2}{12}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2}\right)_j^k$$

$$=-\tau\left[\frac{1}{12}\cdot\frac{h^2}{a\tau}-\frac{1}{2}\right]\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}\right)_j^k+O\left(\tau^2\right)$$

$$=-\tau\left[\frac{1}{12r}-\frac{1}{2}\right]\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}\right)_j^k+O\left(\tau^2\right)=O\left(\tau+h^2\right)$$

（二）向后差分格式

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=a\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}+f_j \qquad \left(f_j=f\left(x_j\right)\right) \qquad (1.6)_1$$

$$u_j^0=\varphi_j=\varphi\left(x_j\right),\quad u_0^k=u_N^k \qquad (1.6)_2$$

$$j=1,\cdots,N-1,\qquad k=0,1,\cdots,M-1$$

取 $r=\dfrac{a\tau}{h^2}$ 为网比，则进一步有

$$-ru_{j+1}^{k+1}+\left(1+2r\right)u_j^{k+1}-ru_{j-1}^{k+1}=u_j^k+\tau f_j \qquad (1.6)_1'$$

此差分格式是按层计算：

首先，取k=0, 利用初值 $u_j^0=\varphi_j=\varphi\left(x_j\right)$，和边值 $u_0^0=u_N^0$

确定出第一层的 u_j^1 ，$j=1,\cdots,N-1$。 即求解方程组：

$$-ru_{j+1}^1+\left(1+2r\right)u_j^1-ru_{j-1}^1=u_j^0+\tau f_j$$

再由 $(1.4)'_1$ 取k=1，可利用 u_j^1，可算出第二层的 u_j^2，$j=0,1,\cdots,N-1$。

如此下去，即可逐层算出所有

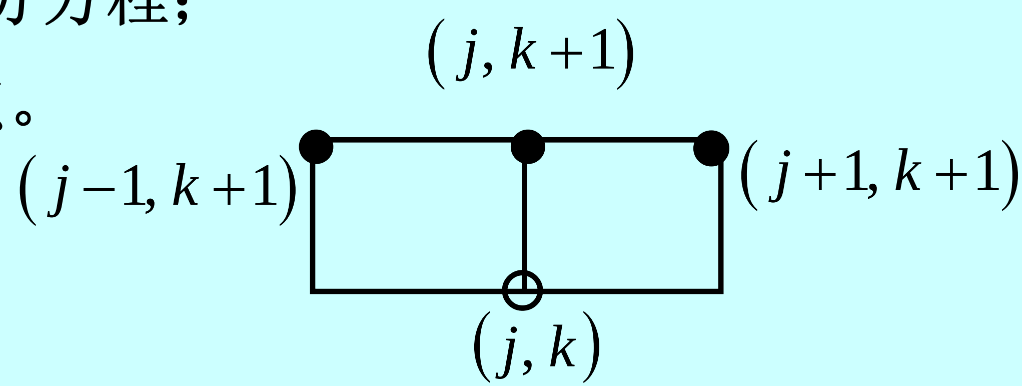
$$u_j^k,\quad k=0,1,\cdots,M-1\quad j=1,\cdots,N-1。$$

如此每层必须解一个三对角线性方程组的格式称为**隐格式**。并视 u_j^k，为 $u(x_j,t_k)$ 的近似值。

第 $(k+1)$ 层点和第 (k) 层点的分布图为：

○ 表示以此点为基列出的差分方程；

● 表示差分格式中用到的点。



$$-ru_{j+1}^{k+1}+(1+2r)u_j^{k+1}-ru_{j-1}^{k+1}=u_j^k+\tau f_j \qquad j=1,\cdots,N-1,$$

若记 $\boldsymbol{u}^k=\left(u_1^k,u_2^k,\cdots,u_{N-1}^k\right)^T$ $\varphi=\left(\varphi(x_1),\varphi(x_2),\cdots,\varphi(x_{N-1})\right)^T$

$$\boldsymbol{f}=\left(\tau f(x_1),\tau f(x_2),\cdots,\tau f(x_{N-1})\right)^T$$

则隐格式 $(1.6)_1'$ 可写成向量形式

$$\begin{cases}\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}^{k+1}=\boldsymbol{u}^k+\boldsymbol{f}, \quad k=0,1,\cdots,M-1\\ \boldsymbol{u}^0=\varphi\end{cases}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}1+2r & -r & 0 & \cdots & 0\\ -r & 1+2r & -r & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & -r & 1+2r & -r\\ 0 & \cdots & 0 & -r & 1+2r\end{pmatrix}$$

若记

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad L_h^{(2)}u_j^k=\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}-a\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}$$

那么，截断误差

$$R_j^k(u)=L_h^{(2)}u\left(x_j,t_k\right)-[Lu]_j^k=-\tau\left(\frac{1}{12r}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}\right)_j^k+O(\tau)=O\left(\tau+h^2\right)$$

其中 $\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}\right)_j^k$ 是 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 在矩形 $x_{j-1}<x<x_{j+1}$ $t_k<t<t_{j+1}$ 中某一点的值。

直观地说，采用显式格式进行求解既方便又省工作量。但是，后面我们将看到，有些情况用隐式格式更为便利。

（三）Grank-Nicholson差分格式

将向前差分格式和向后差分格式做算术平均，得到的差分格式称之为六点对称格式，也称为**Grank-Nicholson**格式：

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=\frac{a}{2}\left(\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}+\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}\right)+f_j \quad (1.8)_1$$

$$u_j^0=\varphi_j=\varphi\left(x_j\right),\quad u_0^k=u_N^k \quad j=1,\cdots,N-1,\quad k=0,1,\cdots,M-1 \quad (1.8)_2$$

取 $r=\dfrac{a\tau}{h^2}$ 为网比，则进一步有

$$-\frac{r}{2}u_{j+1}^{k+1}+\left(1+r\right)u_j^{k+1}-\frac{r}{2}u_{j-1}^{k+1}=\frac{r}{2}u_{j+1}^k+\left(1-r\right)u_j^k\,\frac{r}{2}u_{j-1}^k+\tau f_j \quad (1.8)_1'$$

此差分格式是按层计算：

首先，取k=0, 利用初值 $u_j^0=\varphi_j=\varphi\left(x_j\right)$，和边值 $u_0^0=u_N^0$ 来确定出第一层的 u_j^1，$j=1,\cdots,N-1$。即求解方程组：

$$-\frac{r}{2}u_{j+1}^{1}+(1+r)u_{j}^{1}-\frac{r}{2}u_{j-1}^{1}=\frac{r}{2}u_{j+1}^{0}+(1-r)u_{j}^{0}+\frac{r}{2}u_{j-1}^{0}+\tau f_j$$

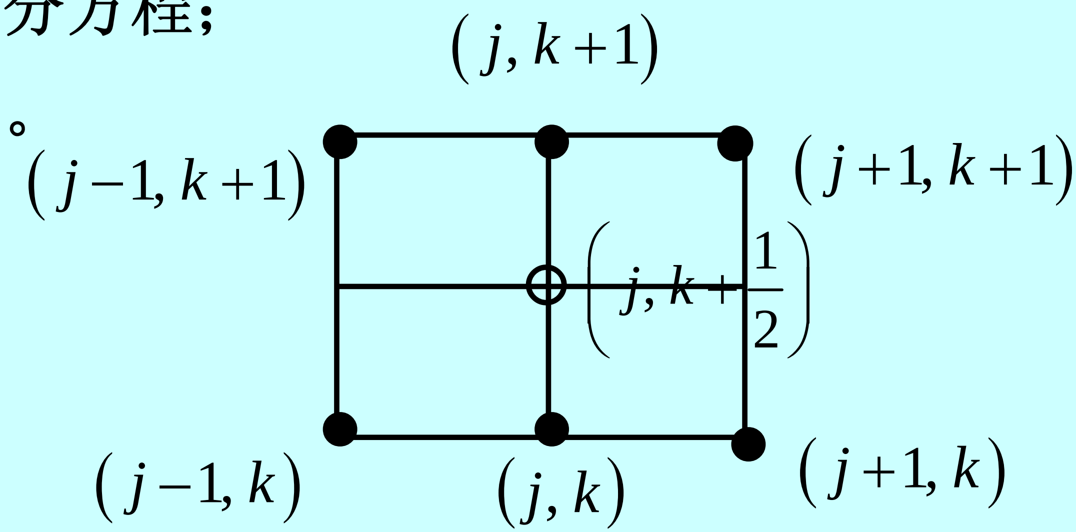
再由 $(1.8)'_1$ 取k=1，可利用 u_j^1，可算出第二层的 u_j^2，$j=0,1,\cdots,N-1$。如此下去，即可逐层算出所有

$$u_j^k,\quad k=0,1,\cdots,M-1\quad j=1,\cdots,N-1。$$

如此每层必须解一个三对角线性方程组的格式称为隐格式。 并视 u_j^k，为$u(x_j,t_k)$的近似值。第$(k+1)$层点和第(k)层点的分布图为：

○ 表示以此点为基列出的差分方程；

● 表示差分格式中用到的点。



若记

$$\boldsymbol{u}^k=\left(u_1^k,u_2^k,\cdots,u_{N-1}^k\right)^T \quad \varphi=\left(\varphi(x_1),\varphi(x_2),\cdots,\varphi(x_{N-1})\right)^T$$

$$\boldsymbol{f}=\left(\tau f(x_1),\tau f(x_2),\cdots,\tau f(x_{N-1})\right)^T$$

则隐格式 $(1.8)_1'$ 可写成向量形式

$$\begin{cases}\dfrac{\left(\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{B}}\right)}{2}\boldsymbol{u}^{k+1}=\dfrac{\left(\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{A}}\right)}{2}\boldsymbol{u}^k+\boldsymbol{f}, \quad k=0,1,\cdots,M-1\\ \boldsymbol{u}^0=\varphi\end{cases}$$

其中 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 如前所定义。 若记 $Lu=\dfrac{\partial u}{\partial t}-a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$L_h^{(3)}u_j^k=\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}-\frac{a}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}+\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}\right)$$

那么，截断误差

$$R_j^k(u)=L_h^{(2)}u(x_j,t_k)-[Lu]_j^k=O\left(\tau^2+h^2\right)$$

注意：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{k+\frac{1}{2}}=\frac{u\left(x_j,t_{k+1}\right)-u\left(x_j,t_k\right)}{\tau}+O\left(\tau^2\right)$$

又

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{k+1}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{k+\frac{1}{2}}+\frac{\tau}{2}\cdot\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)_j^{k+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\right)_j^{k+\frac{1}{2}}+O\left(\tau^3\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{k}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{k+\frac{1}{2}}-\frac{\tau}{2}\cdot\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right)_j^{k+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}\right)_j^{k+\frac{1}{2}}+O\left(\tau^3\right)$$

两式作算术平均，得

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{k+1}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{k}\right]=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{k+\frac{1}{2}}+O\left(\tau^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{u\left(x_{j+1},t_{k+1}\right)-2u\left(x_j,t_{k+1}\right)+u\left(x_{j-1},t_{k+1}\right)}{h^2}+\frac{u\left(x_{j+1},t_k\right)-2u\left(x_j,t_k\right)+u\left(x_{j-1},t_k\right)}{h^2}\right]$$

$$+O\left(\tau^2+h^2\right)$$

而

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{k+\frac{1}{2}} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{k+\frac{1}{2}} + f_j$$

故有

$$\frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)}{\tau}$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \left[\frac{u(x_{j+1}, t_{k+1}) - 2u(x_j, t_{k+1}) + u(x_{j-1}, t_{k+1})}{h^2} + \frac{u(x_{j+1}, t_k) - 2u(x_j, t_k) + u(x_{j-1}, t_k)}{h^2}\right]$$

$$+ O(\tau^2 + h^2)$$

（四）Richardson格式

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^{k-1}}{2\tau}=a\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}+f_j \qquad （1.10）$$

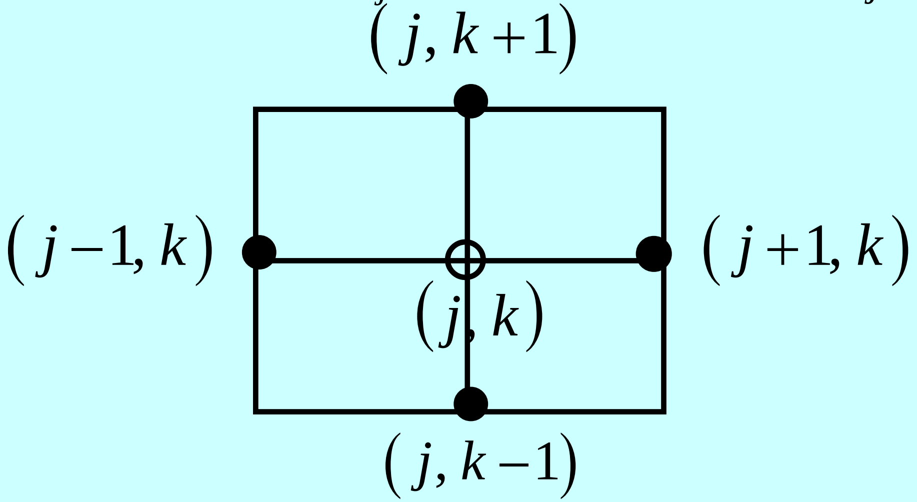
进一步

$$u_j^{k+1}=2r\left(u_{j+1}^k+2u_j^k+u_{j-1}^k\right)+u_j^{k-1}+2\tau f_j \qquad (1.10)_1'$$

这是三层显式差分格式，它联系的网点如图所示。

显然截断误差的阶为 $O\left(\tau^2+h^2\right)$。

为使计算能够逐层进行，除初值 u_j^0 外，还要用到 u_j^{-1} ,它可以用其他双层格式提供。



Richardson格式的矩阵形式为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^{k+1} = \bar{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{u}^k + \boldsymbol{u}^{k-1} + \tau \boldsymbol{f}, \quad k = 1, \cdots, M-1 \\ \boldsymbol{u}^0 = \varphi \\ \boldsymbol{u}^{-1} \text{ 另算} \end{cases}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{C}} = -2r \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

我们着重介绍了以上四种差分格式（还可以作出许多逼近（1.1）（1.3）的差分格式）衡量一种差分格式是否经济实用，由多方面因素决定。

主要有

1. 计算简单

显格式无需解方程组，计算较隐格式简单；隐格式需解与k无关的方程组。

2. 收敛性和收敛速度

当固定$r, h\to 0$, 应有差分解 $u_j^k \to u(x_j, y_k)$ 并希望尽可能快；截断误差反映 $L_h \to L$ 着的逼近程度，阶越高，差分解精度越高。**Grank-Nicholson**和**Richardson**格式看起来是占优势的。

3. 稳定性

只有稳定的格式才能用。不仅对控制误差增长是重要的，而且和收敛性紧密相关；收敛性理论在数值求解非驻定问题中占有中心地位。

表1 r=1/2时 **Richardson**格式的误差传播

k \ j	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	ε	0	0	0	0
1	0	0	0	ε	-2ε	ε	0	0	0
2	0	0	ε	-4ε	7ε	-4ε	ε	0	0
3	0	ε	-6ε	17ε	-24ε	17ε	ε	ε	0
4	ε	-8ε	31ε	-68ε	89ε	-68ε	31ε	-8ε	ε
5	-10ε	-8ε	-114ε	273ε	-388ε	273ε	-114ε	49ε	-10ε
6	71ε	-260ε	641ε	-1096ε	1311ε	-1096ε	641ε	-260ε	71ε

表中的计算虽然是就r=1/2进行的，实际上对任何r＞0都有类似现象，所以**Richardson**格式绝对不稳定。

表2 r=1/2时 向前差分格式的误差传播

k \ j	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	ε	0	0	0	0
1	0	0	0	0.5ε	0	0.5ε	0	0	0
2	0	0	0.25ε	0	0.5ε	0	0.25ε	0	0
3	0	0.125ε	0	0.375ε	0	0.375ε	0	0.125ε	0
4	0.0625ε	0	0.25ε	0	0.375ε	0	0.25ε	0	0.0625ε

若限制0<r≤1/2，则误差仍然衰减；但当r>1/2时，误差无限增长，所以向前差分格式条件稳定。

§2 稳定性、收敛性

2.1稳定性的概念

通过前一节引进的二层差分格式，均可以用矩阵和向量的记号表示成

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{k+1} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}^{k} + \tau \boldsymbol{F} \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{U}^{k} = \left(u_1^k, u_2^k, \cdots, u_{N-1}^k\right)^T$，$\boldsymbol{F} = \left(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_{N-1})\right)^T$，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$是$(N-1)\times(N-1)$阶。

假设$\boldsymbol{A}$可逆，并令

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \tag{2.2}$$

则（2.1）可写成向量形式

$$\boldsymbol{U}^{k+1} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{U}^{k} + \tau \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{F} \tag{2.3}$$

在向前差分格式中：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}\ ,\ \ \boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}=\left(1-2r\right)\boldsymbol{I}+r\boldsymbol{s}$$

其中

$$\boldsymbol{s}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

在向后差分格式中：

$$\boldsymbol{A}=\left(1+2r\right)\boldsymbol{I}-r\boldsymbol{s}\ ,\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}\ ,\quad \boldsymbol{C}=\left[\left(1+2r\right)\boldsymbol{I}-r\boldsymbol{s}\right]^{-1}$$

在**Crank-Nicholson**格式中：

$$\boldsymbol{A}=(1+r)\boldsymbol{I}-\frac{r}{2}\boldsymbol{s}\,,\quad \boldsymbol{B}=(1-r)\boldsymbol{I}+\frac{r}{2}\boldsymbol{s}\,,$$

$$\boldsymbol{C}=\left[(1+r)\boldsymbol{I}-\frac{r}{2}\boldsymbol{s}\right]^{-1}\left[(1-r)\boldsymbol{I}+\frac{r}{2}\boldsymbol{s}\right]$$

在三层**Richardson**格式中

其矩阵形式为：

$$\boldsymbol{U}^{k+1}=2r(\boldsymbol{s}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{U}^{k}+\boldsymbol{U}^{k-1}+2\tau\boldsymbol{F} \tag{2.5}$$

我们将其化成二层格式，令 $\boldsymbol{W}^{k}=\left(\boldsymbol{U}^{k},\boldsymbol{U}^{k-1}\right)^{T}$,则（2.5）可写成

$$\boldsymbol{W}^{k+1}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{W}^{k}+2\tau\boldsymbol{F} \tag{2.6}$$

其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2r(\boldsymbol{s}-2\boldsymbol{I}) & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

下面仅限于讨论系数及右端与时间t无关的线性抛物型方程，即（2.1）中的$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{F}$均不依赖于k，但是$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$依赖于步长$h, \tau$。

记 $h=g(\tau), g(0)=0$。其中 $g(\tau)$ 是连续函数 $\left(h=\sqrt{\frac{a\tau}{r}}\right)$。那么，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\tau), \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\tau)$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}(\tau)$。

①先讨论按初值稳定。此时$F=0$

$$\boldsymbol{U}^{k+1}=\boldsymbol{C}(\tau)\,\boldsymbol{U}^{k}=\cdots=\left[\boldsymbol{C}(\tau)\right]^{k+1}\boldsymbol{U}^{0} \tag{2.8}$$

※ 差分格式(2.1)按初值稳定，若存在 $\tau_0>0$ 和常数 $\mathrm{K}>0$，使不等式

$$\left\|\boldsymbol{U}^{k+1}\right\|=\left\|\left[\boldsymbol{C}(\tau)\right]^{k+1}\boldsymbol{U}^{0}\right\|\le K\left\|\boldsymbol{U}^{0}\right\| \tag{2.9}$$

对一切$0<\tau\le\tau_0$ 和 $0<k\tau\le T$，这里 ‖ • ‖ 是$\mathbf{R}^{N-1}$中的某一种范数。

一般取

$$\left\|\boldsymbol{U}\right\|=\sum_{i=1}^{N-1}hu_j^2$$

显然差分格式（2.1）按初值稳定，当且仅当

$$\|C^k\| \le K,\ 0<\tau\le\tau_0,\ 0<k\tau\le T。$$

②再讨论按右端稳定。此时认为初值没有误差，即$U^0=0$

※ 差分格式(2.1)按右端稳定，若存在 $\tau_0>0$ 和常数 $K>0$，使不等式

$$\|U^{k+1}\| \le K\|F\|$$

对一切$0<\tau\le\tau_0$ 和 $0<k\tau\le T$，其中U^k是下列方程的解。

$$U^{k+1}=C(\tau)U^k+\tau A^{-1}F,\quad U^0=0 \qquad (2.11)$$

反复利用递推公式（2.11），得

$$U^{k+1}=C(\tau)\left[C(\tau)U^{k-1}+\tau A^{-1}F\right]+\tau A^{-1}F$$

$$=C(\tau)\left\{C(\tau)\left[C(\tau)U^{k-2}+\tau A^{-1}F\right]+\tau A^{-1}F\right\}+\tau A^{-1}F$$

$$=C^3(\tau)U^{k-2}+\tau C^2(\tau)A^{-1}F+\tau C(\tau)A^{-1}F+\tau A^{-1}F$$

$$=\cdots=$$

$$=C^{k+1}(\tau)U^0+\tau\left(C^k(\tau)+C^{k-1}(\tau)+\cdots+I\right)A^{-1}F$$

设 $\left\|A^{-1}\right\| \le K'$, 又差分格式按初值稳定，即存在常数 K'' 使得 $\left\|C^k\right\| \le K''$, 则

$$\left\|U^{k+1}\right\| \le \tau(k+1)\cdot K'\cdot K''\|F\| = K\|F\|$$

其中 $K = TK'K''$, 即差分格式按右端稳定。

总之，若 $\left\|A^{-1}\right\| \le K'$ 则由格式按初值稳定，可以推出它按右端稳定。为检验格式按初值稳定，需检验不等式（2.10），即矩阵

$$\left\{C^k(\tau):\ 0<\tau\le\tau_0,\ 0<k\tau\le T\right\}$$

一致有界。

下面我们所说的稳定，均指的是按初值稳定。

检验格式按初值稳定，需检验矩阵族

$$\left\{C^k(\tau):\ 0<\tau\le\tau_0,\ 0<k\tau\le T\right\}$$

一致有界。注意到，一些熟知的结论

$$\rho(A)=\max_i\left|\lambda_i(A)\right|,\ \|A\|_2=\sqrt{\rho\left(A^H A\right)}=\sqrt{\rho\left(AA^H\right)},\ \rho(A)\le\|A\|$$

2．2 判断稳定性的直接法

要判断（2.12）一致有界往往是困难的，只有特殊情形才能给出解答。

命题1（必要条件）差分格式稳定的必要条件是存在与 τ 无关的常数$\boldsymbol{M}$， 使得矩阵$\boldsymbol{C}(\tau)$的谱半径满足

$$\rho\left(\boldsymbol{C}(\tau)\right)\le 1+M\tau \qquad \left(\rho\left(\boldsymbol{C}(\tau)\right)\le 1+O(\tau)\right) \tag{2.13}$$

证明：由差分格式稳定，则（2.10）成立，从而

$$\rho^{k}\left(\boldsymbol{C}(\tau)\right)=\rho\left(\boldsymbol{C}^{k}(\tau)\right)\le\left\|\boldsymbol{C}^{k}(\tau)\right\|\le K \quad 0<k\le\frac{T}{\tau},\ \ 0<\tau\le\tau_{0}。$$

不妨设，$\boldsymbol{K}>1$，并取 $k=\left\lfloor\frac{T}{\tau}\right\rfloor$ 则

$$\rho\left(\boldsymbol{C}(\tau)\right)\le K^{\frac{1}{k}}\le K^{\frac{\tau}{T}}=e^{\frac{\tau}{T}\ln K}=1+\tau\left(\frac{\ln K}{T}\right)+\frac{\tau^{2}}{2!}\left(\frac{\ln K}{T}\right)^{2}+\cdots$$

$$=1+O(\tau)$$

正规矩阵:$A^HA=AA^H$ 。Hermit阵$A^H=A$；实对称阵$A^T=A$；

斜Hermit阵$A^H=-A$；实反对称阵$A^T=-A$ ；

酉阵$A^HA=AA^H=I$ ；实正交阵$A^TA=AA^T=I$ 。

命题2（充分条件）若 $C(\tau)$ 是正规矩阵，则（2.13）也是差分格式稳定的充分条件。

证明：由于$C(\tau)$是正规矩阵，则 $\left\|C(\tau)\right\|_2=\rho\left(C(\tau)\right)$。

$$\left[\text{由Shur定理 } \|A\|_2=\left\|URU^H\right\|_2=\|R\|_2=\sqrt{\rho\left(R^HR\right)}=\sqrt{\rho^2(A)}=\rho(A)\text{。}\right]$$

由（2.13）

$$\left\|C^k(\tau)\right\|_2\le\left\|C(\tau)\right\|_2^k=\rho^k\left(C(\tau)\right)\le(1+M\tau)^k\le(1+M\tau)^{\frac{T}{\tau}}$$

$$=(1+M\tau)^{\frac{1}{M\tau}\cdot MT}\le e^{MT}=K<+\infty$$

推论（充要条件）若s是对称矩阵，$C(\tau)$是矩阵s的实系数有理函数：$C(\tau)=R(S)$，则差分格式稳定的充要条件是：

$$\max_j\left|R\left(\mu_j^s\right)\right|\le 1+M\tau$$

其中 μ_j^s是s的特征值。

注意，

$$\boldsymbol{s}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$ 的特征值为：$\mu_j^s=2\cos j\pi h,\ h=\dfrac{1}{N}$

$$j=1,\cdots,N-1$$

特征向量 $\boldsymbol{u}_j=\left(u_1^j,u_2^j,\cdots,u_{N-1}^j\right)^T$ 的分量 $u_k^j=\sin jk\pi h$， $k=1,\cdots,N-1$

事实上，由定义 $\boldsymbol{s}\boldsymbol{u}_j=\mu_j^s\boldsymbol{u}_j$ 即

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1^j\\ u_2^j\\ \vdots\\ u_{N-2}^j\\ u_{N-1}^j\end{pmatrix}=\mu_j^s\begin{pmatrix}u_1^j\\ u_2^j\\ \vdots\\ u_{N-2}^j\\ u_{N-1}^j\end{pmatrix}$$

得齐次差分方程：

$$u_{k+1}^{j}-\mu_j^s u_k^j+u_{k-1}^j=0,\quad k=1,\cdots,N-1,\quad u_0^j=u_N^j=0$$

相应的特征方程：$\lambda^2-\mu_j^s\lambda+1=0$，解之，得

$$\lambda=\frac{\mu_j^s+i\sqrt{4-\left(\mu_j^s\right)^2}}{2}\qquad \lambda=\cos\theta+i\sin\theta,$$

注意（ρ=1）

$$\overline{\lambda}=\frac{\mu_j^s-i\sqrt{4-\left(\mu_j^s\right)^2}}{2}\qquad \overline{\lambda}=\cos\theta-i\sin\theta,$$

故得

$$\mu_j^s=2\cos\theta,\quad j=1,\cdots,N-1;\qquad \left(\mu_j^s=\lambda+\overline{\lambda}=2\cos\theta\right)$$

齐次差分方程的通解为：$u_k^j=c_1\cos k\theta+c_2\sin k\theta\quad k=1,\cdots,N-1$

再由定解条件 $u_0^j=u_N^j=0$ $\quad u_0^j=c_1\cos 0\theta+c_2\sin 0\theta\ \Rightarrow\ c_1=0$

$$u_N^j=c_2\sin N\theta\Rightarrow\ \sin N\theta=0\Rightarrow N\theta=j\pi\Rightarrow\theta=\frac{j\pi}{N}=j\pi h$$ 即

$u_k^j=\sin kj\pi h$, 进而矩阵**s**特征值和特征向量为：

$$\mu_j^s=2\cos j\pi h,\quad u_k^j=\sin jk\pi h,\quad j=1,\cdots,N-1\quad h=\frac{1}{N}$$

讨论 $\boldsymbol{U}^{k+1}=\boldsymbol{C}(\tau)\boldsymbol{U}^{k}+\tau\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{F}$ 稳定性的矩阵分析法：

矩阵族 $\left\{\boldsymbol{C}^{k}(\tau):\ 0<\tau\le\tau_0,\ 0<k\tau\le T\right\}$ 一致有界。

$$\rho\left(\boldsymbol{C}(\tau)\right)\le 1+O(\tau)\begin{cases}\text{必要条件—}\boldsymbol{C}(\tau)\text{为一般矩阵}\\ \text{充要条件—}\boldsymbol{C}(\tau)\text{为正规矩阵}\end{cases}$$

例1 在向前差分格式中, $\boldsymbol{C}=(1-2r)\boldsymbol{I}+\boldsymbol{s}$，则

$$\lambda_j^c=(1-2r)+r\mu_j^s=(1-2r)+2r\cos j\pi h=1-2r(1-\cos j\pi h)$$

$$=1-4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}$$

若使 $\left|1-4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}\right|\le 1+M\tau$，则只需 $-1-M\tau\le 1-4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}\le 1+M\tau$

即 $4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}\le 2+M\tau$， $j=1,\cdots,N-1$， $h=\frac{1}{N}$。从而当 $4r\le 2$，

即 $r\le\frac{1}{2}$ 时，向前差分格式稳定； 当 $r>\frac{1}{2}$ 时，向前差分格式不稳定。 向前差分格式条件稳定

例2 在向后差分格式中，$\boldsymbol{C}=\left[(1+2r)\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{s}\right]^{-1}$，则

$$\lambda_j^c=\left[(1+2r)-2r\cos j\pi h\right]^{-1}=\left[1+2r(1-\cos j\pi h)\right]^{-1}\le 1$$

故对任何r＞0稳定，即向后差分格式绝对稳定。

例3 在六点对称差分格式中，

$$\boldsymbol{C}=\left[(1+r)\boldsymbol{I}-\frac{r}{2}\boldsymbol{s}\right]^{-1}\left[(1-r)\boldsymbol{I}+\frac{r}{2}\boldsymbol{s}\right]$$

则

$$\lambda_j^c=\frac{\left[(1-r)+r\cos j\pi h\right]}{\left[(1+r)-r\cos j\pi h\right]}=\frac{1-r+r\left(1-2\sin^2\dfrac{j\pi h}{2}\right)}{1+r+r\left(1-2\sin^2\dfrac{j\pi h}{2}\right)}=\frac{\left(1-2r\sin^2\dfrac{j\pi h}{2}\right)}{\left(1+2\sin^2\dfrac{j\pi h}{2}\right)}$$

$$j=1,\cdots,N-1$$

故对任何r＞0六点对称差分格式稳定，即绝对稳定。

例4 在**Richarson**差分格式中，

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2r(\boldsymbol{s}-2\boldsymbol{I}) & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

为对称矩阵。 设λ为$\boldsymbol{C}$的特征值，$\omega=(\omega_1,\omega_2)^T$。则应有

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{\omega}=\lambda\boldsymbol{\omega}$$

或

$$2r(\boldsymbol{s}-2\boldsymbol{I})\omega_1+\omega_2=\lambda\omega_1$$
$$\omega_1=\lambda\omega_2$$

显然$\omega_2\neq0$，（否则，必有 $\omega_1=0$）。由第二式中消去ω_1得

$$2r(\boldsymbol{s}-2\boldsymbol{I})\lambda\omega_2+\omega_2=\lambda^2\omega_2 \quad 或 \quad 2r\lambda\boldsymbol{s}\omega_2-4r\lambda\omega_2+\omega_2=\lambda^2\omega_2$$

进一步

$$\boldsymbol{s}\omega_2=\frac{1}{2r\lambda}\left(\lambda^2+4r\lambda-1\right)\omega_2$$

即 $\mu = 2\cos j\pi h = \frac{1}{2r}\lambda + 2 - \frac{1}{2r\lambda}$ 为$\boldsymbol{s}$的特征值。于是，有

$$\lambda^2 + 4r(1-\cos j\pi h)\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda^2 + 8r\sin^2\frac{j\pi h}{2}\lambda - 1 = 0$$

其根的按模最大值

$$\max_j\left(\left|\lambda_1^j\right|, \left|\lambda_2^j\right|\right) = \max_j\left|4r\sin^2\frac{j\pi h}{2} + \sqrt{16r^2\sin^4\frac{j\pi h}{2}+1}\right|$$

,

h充分小时，有 (j=N−1)

$$\sin\frac{(N-1)\pi h}{2} = \sin\frac{(N-1)}{2N}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2N}\pi\right) = \cos\frac{\pi h}{2} > \frac{1}{2}$$

则， $\sin^2\frac{j\pi h}{2} > \frac{1}{4}$， $\sin^4\frac{j\pi h}{2} > \frac{1}{16}$，从而有

$$\max_j\left(\left|\lambda_1^j\right|, \left|\lambda_2^j\right|\right) = \left|\lambda_{1,2}^{N-1}\right| > r + \sqrt{r^2+1} > 1$$ 故对任何$\boldsymbol{r}$>0。

即**Richarson**差分格式绝对不稳定。

2．3 收敛性和敛速估计

考虑热传导方程的边值问题：

$$\begin{cases} Lu = \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(x\right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T \\ u\left(x, 0\right) = \varphi\left(x\right), \quad u\left(0, 0\right) = u\left(0, l\right) = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

相应的差分格式为：

$$\begin{cases} L_h u_j^k = f_j, \quad j = 1, 2, \cdots, N-1, \quad k = 1, 2, \cdots, M-1 \\ u_j^0 = \varphi_j, \quad u_0^k = u_N^k = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

其矩阵形式为： $$\boldsymbol{U}^{k+1} = \boldsymbol{C}\left(\tau\right)\boldsymbol{U}^k + \tau\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{F} \tag{2.16}$$

格式的截断误差： $$R_j^k\left(u\right) = L_h u\left(x_j, t_k\right) - \left[Lu\right]_j^k = O\left(\tau^p + h^q\right) \tag{2.17}$$

$\boldsymbol{u(x, t)}$是$0 < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{l}$，$0 < \boldsymbol{t} \le \boldsymbol{T}$上的任一充分光滑函数。

相容性

考虑偏微分方程（2.14）与其相应的差分近似（2.15）之间的相容性。 首先给出逐点相容的定义。

定义 差分近格式（2.15）与偏微分方程（2.14）在点处是逐点相容的，若对任何光滑函数$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$，当$h,\tau\to 0$且
$(x_j,t_k)=(jh,k\tau)\to(x,t)$

$$(Lu-f)_j^k-\left[L_{h,\tau}u(x_j,t_k)-f_j\right]\to 0 \quad 即 \quad \left[L_{h,\tau}u(x_j,t_k)-f_j\right]\to 0$$

上式常用来检验格式的逐点相容性，下面给出的是更强的相容性定义，即模相容的定义。

称算子$\boldsymbol{L_h}$是边值问题（2.14）的相容逼近，如果相容条件

$$\lim_{\tau\to 0}\left\|\boldsymbol{R}^k\right\|=0 \quad \left(\left\|\boldsymbol{R}^k\right\|=o(1)\right) \tag{2.18}$$

成立。 其中$\boldsymbol{R}^k$是以 $R_j^k(u)$为分量的向量。‖ • ‖是$\mathbf{R}^{N-1}$中的范数。

模相容性是指使向量 $\boldsymbol{R}^k$是以 $R_j^k(u)$ 为分量的所有分量以一种一致的方式收敛到零。若逐点相容性用于此，则等价于当$\boldsymbol{h}, \tau \to 0$时，$R_j^k(u) \to 0$。因此，两种定义的差别在于$\boldsymbol{R}^k$收敛到零是分量还是向量方式。 差分格式的阶是根据$\boldsymbol{R}^k$收敛到零的阶定义的。

容易看到，假如格式是$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \geqslant 1)$阶的，则它是一个相容的格式，另外，假如格式是(模)相容或$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$阶的，则格式是逐点相容的。

定理1（Lax收敛性定理）若差分方程满足相容条件，且按初值稳定，则差分解收敛到热传导方程的解，且有估计式

$$\left\| \boldsymbol{E}^k \right\| \le K \cdot \left\| \boldsymbol{R}^k \right\|$$

证明：先对差分解作出某种估计

将（2. 15）的解分解为：$u_j^k = v_j^k + w_j^k$ 其中 v_j^k 满足零初值和非齐右端方程：

$$\boldsymbol{V}^{k+1}=\boldsymbol{C}(\tau)\boldsymbol{V}^{k}+\tau\,\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{F}\qquad\left(\boldsymbol{V}^{0}=0\right)$$

其中 $\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{k}}=\left(v_1^k,v_2^k,\cdots,v_{N-1}^k\right)^T$ ，$\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{k}}=\left(w_1^k,w_2^k,\cdots,w_{N-1}^k\right)^T$ 。

若差分格式按初值稳定, 则亦按右端稳定, 于是，有常数$\boldsymbol{K}_1$、$\boldsymbol{K}_2$使得

$$\left\|\boldsymbol{V}^{k}\right\|\le K_1\left\|\boldsymbol{F}\right\|\qquad\left\|\boldsymbol{W}^{k}\right\|\le K_2\left\|\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{0}}\right\|$$

这样

$$\left\|\boldsymbol{U}^{k}\right\|=\left\|\boldsymbol{V}^{k}+\boldsymbol{W}^{k}\right\|\le\left\|\boldsymbol{V}^{k}\right\|+\left\|\boldsymbol{W}^{k}\right\|\le K\cdot\left(\left\|\boldsymbol{F}\right\|+\left\|\boldsymbol{U}^{0}\right\|\right)\qquad K=\max\left(K_1,K_2\right)$$

设$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$是（2. 14）的解, u_j^k 是（2. 15）的解。 令

$$e_j^k=u\left(x_j,t_k\right)-u_j^k=[u]_j^k-u_j^k$$

则

$$R_j^k(u)=L_h[u]_j^k-[Lu]_j^k=L_h[u]_j^k-f_j=L_h[u]_j^k-L_hu_j^k$$

$$=L_h\left([u]_j^k-u_j^k\right)=L_h\,e_j^k$$

则误差 e_j^k 满足差分方程

$$\begin{cases} L_h e_j^k = R_j^k(u), \quad j = 1, 2, \cdots, N-1 \\ e_j^0 = 0 \end{cases}$$

其向量形式为： $\boldsymbol{E}^{k+1} = \boldsymbol{C}(\tau)\boldsymbol{E}^k + \tau\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{R}^k$

这里 $\boldsymbol{E}^k = \left(e_1^k, e_2^k, \cdots, e_{N-1}^k\right)^T$，$\boldsymbol{R}^k = \left(R_1^k, R_2^k, \cdots, R_{N-1}^k\right)^T$。

$\boldsymbol{E}^k = \boldsymbol{V}^k + \boldsymbol{W}^k$，其中 $\boldsymbol{V}^0=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{W}^0=\boldsymbol{E}^0=\boldsymbol{0}$。 从而

$$\left\|\boldsymbol{E}^k\right\| \le \left\|\boldsymbol{V}^k\right\| + \left\|\boldsymbol{W}^k\right\| \le K \cdot \left(\left\|\boldsymbol{R}^k\right\| + \left\|\boldsymbol{E}^0\right\| \right) = K\left\|\boldsymbol{R}^k\right\|$$

由（2.19）可得 $\left\|\boldsymbol{E}^k\right\| \le K \cdot \left\|\boldsymbol{R}^k\right\|$ （2.20）

若相容条件（2.18）成立，则 $\lim\limits_{\tau\to 0}\left\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{U}^k\right\| = \lim\limits_{\tau\to 0}\left\|\boldsymbol{E}^k\right\| = 0$

其中

$\boldsymbol{u}^k = \left(u(x_1, t_k), u(x_2, t_k), \cdots, u(x_{N-1}, t_k)\right)^T$， $\boldsymbol{U}^k = \left(u_1^k, u_2^k, \cdots, u_{N-1}^k\right)^T$。

注意在相容性和稳定性中使用的范数应是一样的，而且收敛性也是关于该范数给出。 因此，根据**Lax**等价定理有如下的结论：

推论 当网比$r\leqslant 1/2$时，向前差分格式的解有收敛阶$\boldsymbol{O}(\tau+h^2)$

故对任何$\boldsymbol{r}>0$, 向后差分格式的解有收敛阶$\boldsymbol{O}(\tau+\boldsymbol{h}^2)$

六点对称格式的解有收敛阶$\boldsymbol{O}(\tau^2+\boldsymbol{h}^2)$

THE END