

变宽度凸组合变阶数 LMS 自适应滤波算法

芮国胜¹, 苗俊², 张洋², 王林²

(1. 海军航空工程学院电子信息工程系, 山东烟台 264001;

2. 海军航空工程学院研究生管理大队, 山东烟台 264001)

摘要: 为了进一步改善凸组合变阶数最小均方 (convex combination variable fractional tap-length least mean square, CFTLMS) 自适应滤波算法的稳态性能, 在证明其稳态性能的基础上, 提出了一种变宽度凸组合变阶数 (variable width-CFTLMS, VW-CFTLMS) 自适应滤波算法, 并给出参数的选择依据。仿真结果验证了低信噪比情况下, VW-CFTLMS 算法稳态性能和参数选择依据的正确性; 同时该算法的稳态性能要优于 CFTLMS 算法, 其额外均方误差相比于 CFTLMS 算法降低约 1.8 dB, 具有实用价值。

关键词: 自适应滤波器; 凸组合; 变宽度; 最小均方误差; 变阶数

中图分类号: TN911

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2012.03.04

Convex combination of adaptive filters for variable width and variable fractional tap-length LMS algorithm

RUI Guo-sheng¹, MIAO Jun², ZHANG Yang², WANG Lin²

(1. Department of Electronic Information Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical

University, Yantai 264001, China; 2. Graduate Students' Brigade, Naval

Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China)

Abstract: To further improve the steady-state performance of the convex combination of adaptive filter for variable fractional tap-length least mean square (CFTLMS) algorithms, a convex combination of variable width (VW) and variable tap-length adaptive filtering algorithm is proposed based on the proof of the steady-state performance of CFTLMS algorithm, and the choice principles of parameters are given. Simulation results show the correctness of steady-state performance analysis and parameter selection principles of the VW-CFTLMS algorithm under lower SNR condition, and the steady-state performance of the algorithm is superior to that of the CFTLMS algorithm, of which the excess mean square error is lowered by about 1.8 dB.

Keywords: adaptive filter; convex combination; variable width; least mean square (LMS) error; variable tap-length

0 引言

滤波器的阶数是最小均方 (least mean square, LMS) 算法中的一个重要参数, 在 LMS 算法运用时, 通常自适应滤波器的阶数是固定的。在实际应用中, LMS 最优滤波器的阶数是未知或变化的, 为了克服阶数选择不当带来的额外误差, 通常选择一个远大于实际未知阶数的阶数值来进行滤波器设计; 但较大阶数增加了滤波算法复杂度的同时也可能带来较大的稳态误差。

为了克服上述问题, 变阶数 LMS 算法应运而生, 如分割滤波器 LMS 算法^[1]、梯度下降 LMS 算法^[2]和分数阶数 LMS 算法^[3]。其中, 前两种算法均假设滤波器阶数为整数, 限制了滤波器设计的灵活性, 同时也带来了一定的误差。分数阶数最小均方 (fractional tap-length LMS,

FTLMS) 算法对前两种算法进行了改进, 提高了算法的灵活性和收敛性能, 并大大减少了计算量。但是, FTLMS 算法性能取决于固定参数的选择, 在低信噪比情况下很难获得快速的收敛速率和较小的稳态均方误差, 其应用受到了局限。文献[4]中提出一种凸组合自适应滤波算法, 改进了 FTLMS 算法在低信噪比情况下的系统性能^[5], 但没有给出系统稳定性的证明。本文在证明文献[4]稳定性的基础上, 提出了一种变宽度凸组合分数阶变阶数 LMS 自适应滤波 (variable width convex combination variable fractional tap-length LMS, VW-CFTLMS) 算法, 并给出了参数选择依据。由仿真实验可知, 在低信噪比情况下, VW-CFTLMS 算法的稳态性能以及参数选择依据是正确的, 与 CFTLMS 算法相比, 其额外均方误差 (excess mean square error, EMSE) 降低约 1.8 dB, 具有一定实用性。

1 CFTLMS 算法

CFTLMS 算法^[4]的凸组合思想是利用滤波器独立执行 FTLMS 算法,但每一个滤波器在选择参数 γ, α 和 Δ 时的目的不同,见式(6)。其中一个滤波器的参数主要是用于提供快速的阶数收敛速度,将其定义为滤波器 1;另一个滤波器的参数主要是用于平滑滤波器阶数的收敛曲线($\Delta_1 > \Delta_2$),从而达到较小的稳态误差的目的,将其定义为滤波器 2。

滤波器的等效误差为

$$e_{L(n)}^{(L)}(n) = \lambda(n)e_1^{(L)}(n) + (1 - \lambda(n))e_2^{(L)}(n) \quad (1)$$

凸组合思想的关键是依据两个滤波器的性能决定关联参数 $\lambda(n)$,最终达到控制整个滤波器的目的,其中 $e_1^{(L)}(n)$ 和 $e_2^{(L)}(n)$ 是两个滤波器输出误差。

$$e_i^{(L)}(n) = d(n) - \omega_i^T(n)x_i(n), \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

CFTLMS 算法的阶数的代价函数是 $\xi_{L(n)}^{(L)} = E\{(e_{L(n)}^{(L)})^2\}$,那么 CFTLMS 算法需要找到符合式(3)的最小 L :

$$\xi_{L-\Delta}^{(L)} - \xi_L^{(L)} \leq \epsilon \quad (3)$$

式中, Δ 是小于 L 的正整数; ϵ 是较小正整数。那么,满足式(2)的最小 L 被称为最优的滤波器阶数。

在 CFTLMS 算法中,联合参数 $\lambda(n)$ 自适应于滤波器的最小均方误差^[6],引入 sigmoid 函数

$$\lambda(n) = \text{sgm}(a(n)) = (1 + e^{-a(n)})^{-1} \quad (4)$$

$a(n)$ 的更新方程如下:

$$a(n+1) = a(n) + \mu_a e(n)[y_1(n) - y_2(n)]\lambda(n)[1 - \lambda(n)] \quad (5)$$

式中, $y_i(n) = \omega_{i,1:L(n)+\Delta_i}^T(n)x_{i,1:L(n)+\Delta_i}(n), i = 1, 2; \mu_a$ 是参数 $a(n)$ 的更新步长;参数 $a(n)$ 表达式符合 LMS 理论的鲁棒性规则^[7],参数 $a(n)$ 严格限制在区间 $[-a^+, a^+]$ 中,同时也限定了 $\lambda(n)$ 的取值范围 $[1 - \lambda^+, \lambda^+]$,其中 λ^+ 是一个接近于 1 的常数。

在 CFTLMS 算法中,将第 i 个滤波器阶数定义为分数阶数 $l_{fi}(n)$,该分数阶数迭代表达式如下:

$$l_{fi}(n+1) = (l_{fi}(n) - \alpha_i) - \gamma_i [(e_{L(n)+\Delta_i}^{(L(n))})^2 - (e_{L(n)}^{(L(n))})^2] \quad (6)$$

式中, γ_i 是阶数迭代步长; α_i 是正泄漏参数,且 α_i 远小于 γ_i 。

当分数阶数 $l_{fi}(n)$ 的累积量超过一定的值,滤波器阶数取整,即

$$L_i(n+1) = \begin{cases} \lfloor l_{fi}(n) \rfloor, & |L_i(n) - l_{fi}(n)| > \delta \\ L_i(n), & \text{其他} \end{cases} \quad (7)$$

式中, $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示取与 $l_{fi}(n)$ 最近的整数; δ 是一小的整数阈值。

为了保证算法稳态性能和防止收敛速度的下降^[8],作如下两个修正:

(1) 当 $\lambda(n) > t$ 时

$$l_{fj}(n+1) = \varphi l_{f1}(n) + (1 - \varphi) l_{f2}(n) \quad (8)$$

式中, t 介于 0.5 和 1 之间; φ 表示权系数,接近且小于 1。

(2) 提升参数 $a(n)$ 的收敛速度

$$a(n+1) = a(n) + \mu_a e(n)[y_1(n) - y_2(n)] \cdot$$

$$\lambda(n)[1 - \lambda(n)] + \rho(a(n) - a(n-1)) \quad (9)$$

式中, ρ 为 0.5。

2 CFTLMS 算法的稳态分析

为了解凸组合分数阶变阶数 LMS 算法,将 CFTLMS 算法分为两个阶段进行解析。第一个阶段是滤波器 2 与滤波器 1 的阶数保持相一致的阶段;第二个阶段则是滤波器 2 和滤波器 1 的阶数各自收敛且趋于稳态的过程。

假设当 $\{E(e_{L(n)}^{(L)})^2\}$ 和 $E\{l_{fi}(n)\}$ 趋于常数时,系统稳态。为了方便分析,作如下假设:

假设 1 假设稳态时滤波器阶数收敛于常数 $L_i(\infty)$;

假设 2 输入信号 $x(n)$ 和噪声 $t(n)$ 是相互独立的高斯白噪声,其均值零,方差分别为 σ_x^2 和 σ_t^2 ;

假设 3 未知滤波器 $c_{L_{opt}}$ 的后面序列可视为均值零方差为 σ_c^2 的白噪声构成的。

假设 4 稳态时 $v'(n), v''(n)$ 和 $v'''(n)$ 与 $x_L(n)$ 独立。 $v'(n), v''(n)$ 和 $v'''(n)$ 的更新只与原先的输入量有关,如果 $n \neq j$,则 $x_L(n)$ 与 $x_L(j)$ 独立,那么 $v'(n)$ 和 $v''(n)$ 与 $x_L(n)$ 也独立。为了便于分析,可假设稳态时

$$E \left\{ \begin{bmatrix} v'(n) \\ v''(n) \\ v'''(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'(n) \\ v''(n) \\ v'''(n) \end{bmatrix}^T \right\} = \sigma_v^2 \mathbf{I}$$

式中, \mathbf{I} 是单位矩阵; σ_v^2 是 $v'(n), v''(n), v'''(n)$ 的方差。

2.1 向量分割

设未知滤波器的权系数为 c_L, L 是比最优滤波器阶数 L_{opt} 和阶数最大值 $L(n)$ 都大的整数, c_L 是由 $c_{L_{opt}}$ 增加零项构成,则期望信号 $d(n)$ 可表示为

$$d(n) = \mathbf{x}_{L_{opt}}^T(n) \mathbf{c}_{L_{opt}} + t(n) \quad (10)$$

为了便于分析,将 $c_L, \omega_L(n)$ 和 $v_L(n)$ 分成 4 个部分,可表示为 $(c' \ c'' \ c''' \ c'''')^T, (\omega'(n) \ \omega''(n) \ \omega'''(n) \ \omega''''(n))^T$ 和 $(v'(n) \ v''(n) \ v'''(n) \ v''''(n))^T$,其中 $\omega'(n) = \omega_{L(n),1:L(n)}(n), \omega''(n) = \omega_{L(n),L(n);L(n)+\Delta_2}(n), \omega'''(n) = \omega_{L(n),L(n)+\Delta_2+1:L(n)+\Delta_1}(n), c''''$ 是未估计到的部分。

根据定义,不难得到

$$e_{L(n)+\Delta_1}^{(L(n))}(n) = \begin{bmatrix} x'(n) \\ x''(n) \\ x'''(n) \\ x''''(n) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v'(n) \\ v''(n) \\ v'''(n) \\ c'''' \end{bmatrix} + t(n) \quad (11)$$

$$e_{L(n)+\Delta_2}^{(L(n))}(n) = \begin{bmatrix} x'(n) \\ x''(n) \\ x'''(n) \\ x''''(n) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v'(n) \\ v''(n) \\ c'''' \\ c'''' \end{bmatrix} + t(n) \quad (12)$$

2.2 组合参数的稳态性能分析

组合参数 $a(n)$ 的更新式,对等号两边取期望

$$E\{a(n+1)\} = [E\{a(n)\} + \mu_a E\{\lambda(n)(1 - \lambda(n))^2\} \cdot E\{(J_{ex,2}(n) - J_{ex,12}(n))\} - \mu_a E\{\lambda^2(n)(1 - \lambda(n))\} E\{(J_{ex,1}(n) - J_{ex,12}(n))\} + \rho(E\{a(n)\} - E\{a(n-1)\})]_{-a^+}^{a^+} \quad (13)$$

当 $\lambda(n) > 0.5$ 时, $E\{a(n+1)\}$ 单调递减。

证明

$$\frac{\mu_a E\{\lambda(n)(1-\lambda(n))^2\} E\{J_{ex,2}(n) - J_{ex,12}(n)\}}{\mu_a E\{\lambda(n)^2(1-\lambda(n))\} E\{J_{ex,1}(n) - J_{ex,12}(n)\}} = \frac{(1-\lambda(n))}{\lambda(n)} \cdot \frac{(J_{ex,2}(n) - J_{ex,12}(n))}{(J_{ex,1}(n) - J_{ex,12}(n))} \quad (14)$$

由式(11)和式(12)得

$$\begin{aligned} J_{ex,2}(n) - J_{ex,12}(n) &= (e_{L(n)}^{(L(n))})^2 - \\ &= (e_{L(n)+\Delta_1}^{(L(n))} \cdot e_{L(n)+\Delta_2}^{(L(n))}) = \underbrace{\mathbf{x}''^T(n) \mathbf{c}'' \mathbf{x}'^T(n) \mathbf{v}'(n)}_A + \\ &= \underbrace{\mathbf{x}''^T(n) \mathbf{c}'' \mathbf{x}''^T(n) \mathbf{v}''(n)}_B + \underbrace{(\mathbf{x}''^T(n) \mathbf{c}'' \mathbf{x}'^T(n) \mathbf{c}''^T)}_C + \\ &= \underbrace{\mathbf{x}''^T(n) \mathbf{c}'' \mathbf{x}''^T(n) \mathbf{c}''^T}_D + \underbrace{t(n) \mathbf{x}''^T(n) \mathbf{c}''^T}_E - \\ &= \underbrace{\mathbf{x}''^T(n) \mathbf{v}''(n) \mathbf{x}'^T(n) \mathbf{v}'(n)}_F - \underbrace{\mathbf{x}''^T(n) \mathbf{v}''(n) \mathbf{x}''^T(n) \mathbf{v}''(n)}_G - \\ &= \underbrace{\mathbf{x}''^T(n) \mathbf{v}''(n) \mathbf{x}''^T(n) \mathbf{c}''^T}_H - \underbrace{\mathbf{x}''^T(n) \mathbf{v}''(n) \mathbf{x}''^T(n) \mathbf{c}''^T}_I - \\ &= \underbrace{t(n) \mathbf{x}''^T(n) \mathbf{v}''(n)}_J \end{aligned} \quad (15)$$

由假设 1~4 可知, 稳态时, A, B, E, F, G, H, I, J 的均值为零, 再由假设 1 和假设 3 可知

$$\mathbf{c}''' = \mathbf{0} \quad (16)$$

由式(14)和式(15)得

$$E\{(A+B+C+D+E-F-G-H-I-J)\} = \sigma_x^2 \|\mathbf{c}''\|_2^2 \quad (17)$$

同理可得

$$\begin{aligned} J_{ex,1}(n) - J_{ex,12}(n) &= (e_{L(n)}^{(L(n))})^2 - \\ &= (e_{L(n)+\Delta_1}^{(L(n))} \cdot e_{L(n)+\Delta_2}^{(L(n))}) = \sigma_x^2 \|\mathbf{v}''(n)\|_2^2 \end{aligned} \quad (18)$$

将式(17), 式(18)代入式(14), 得

$$\frac{(1-\lambda(n))}{\lambda(n)} \cdot \frac{(J_{ex,2}(n) - J_{ex,12}(n))}{(J_{ex,1}(n) - J_{ex,12}(n))} = \frac{(1-\lambda(n)) \|\mathbf{c}''\|_2^2}{\lambda(n) \|\mathbf{v}''(n)\|_2^2} \quad (19)$$

式中, $\frac{\|\mathbf{c}''\|_2^2}{\|\mathbf{v}''(n)\|_2^2} < 1$ 。

由于初始状态 $E\{a(1)\} - E\{a(0)\} = 0$, 那么 $E\{a(2)\} - E\{a(1)\} < 0$, 由数学归纳法得:

假设 $E\{a(k)\} - E\{a(k-1)\} < 0$, 那么 $E\{a(k+1)\} - E\{a(k)\} = \mu_a E\{\lambda(n)(1-\lambda(n))^2\} \cdot E\{(J_{ex,2}(n) - J_{ex,12}(n))\} - \mu_a E\{\lambda^2(n)(1-\lambda(n))\} \cdot E\{(J_{ex,1}(n) - J_{ex,12}(n))\} + \rho(E\{a(n)\} - E\{a(n-1)\})$, 由式(19)可知, 当 $\lambda(n) > 0.5$ 时, $E\{a(k+1)\} - E\{a(k)\} < 0$ 成立。

证毕

由式(8)知 $\lambda(n)$ 属于 $[l, 1]$, 其中 $0.6 \leq l \leq 0.8$, 那么 $E\{a(n+1)\}$ 是单调递减的, 且 $-a^+ \leq E\{a(n+1)\} \leq a^+$, 所以有 $\lambda(n) \rightarrow \lambda_0$, 也就是说在第一阶段系统稳定。

当系统处于第二阶段时, 两个滤波器以相同的初始阶数, 各自进行阶数收敛。

令 $\Delta J_i = J_{ex,i}(\infty) - J_{ex,12}(\infty), i=1, 2$, 表示单个滤波器的 EMSE 与交叉 EMSE 的相差程度。从式(13)中可以

看出, $E\{a(n)\}$ 的极限值依赖于 $\Delta J_i (i=1, 2)$ 的值。由 Cauchy-Schwartz 不等式, 可知这两个值不可能同时都小于零, 考虑以下 3 种情况:

情况 1 如果 $J_{ex,1}(\infty) \leq J_{ex,12}(\infty) \leq J_{ex,2}(\infty)$, 那么 $\Delta J_1 \leq 0, \Delta J_2 \geq 0$ 。因为 $1-\lambda^+ \leq \lambda(n) \leq \lambda^+$, 那么 $E\{\lambda(n)[1-\lambda(n)]^2\}$ 和 $E\{\lambda(n)^2[1-\lambda(n)]\}$ 均小于 $\lambda^+(1-\lambda^+)^2$ 。则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$E\{a(n+1)\} \geq [E\{a(n)\} + C]_{-a^+}^+$$

式中, $C = \lambda^+(1-\lambda^+)^2(\Delta J_2 - \Delta J_1)$ 为正常数。因此, 式(13)唯一有效极限点为 $a(\infty) = a^+$, 则有

$$J_{ex}(\infty) = J_{ex,1}(\infty) \quad (20)$$

情况 2 如果 $J_{ex,1}(\infty) \geq J_{ex,12}(\infty) \geq J_{ex,2}(\infty)$, 那么 $\Delta J_1 \geq 0, \Delta J_2 \leq 0$ 。同理当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$E\{a(n+1)\} \leq [E\{a(n)\} - C]_{-a^+}^+$$

式中, $C = \lambda^+(1-\lambda^+)^2(\Delta J_1 - \Delta J_2)$ 为正常数。因此, 式(13)唯一有效极限点为 $a(\infty) = -a^+$, 则有

$$J_{ex}(\infty) = J_{ex,2}(\infty) \quad (21)$$

情况 3 如果 $J_{ex,12}(\infty) < J_{ex,i}(\infty)$, 则有 $\Delta J_i > 0, i=1, 2$ 。式(13)极限点可以通过式(22)描述。当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$E\{\lambda(n)[1-\lambda(n)]^2\} \Delta J_2 = E\{\lambda(n)^2[1-\lambda(n)]\} \Delta J_1 \quad (22)$$

令 $\bar{\lambda}(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} E\{\lambda(n)\}$, 则有

$$\bar{\lambda}(\infty) = \left[\frac{\Delta J_2}{\Delta J_1 + \Delta J_2} \right]_{1-\lambda^+}^{\lambda^+} \quad (23)$$

由式(23)得

$$\begin{cases} J_{ex,1}(\infty) < J_{ex,2}(\infty) \Rightarrow \lambda^+ \geq \bar{\lambda}(\infty) > 0.5 \\ J_{ex,1}(\infty) > J_{ex,2}(\infty) \Rightarrow 0.5 > \bar{\lambda}(\infty) \geq 1-\lambda^+ \end{cases} \quad (24)$$

对于 $\bar{\lambda}(\infty) = \lambda^+$ 和 $\bar{\lambda}(\infty) = 1-\lambda^+$, 组合滤波器性能与两个滤波器性能最好一个一致; 当 $\bar{\lambda}(\infty) \in (0, 1)$ 时, 组合滤波器性能优于两个滤波器中的任何一个, 具体证明步骤如下:

步骤 1 由定义式(1), 得到

$$\begin{aligned} J_{ex}(\infty) &= \bar{\lambda}(\infty)^2 J_{ex,1}(\infty) + [1-\bar{\lambda}(\infty)]^2 \cdot \\ &= J_{ex,2}(\infty) + 2\bar{\lambda}(\infty)[1-\bar{\lambda}(\infty)] J_{ex,12}(\infty) \end{aligned} \quad (25)$$

步骤 2 将式(23)未加限定代入式(24), 得

$$J_{ex}(\infty) = J_{ex,12}(\infty) + \frac{\Delta J_1 \Delta J_2}{\Delta J_1 + \Delta J_2} \quad (26)$$

又因为 $1-\lambda^+ < \bar{\lambda}(\infty) < \lambda^+ < 1, \Delta J_i = J_{ex,i}(\infty) - J_{ex,12}(\infty)$, 所以就有

$$\begin{cases} J_{ex}(\infty) = J_{ex,12}(\infty) + \bar{\lambda}(\infty) \Delta J_1 < J_{ex,1}(\infty) \\ J_{ex}(\infty) = J_{ex,12}(\infty) + [1-\bar{\lambda}(\infty)] \Delta J_2 < J_{ex,2}(\infty) \end{cases}$$

即 $J_{ex}(\infty) < \min\{J_{ex,1}(\infty), J_{ex,2}(\infty)\}$ 。

由文献[9], 可以得到

$$L_i(\infty) \approx L_{opt} + \Delta_i - \frac{\alpha_i}{\gamma_i \sigma_s^2 \sigma_c^2} - \frac{\Delta_i \mu' \sigma_i^2}{(2-\mu') L_{opt} \sigma_s^2 \sigma_c^2} \quad (27)$$

式中, μ' 是常数。

3 VW-CFTLMS 算法

通过对上述 CFTLMS 算法的稳定性分析知,参数 Δ_i 在收敛过程中起重要性作用;初始阶段控制着收敛速度;稳定阶段决定着稳态阶数与最优阶数 L_{opt} 间的偏差。应当注意的是:当 Δ_i 变小,滤波器阶数的稳态误差变小,收敛速度变慢,易导致局部次优解。为了使滤波器阶数能同时获得较快的收敛速度和较小的稳态误差,并避免次优解,本文提出了一种 VW-CFTLMS 算法。算法描述如下:

$$p_i(n) = \beta p_i(n-1) + (1-\beta)e_{L(n)}e_{L(n)+\Delta_i} \quad (28)$$

$$\Delta_i(n+1) = \lfloor \min(\Delta_{i,max}, F_i p_i^2(n)) \rfloor \quad (29)$$

$$l_{f_i}(n+1) = (l_{f_i}(n) - \alpha) - \gamma_i [(e_{i,L(n)}^{(L)})^2 - (e_{i,L(n)-\Delta_i(n)}^{(L)})^2], i = 1, 2$$

当 $\lambda(n) > t$ 时,有

$$l_{f_2}(n+1) = \phi l_{f_1}(n) + (1-\phi)l_{f_2}(n)$$

式中, $p_i(n)$ 为 $e_{L(n)}e_{L(n)+\Delta_i}$ 的自相关时间期望估计; $p_i(0) = e_{Lmi}e_{Lmi+\Delta_i}$; β 是小于接近于 1 的平滑参数; F_i 是常数。通过上式得到 $l_{f_i}(n+1)$, 滤波器阶数按照式(7)和式(8)进行更新。

新算法的变阶数是根据误差 $e_{L(n)+\Delta_i}$ 和上一步误差 $e_{L(n)}$ 的自相关时间期望的平方估计来调节变阶数的。在更新 $\Delta_i(n)$ 过程中,使用 $p_i(n)$ 具有两个好处:① 自相关误差通常是接近最佳值程度的衡量标准;② 在更新 $\Delta_i(n)$ 时,排除了不相关噪声影响,在自适应初始阶段,自相关估计误差 $p_i^2(n)$ 较大,获得较大变阶数 $\Delta_i(n)$ 。当接近最佳值,自相关误差 $p_i^2(n)$ 接近零,获得较小的变阶数。由于较大的初始 $\Delta_i(n)$ 值,获得较快收敛,同时由于后期 $\Delta_i(n)$ 较小,导致在最佳值附近产生较小失调,即便有噪声 $t(n)$ 也是如此,从而达到改善系统性能的目的。参数 F_i 可以扩大误差相关值影响,使该算法可以快速收敛,并对系统有快速反应。该算法与常规 CFTLMS 算法相比,增加更新变阶数式(28)和式(29),每次迭代增加 12 次乘法运算,但其中存在并行部分对实际计算效率影响不大。

4 参数选择依据

为了合理选择参数,首先需对最优滤波器阶数、输入信号方差、噪声方差以及均方误差进行估计,然后才能得出如下参数选择依据:

(1) 参数 a^+ 通常选择 4, 那么 $\lambda^+ = \text{sgm}(a^+)$, $\lambda(n)$ 的取值就介于 $[0.018, 0.982]$;

(2) 参数 μ' 的选取可依据均方误差的要求来确定。在高信噪比情况下, μ' 需选择一个较大值用于加快收敛速度;反之,在低信噪比情况下,选择一个较小值来减小均方误差;

(3) 参数 t 的选取由证明可以看出, $\lambda(n)$ 必须大于 0.5, 即参数 t 的选取必须在 0.5~1 之间;

(4) 为了获得滤波器阶数较快的收敛速度,参数 $\Delta_{1,max}$ 需要选取得尽可能大,但同时必须远小于 L_{opt} , 这样当算法进行到第二阶段时, $L_2(n)$ 才不会与最优阶数 L_{opt} 有较大偏差,有助于加快第 2 个滤波器的阶数收敛速度。参数 $\Delta_{2,max}$ 需要尽可能的小,这样可以保证滤波器的收敛阶数与最优阶数 L_{opt} 较接近,但又不能太小,如果太小会影响收敛速度。一般情况下, $\Delta_{1,max} \approx 0.25L_{opt}$, $\Delta_{2,max} \approx 0.2\Delta_{1,max}$ 是一个比较好的选择;

(5) F_i 的取值,可通过 $\Delta_i(\infty)$ 与稳态均方误差的关系求得,即 $F_i = \Delta_i(\infty) / (J_{ex}(\infty) + \sigma_i^2)^2$ 。其中^[10]

$$J_{ex}(\infty) = \frac{\mu(\infty)L(\infty)\sigma_i^2\sigma_c^2}{2 - \mu(\infty)L(\infty)\sigma_i^2} = \frac{\mu'\sigma_i^2}{2 - \mu'} \quad (30)$$

(6) 泄漏参数 α_1, α_2 不能太大,也不能太小^[9]。一般情况下, α_1 要大于 α_2 , 两者取值一般都在 0.001~0.1 之间;

(7) 参数 γ_i 是滤波器阶数迭代步长,较大的 γ_i 会加快滤波器阶数收敛速度,但稳态阶数的震荡明显;较小的 γ_i 使得稳态阶数的震荡减小,趋于平滑,但其收敛速度会变慢。所以说参数 γ_i 在 CFTLMS 算法的收敛过程中起着关键性作用,对于它的选择就显得尤为重要。文献[9]给出参数 γ 的上、下界的理论表达式:

参数 γ_i 的下界表达式为

$$\gamma_{l,i} = \frac{\alpha_i}{(\Delta_i - k\delta)\sigma_i^2\sigma_c^2 - \frac{\Delta_i\mu'\sigma_i^2}{(2-\mu')L_{opt}}} \quad (31)$$

参数 γ_i 的上界表达式为

$$\gamma_{u,i} = \frac{-\frac{K_{i,2}\alpha_i}{K_{i,3}} + \sqrt{\frac{K_{i,2}^2\alpha_i^2}{K_{i,3}^2} + 4(m^2\delta^2 + \alpha_i^2)}}{2} \quad (32)$$

式中

$$K_{i,1} = \frac{\Delta_i\mu'\sigma_i^2}{(2-\mu')L_{opt}}, K_{i,2} = 2 + 4\sigma_i^2 + \frac{4L_{opt}K_{i,1}}{\Delta_i}$$

$$K_{i,3} = 2K_{i,1}K_{i,2} - 2K_{i,1}\sigma_i^2((\Delta_i - 1)\sigma_i^2 + 3)$$

需要说明的是:参数 m 决定着阶数是否会震荡到 L_{opt} 下面,为了避免此类事件发生,一般在低信噪比(signal-to-noise ratio, SNR)情况下, m 取较小值;在高信噪比情况下,取较大值。在文献[9]中,对参数 γ_i 的推导可发现, γ_i 接近 $\gamma_{u,i}$ 可以避免稳态的阶数震荡并保持较快的收敛速度,因此实际中 γ_i 选取应接近 $\gamma_{u,i}$ 而不是 $\gamma_{l,i}$ 。在本文的算法中,为了提高系统的整体性能,滤波器 1 主要起加速收敛的作用,所以其阶数迭代步长要大些,一般取 $20\gamma_{u,1}$, 滤波器 2 主要起平滑滤波器阶数曲线的作用,同时还要保证收敛速度,所以其阶数迭代步长要小些,一般取 $0.5\gamma_{u,2}$, 该参数选取可由实验 1 验证。考虑到 CFTLMS 算法是改进 FTLMS 算法在低信噪比情况下的系统性能而提出的,所以仿真实验以低信噪比环境为背景。

5 仿真实验

实验 1 仿真参数的选择验证

SNR=0 dB 情况下,仿真参数设置如下:未知系统的冲击响应是一个均值为零、方差为 0.01 的高斯白噪声序列,滤波器阶数 L_{opt} 为 200。输入信号和噪声信号均为零均值单位方差的随机高斯信号。根据上述参数选择依据,参数 δ 取 2,步长 μ' 取 0.05,泄漏因子 α_1, α_2 分别为 0.05、0.005, Δ_1, Δ_2 分别为 50、20, $\rho=0.5, t=0.8, \varphi=0.99, L_{mi}=80, a^+=4$, 设定参数 $k=2, m=0.5, \gamma_i$ 的取值由依据(7)得: $\gamma_1=8.9, \gamma_2=1.022$; 在仿真中对 $(\gamma_1, \gamma_2), (10\gamma_1, 10\gamma_2)$ 和 $(0.1\gamma_1, 0.1\gamma_2)$ 分别进行仿真,依次命名为标准型、拉伸型、压缩型,所有 γ_i 都是符合下界要求的。在不同的参数 γ_i 设定下的滤波器 1 和滤波器 2 的阶数收敛曲线分别如图 1、图 2 所示。

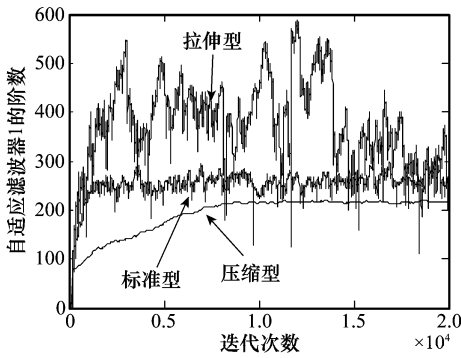


图 1 不同 γ_i 设定下,滤波器 1 的阶数收敛曲线 (SNR=0 dB)

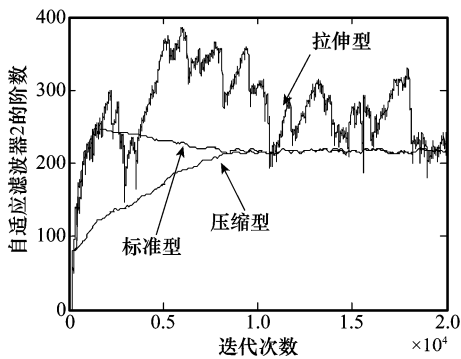


图 2 不同 γ_i 设定下,滤波器 2 的阶数收敛曲线 (SNR=0 dB)

从图 1、图 2 可以看到,当参数为 $(0.1\gamma_1, 0.1\gamma_2)$ 时,两个滤波器的阶数的收敛速度会很慢。当参数为 $(10\gamma_1, 10\gamma_2)$ 时,两个滤波器的阶数收敛速度快,但稳态阶数震荡较大;当参数为 (γ_1, γ_2) 时,系统则很好地解决了滤波器阶数收敛速度和稳态震荡之间的矛盾,具有较快的收敛速度和平滑的收敛曲线,并很好地避免了欠滤波器长度问题的产生。进一步分析可以看出: γ 值较大时,收敛速度加快,

满足滤波器 1 的需求; γ 值较小时,稳态阶数震荡较小,满足滤波器 2 的需求,显然参数 γ 的选取依据是正确的。另外,从仿真结果中还可以看到稳态阶数与理论值相符,在理论值 $L_i(\infty)$ 附近震荡。

实验 2 新算法与 CFTLMS 算法阶数稳态性能比较

SNR=0 dB 情况下,仿真参数设置如下:未知滤波器和输入信号和噪声信号均与实验 1 相同。在 CFTLMS 算法中,根据参数选择依据,参数 δ 取 2,步长 μ' 取 0.05,泄漏因子 α_1, α_2 分别为 0.05、0.005, Δ_1, Δ_2 分别为 50、20, $\rho=0.5, \beta=0.99, t=0.8, \varphi=0.99, L_{mi}=80, a^+=4$, 设定参数 $k=2, m=0.5, \gamma_i$ 的取值由依据(7)得: $\gamma_1=20\gamma_{u,1}, \gamma_2=0.5\gamma_{u,2}$ 。在新算法中,还存在以下几个参数的设置, $\Delta_{1,max}, \Delta_{2,max}$ 分别为 50、20; $\Delta_1(\infty), \Delta_2(\infty)$ 分别为 30、3, 则有 F_1, F_2 的取值分别为 28.5、2.85; $\beta=0.99$ 。新算法与 CFTLMS 算法的滤波器 1 和滤波器 2 阶数收敛曲线比较,分别如图 3、图 4 所示。

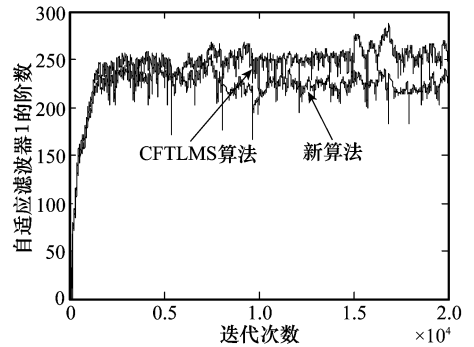


图 3 新算法与 CFTLMS 算法的滤波器 1 的收敛曲线比较 (SNR=0 dB)

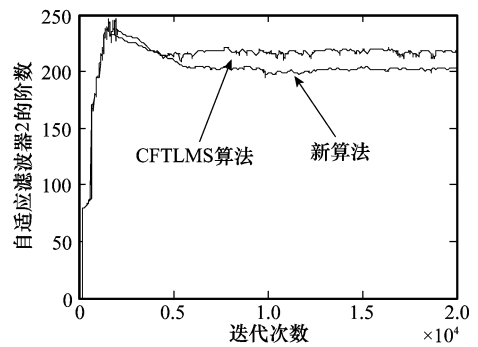


图 4 新算法与 CFTLMS 算法的滤波器 2 的收敛曲线比较 (SNR=0 dB)

从图 3、图 4 可以看到,新算法与 CFTLMS 算法相比,两个滤波器在收敛速度上基本趋于一致,但是新算法的阶数稳态误差明显小于 CFTLMS,与最优值相接近,从而达到改善系统性能的目的。

实验 3 新算法与 CFTLMS 算法的 EMSE 收敛性能比较

为了清楚地描述出 LMS 算法收敛后,阶数不同对滤波器性能的影响,给出了 EMSE 的定义式: $J_{er}(n) = E\{e(n)$

$-t(n))^2$ }, 其中 $e(n)$ 表示系统均方误差, $t(n)$ 表示噪声。仿真参数设置: 采用 PN 码作为输入的训练序列, 噪声信号是与输入信号不相关的白噪声, SNR 为 0 dB, NLMS 的参数采用典型值: $\varepsilon=0.01, \mu=0.1$; 其他参数设置与实验 2 相同, 进行了 500 次蒙特卡罗实验, 对实验结果取统计平均, 得到新算法与 CFTLMS 算法的 EMSE 收敛曲线, 如图 5 所示。

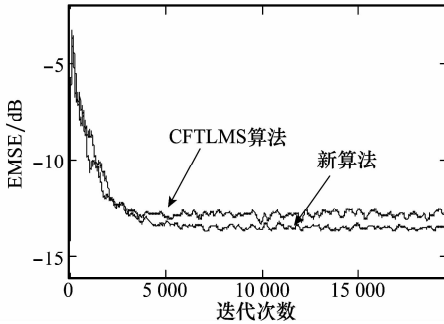


图 5 新算法与 CFTLMS 算法的 EMSE 收敛曲线比较 (SNR=0 dB)

从图 5 可以看出, 新算法的收敛速度与 CFTLMS 算法相当, 但其额外均方误差明显优于 CFTLMS 算法, 降低约 1.8 dB。

6 结束语

本文在对 CFTLMS 算法稳态性能分析的基础上, 提出了一种新算法, 即 VW-CFTLMS 算法, 并给出参数选择依据, 为工程实践提供了理论指导, 同时也为更好地理解 VW-CFTLMS 算法的原理及特性, 为进一步改进打下了基础。通过在低信噪比情况下的仿真, 验证了 VW-CFTLMS 算法稳态性能以及参数选择依据的正确性, 具有一定实用性。

参考文献:

- [1] Riera P F, Noras J M, Cruickshank D G M. Linear equalizers with dynamic and automatic length selection[J]. *Electronics Letters*, 2001, 37(25): 1553 - 1554.
- [2] Gu Y, Tang K, Cui H, et al. LMS algorithm with gradient descent filter length[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2004, 11(3): 305 - 307.
- [3] Gong Y, Cowan C F N. An LMS style variable tap-length algorithm for structure adaptation[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2005, 53(7): 2400 - 2407.
- [4] Zhang Y G, Chambers J A. Convex combination of adaptive filters for a variable tap-length LMS algorithm[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, 13(10): 628 - 631.
- [5] Kozat S S, Erdogan A T, Singer R C, et al. Steady-state MSE performance analysis of mixture approaches to adaptive filtering[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2010, 58(8): 4050 - 4063.
- [6] Arenas G J, Figueiras V A R, Sayed A H. Mean-square performance of a convex combination of two adaptive filters[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2006, 54(3): 1078 - 1090.
- [7] Papoulis E V, Stathaki T. A normalized robust mixed norm adaptive algorithm for system identification[J]. *IEEE Signal Processing*, 2004, 1(11): 56 - 59.
- [8] Arenas G J, Gomez V V, Figueiras A R, et al. New algorithms for improved adaptive convex combination of LMS transversal filters[J]. *IEEE Trans. on Instrument Message*, 2005, 54(6): 2239 - 2249.
- [9] Zhang Y G, Li N, Chambers J A, et al. Steady-state performance analysis of a variable tap-length LMS algorithm[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2008, 56(2): 839 - 845.
- [10] Greenberg J E. Modified LMS algorithm for speech processing with an adaptive noise canceller[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, 6(4): 338 - 351.