文章编号:1001-506X(2010)05-0971-05

# 基于 Bayes 理论与 Monte Carlo 模拟的风险型多属性群决策方法

毕文杰，陈晓红
（中南大学商学院，湖南 长沙 410083）

**摘　要**：针对方案属性值为随机变量、属性权重未知的风险型多属性群决策问题，根据决策者有无先验信息、专家估计方差是否可知等情形，提出了两类集结决策者和专家主观概率的多元 Bayes 模型。这些模型先将群体对属性值的估计集结成单一分布，然后用 Monte Carlo 模拟的方法，通过计算每个方案的排名期望值，得到各方案的排序。给出了应用该方法的具体步骤，实例分析验证了方法的有效性和实用性。

**关键词**：群决策；风险型多属性决策；Bayes 理论；Monte Carlo 模拟

**中图分类号**：N 945.17　　**文献标志码**：A　　**DOI**:10.3969/j.issn.1001-506X.2010.05.020

# Risky multicriteria group decision approach based on Bayesian theory and Monte Carlo simulation

BI Wen-jie, CHEN Xiao-hong
(*Business School, Central South Univ., Changsha 410083, China*)

**Abstract**: Aiming at the risky group decision making problem with a stochastic variable and unknown weight, two models of combining decision maker's and expert's subject probability are presented based on Bayesian theory, according to whether the decision maker has prior information and whether the expert's deviation is known. With those multivariate Bayesian aggregation models, a consensus probability distribution of each criterion's value is attained first. Then, by means of Monte Carlo simulation, a rank probability exception index is calculated which represents the probability of different ranks an alternative might get. Finally, an exception ranking score is defined as well, which can aid a decision maker to choose the best alternative. The solution procedure is given and the effectiveness of this approach is showed by an example.

**Keywords**: group decision; risky multicriteria decision; Bayesian theory; Monte Carlo simulation

## 0　引　言

风险型多属性决策是不确定性多属性决策的一种重要类型，在新产品研发、投资项目评估、风险分析与预测等经济管理领域有广阔的应用前景，因而引起了越来越多国内外学者的研究兴趣[1-3]。这类决策问题的特点是：方案的属性值或决策者偏好是随机变量，决策者无法预知未来的真实情况，但可以给出各种可能的状态，还可以通过概率分布来量化这种随机性[3]。由于这类问题本身的复杂性，往往采用群体决策的方式求解。

风险型多属性群决策问题需要解决两大问题：一是如何将多个专家给出的某个属性值（随机变量）的估计值集结为单一的概率（分布）；二是如何对属性值为随机变量的决策方案进行排序。对第一个问题，现有的方法包括基于数学的集结方法和基于行为的集结方法，详见文献[4-5]的综述。但这些方法主要针对单一事件的概率集结，未考虑多方案、多属性的情况；对于第二个问题，现有的方法包括随机优势[6]、SMAA (stochastic multicriteria acceptability analysis) 模型[7-8]及国内学者提出的基于综合赋权和概率优势的方法[3,9]。这些方法考虑了多属性，但都假设属性值的分布函数已知，且未考虑群体决策的场景。

而在实际决策环境中，往往因为缺乏相关统计数据，需要借助多个专家的经验对不确定决策问题的属性值进行估计。同时，这些决策问题大都还涉及多属性、多方案，所以需要一种综合考虑随机偏好集结和方案排序的群决策方法[10]。本文针对这类问题，结合 Bayesian 理论和 Monte

**收稿日期**:2008-11-11；**修回日期**:2009-03-17。
**基金项目**:国家自然科学基金(70971139,70921001)；湖南省自然科学基金(09JJ3130)资助课题
**作者简介**:毕文杰(1972-)，男，副教授，博士，主要研究方向为决策理论与群决策。E-mail:bwj@mail.csu.edu.cn

carlo 模拟方法，提出了一种集成专家主观概率(分布)集结和随机多属性决策方案选优的方法。该方法首先应用 Bayesian 决策理论，构建几类多元 Bayes 集结模型，将多个专家提供的方案属性估计值(分布)集结成单一分布，然后针对决策方案属性和权重均为随机变量的特点，用 Monte Carlo 模拟的方法，通过计算各方案期望排名因子和排名期望值，得到各方案的排序，最后，决策者根据自身的先验信息和专家的估计进行方案选优。

与文献[11]中所提出的 Bayes 集结和统计模拟方法相比，本文有如下改进：(1) 文献[11]只考虑了决策者不提供先验信息且估计方差已知的随机偏好集结问题。在实际决策问题中，这种假设过于严格，所以，本文扩展了文献[11]的研究，给出了决策者提供先验信息，专家估计方差未知的随机偏好集结模型。(2) 考虑到文献[11]中决策者风险接受程度系数很难确定，所以本文提出了一种通过期望排名因子和排名期望值直接结算方案排名的方法，该方法无需决策者提供额外主观数据，在实际应用中可操作性更强。

## 1 问题描述

风险型多属性群决策问题描述为：具有风险偏好的决策者(个人或决策层)需要对 $n$ 个决策方案(a1,…,a$n$)进行排序(选优)，每个方案有 $m$ 个属性，属性值 $x_{ij}$ 为随机变量；为了提高决策的准确性，决策者邀请了 $k$ 个专家对 $n$ 个方案的 $m$ 个属性值进行估计；在专家给出相关信息后，决策者根据自己的先验和专家估计值，分析各方案的优劣，选择最优的执行方案。这类群决策需要解决的问题包括：(1) 根据专家给出的各方案属性值的估计(分布)，采用某种方法将多个分布集结为统一的概率分布；(2) 根据各方案属性值及属性权重，分析各方案可能的排序。

## 2 基于 Morris 框架的随机变量集结模型

风险型多属性群决策首先要解决的问题决策者如何将多个专家对方案 $i$，属性 $j$ 的估计值 $x_{ijk}$(分布)集结为单一的分布 $x_{ij}$。这类问题称为概率(分布)集结问题，在气象、环境管理、经济预测、风险分析方面有广泛应用。主流的方法包括基于公理的方法[10]和以 Bayes 框架为基础的方法[12]。近年来，基于 Bayes 的方法再度成为研究的热点，如 Clemen 提出了点估计方法[13]，Jouini 提出了 Copulas 方法[14]，Merrick 提出了两两比较的方法[15]。但这几种方法过于复杂，需要估计众多参数，不适合做多属性决策问题的分布集结模型。下面我们在 Morris 框架下，给出几类适合多属性、多专家决策问题的多元 Bayes 分布集结模型。

Morris 提出的 Bayes 集结框架如下[12]

$$p^{*} = p(\theta \mid g_1,\cdots,g_n) \propto p(\theta)L(g_1,\cdots,g_n \mid \theta)$$

式中，$p(\theta)$ 为决策者对随机变量 $\theta$ 的先验分布；$L(g_1,\cdots,g_n \mid \theta)$ 为似然函数；$p(\theta \mid g_1,\cdots,g_n)$ 为 $\theta$ 的后验分布。该模型的主要思想是：决策者将多个专家的估计作为参考值(或观测样本)，更新自己的先验分布为后验分布，提高决策的准确性。模型中的似然函数即包括了专家给出的随机变量的分布，也包括决策者对专家的信任，所以如何确定似然函数是该模型的核心和难点。直接推导或主观确定似然函数往往非常困难，而且可能存在较大偏差。比较可行的方法是构建合适的统计模型，让其服从某种常见分布，并根据 Bayesian 共轭分布的概念，确定其先验和后验分布。

**定义 1**[16] 设 $\mathcal{F}$ 是一类观察值(样本)的分布 $p(y\mid\theta)$，$\mathcal{P}$ 是 $\theta$ 的一类先验分布，如果对于所有的 $p(\cdot\mid\theta)\in\mathcal{F}$，$p(\cdot)\in\mathcal{P}$，都有 $p(\theta\mid y)\in\mathcal{P}$，那么 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{F}$ 的共轭分布。如果 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{F}$ 是同类分布，则称 $\mathcal{P}$ 为自然共轭分布。

共轭分布的概念为 Bayesian 推理提供了一种方便实用的确定似然函数、先验分布及后验分布的方法。文献[16]证明，对于正态均值，自然共轭分布为正态分布，即观察值的均值如果为正态分布，那么其先验分布和后验分布均为正态分布。根据 Morris 的框架和共轭分布的概念，本文给出如下模型。

**假设 1** 设决策方案属性值为随机变量 $\theta$，为了更精确地得到 $\theta$ 的分布，决策者咨询了 $K$ 位专家，每位专家给出了 $\theta$ 估计值的密度函数分别为 $f_1,f_2,\cdots,f_k$。则专家 $i$ 给出估计值的均值为

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} \theta f_i(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

专家 $i$ 对 $\theta$ 的估计误差为

$$u_i = \mu_i - \theta \tag{2}$$

所以专家对 $\theta$ 的估计可以表示为 $f(\mu_i - u_i)$。专家判断的相关性都体现在专家对 $\theta$ 估计的误差的相关性上。

**假设 2** 设决策者对随机向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_k)$ 密度函数的估计为 $g(\boldsymbol{u})$。在决策者咨询专家之前，$\theta$ 和 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)$ 为随机变量，假设 $\boldsymbol{u}$ 是与位置无关的，即对 $\theta$ 的知识不会改变决策者对 $\boldsymbol{u}$ 的估计。$g(\mu_1-\theta,\cdots,\mu_k-\theta)$ (即 $g(\boldsymbol{u})$)既包含了专家提供的分布信息，又包含决策者对专家的信任，因此可以将 $g(\mu_1-\theta,\cdots,\mu_k-\theta)$ 看作似然函数，用以更新决策者的先验信息为后验信息。

**假设 3** $g(\boldsymbol{u})$服从何种分布对确定 $\theta$ 后验分布有重要影响。根据上述假设及“正态误差理论”，设 $g(\boldsymbol{u})$ 为多元正态分布是合理的。该多元正态分布的均值为 $k$ 个 0，方差为 $\sigma_i$ $(i=1,\cdots,k)$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}$。即决策者认为专家 $i$ 对 $\theta$ 的估计误差服从均值为 0，方差为 $\sigma_i$ 的正态分布。同时，假设专家 $i$ 对 $\theta$ 的估计也是均值 $\mu_i$，方差为 $\sigma_i^2$ 的正态分布，且如果 $\sigma_i^2 < \sigma_j^2$，则可以认为专家 $i$ 比专家 $j$ 对 $\theta$ 拥有更多信息，即专家 $i$ 提供的分布应获得更大的权重。专家间的相关系数为 $\rho_{ij} = \sigma_{ij}/\sigma_i\sigma_j$ $(i\neq j)$。

根据上述假设 1～3，我们有如下集结模型。

**集结模型 1** 设决策者对随机变量 $\theta$ 的先验分布为 $h_0(\theta)$，并设 $h_0(\theta)$ 为均值为 $\mu_0$、方差为 $\sigma_0^2$ 的正态分布，专家估计方差 $\sigma_i^2$ ($\boldsymbol{\Sigma}$)已知，则有

$$h(\theta \mid \mu) = h_0(\theta)g(\mu-\theta e) \propto$$
$$\exp\{-[(\theta-\mu_0)^2/2\sigma_0^2 + (\mu-\theta e)^t\Sigma^{-1}(\mu-\theta e)/2]\} \propto$$
$$\exp\{-(\theta-\mu_g)^2/2\sigma_g^2\} \tag{3}$$

式中

$$\mu_g = (\sigma_0^{-2}\mu_0 + \sigma^{*-2}\mu^*)/(\sigma_0^{-2} + \sigma^{*-2}) \tag{4}$$

$$\sigma_g^2 = (\sigma_0^{-2} + \sigma^{*-2})^{-1} \tag{5}$$

$$\mu^* = e^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mu/e^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}e \tag{6}$$

$$\sigma^{*2} = 1/e^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}e \tag{7}$$

由式(3)可知,$\theta$ 后验分布是均值为 $\mu_g$、方差为 $\sigma_g^2$ 的正态分布。

集结模型 1 中设协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 已知是一个相当严格的假设[11],一般情况下 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是未知的,但我们可以通过历史数据和决策者的主观判断确定 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的先验分布。根据文献[16],对正态过程的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$,逆 Wishart 分布是其自然共轭先验分布,所以可以认为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的先验分布服从逆 Wishart 分布。同时,由于 $\boldsymbol{\Sigma}$ 只与产生估计误差的过程有关,而与产生 $\theta$ 的过程无关,所以,假设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 与 $\theta$ 的先验分布相互独立是合理的。

**假设 4**　设 $\theta$ 的先验是无信息先验,$\mu$ 服从多元正态分布,均值为$(0,\cdots,0)^t$,协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}$,$\boldsymbol{\Sigma}$ 与 $\theta$ 的先验分布独立,$\boldsymbol{\Sigma}$ 先验服从逆 Wishart 分布,即

$$p(\boldsymbol{\Sigma}) \propto |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{(\delta_0+2k)/2}\exp\{-\delta_0 tr[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_0]/2\} \tag{8}$$

式中 $\delta_0 > 0$ 且 $\boldsymbol{\Sigma}_0$ 为对称正定矩阵。

**集结模型 2**　根据假设 4,$\theta$ 的后验密度函数为

$$h(\theta \mid \mu) \propto [1 + (\theta - m^*)^2/(\delta_0 + k - 1)s^{*2}]^{-(\delta_0+k)/2} \tag{9}$$

式中

$$m^* = e^t\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mu/e^t\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}e \tag{10}$$

$$s^{*2} = [\delta_0 + (m^*e - \mu)^t\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mu]/(\delta_0 + k - 1)e^t\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}e \tag{11}$$

即 $\theta$ 的后验一致分布是自由度为 $\delta_0 + k - 1$ 的 $t$ 分布,均值为 $m^*$,方差为 $(\delta_0 + k - 1)s^{*2}/(\delta_0 + k - 3)$。

通过比较集结模型 1 和集结模型 2,可以看出,$\theta$ 后验的均值在协方差 $\boldsymbol{\Sigma}$ 已知和未知的情况基本上是相同的,只需在 $\boldsymbol{\Sigma}$ 未知时用 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的先验估计 $\boldsymbol{\Sigma}_0$ 代替 $\boldsymbol{\Sigma}$。对于后验方差 $s^{*2}$ 可以从集结模型 1 中的 $\sigma^{*2}$ 得到,方法是将 $\sigma^{*2}$ 中的 $\boldsymbol{\Sigma}$ 用 $\boldsymbol{\Sigma}_0$ 代替,然后乘以 $[\delta_0 + (m^*e - \mu)^t\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mu]/(\delta_0 + k - 3)$。这个因子的取值取决于 $\delta_0$、$\boldsymbol{\Sigma}_0$ 及 $m^*$ 接近 $\mu$ 的程度,当 $\delta_0 \to \infty$ 时,该因子趋近于 1。这个结果与期望的相近,因为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的反 Wishart 先验分布有 $\delta_0 + 2k$ 个自由度。

在实际决策时,要求专家对 $\theta$ 的估计为给出正态分布的均值和方差可能在操作上有难度,这时可以让专家提供属性值估计的最小、最大、最可能值,然后用文献[17]提出的方法将这三个值代表的三角分布拟合为正态分布。

**举例**　设为预测某金属一年后的价格 $\theta$,决策者的先验 $\mu_0 = 60$,$\sigma_0^2 = 100$,咨询了三位专家,三位专家给出的 $\theta$ 的最小值 $a$、最大值 $b$、最可能值 $c$ 分别为:$a_1 = 50, b_1 = 61, c_1 = 55$;$a_2 = 58, b_2 = 63, c_2 = 60$;$a_3 = 48, b_3 = 55, c_3 = 52$。根据文献[18]的方法($c = \mu$, $b = \sigma z + \mu$, $a = \mu - \sigma z$, $z = 2.436\ 684$),三个三角分布拟合成的正态分布分别为 $\mu_1 = 55$, $\sigma_1 = 4.514\ 3$;$\mu_2 = 60$, $\sigma_2 = 2.052\ 0$;$\mu_3 = 52$, $\sigma_3 = 2.872\ 8$。如果同时考虑专家间的相关性,设 $\rho_{12} = 0.5$, $\rho_{13} = 0.6$, $\rho_{23} = 0.5$,则有

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 20.38 & 4.63 & 7.78 \\ 4.63 & 4.21 & 2.36 \\ 7.78 & 2.36 & 8.25 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.087 & -0.059\ 7 & -0.065\ 6 \\ -0.059\ 7 & 0.323\ 4 & -0.036\ 1 \\ -0.065\ 6 & -0.036\ 2 & 0.193\ 4 \end{bmatrix}$$

则根据式(3)～式(7),$\theta$ 的后验分布的 $\mu_g = 58.127\ 6$,$\sigma_g^2 = 3.429\ 3$。由此可见,经过咨询,预测方差变小。

## 3　方案排序的 Monte Carlo 模拟算法

对于决策方案属性值为随机变量的方案排序问题,现有的方法主要是基于随机优势和概率优势的[19-20],但这两种方法主要用于区分有效方案与无效方案,结果可能存在很多无法区别的方案。本文中采用 Monte Carlo 模拟的方法,通过分析各方案获得某个排序的可能性来判断方案可能的优劣。为此,先定义几个衡量方案排名可能性的指标。

**定义 2**　设决策方案的评价用价值函数 $u(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{w})$ 表示,$\boldsymbol{x}_i$ 和 $\boldsymbol{w}$ 均为随机变量,$\boldsymbol{w}$ 为属性的权重向量,本文中设 $w_i$ 服从[0,1]分布,$\sum w_i = 1$。$u(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{w})$ 为可加性线形函数 $u(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{w}) = \sum_j w_j u_j(x_{ij})$(本文中设 $u_j = x_{ij}$,在计算 $\boldsymbol{u}$ 之前,对随机变量 $x$ 进行归一化处理)。每一次模拟,用 $u(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{w})$ 的大小确定方案的排序,经过 $N$ 次模拟后,方案 $i$ 获得排名 $j$ 的次数与模拟总次数的比率为期望排名因子 $P_{ij}$,它表示方案 $i$ 排名为 $j$ 的可能性。

$P_{ij}$ 的计算用 Mote Carlo 模拟的方法求解,算法如下:

**算法 1**　方案期望排名因子 $P_{ij}$ 计算方法

// 变量:$h(i,j)$为方案 $i$ 获得排名 $j$ 的次数

//$\boldsymbol{w}$ 为权重向量,$\boldsymbol{x}_i$ 为方案 $i$ 的属性值向量

//$t_i$ 为方案 $i$ 的价值函数值

//$\boldsymbol{r}$ 为向量,表示各方案的排名,如 $r(2)=3$

//表示方案 2 的排名为 3

//$k_w$ 为模拟次数,一般 $k_w = 10\ 000$

//$p(i,j)$为所求期望排名因子

**步骤 1**　设 $h(i,j)$ 初值为 0;$i,j = 1,\cdots,m$;

**步骤 2**　生成[0,1]分布随机数,得到一组满足条件的权重向量 $\boldsymbol{w}$;

**步骤 3**　按各方案属性值的分布(均值、方差)随机生成属性值矩阵 $\boldsymbol{X}$,并对 $\boldsymbol{X}$ 进行规范化;

**步骤 4**　$t_i \leftarrow u(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{w})$,计算方案 $i$ 的价值函数 $u_i$,并将其赋值给 $t_i$;

**步骤 5**　$\boldsymbol{r} \leftarrow \mathrm{Rank}(t)$,Rank()表示根据价值函数获得方案 $t$ 的排名;

**步骤 6**　$h(i, r(i)) \leftarrow h(i, r(i)) + 1$,将方案 $i$ 获得排名 $r(i)$ 的次数加 1;

**步骤 7**　重复步骤 2～7 $k_w$ 次;

**步骤 8**　$p(i,j) \leftarrow h(i,j)/k_w$。

从 $P_{ij}$ 的定义可知,一个方案可能得到多个排名,且获

得每个排名的可能性不一样,为了衡量方案的综合排名,需再定义方案整体排名期望值。

**定义 3**　设方案的排名期望因子如定义 2,定义方案排名期望值如下

$$ES_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}(n+1-j),\ \forall i \in [1,n] \tag{12}$$

规范化后的排名期望值为

$$EW_i = \frac{ES_i}{\sum_{k=1}^{n} ES_k},\ \forall i \in [1,n] \tag{13}$$

## 4　风险性多属性群决策步骤

风险性多属性群决策可以按如下步骤进行:

**步骤 1**　决策者确定决策问题方案及属性,选择专家;

**步骤 2**　决策者提供自己的先验信息,各专家给出各方案的属性估计值(最小、最大、最可能值),将专家给出的估计值转化为正态分布;

**步骤 3**　按不同情况,用模型 1 和 2 中公式集结各专家的估计值,得到方案属性值的单一分布;

**步骤 4**　专家设定属性权重的信息,如果不给定权重信息,则假设权重为[0,1]上的均匀分布;

**步骤 5**　实现算法 1,获得权重向量和决策方案属性值矩阵,编程模拟 $k(>10\ 000)$次,计算出方案的期望排名因子 $P_{ij}$;

**步骤 6**　按式(12)和式(13)计算方案排名期望值;

**步骤 7**　根据排名期望值,对方案进行排序。

## 5　实例分析

某电池销售企业拟对制定的几种战略发展方案进行评估。该企业从三个决策变量(电池价格、绿色电池价格、需求量)的不同水平(降低、正常、升高)制定了 9 套战略方案。通过咨询,确定了三个方案评估指标:长期收益,短期收益,市场占有率。为了更客观评价战略计划,企业决策层请 6 位企业内部专家和行业专家对各方案进行评估。因为环境的不确定性,三个指标都为随机变量,专家对每种方案的属性值(长期收益、短期收益、市场占有率)给出估计值,最后决策者根据专家提供的信息进行方案选优。群决策具体过程如下。

**步骤 1**　决策者确定自己对各方案的先验信息,本案例中,假设决策者在咨询专家前认为 9 个方案没有差别,各方案的长期收益、短期收益及市场占有率的先验信息如表 1所示。

**表 1　决策者给出的方案属性值先验信息($a,b,c$)**

| 方案 | 长期收益 | 短期收益 | 市场占有率 |
|---|---|---|---|
| a1—a9 | (0,1 000,500) | (0,300,150) | (0,30,15) |

**步骤 2**　选择专家(本例中为 6 名),专家对各方案的属性值进行估计,考虑实际操作的简单性,专家只需给出各属性值的三角分布,即给出最小值 $a$,最大值 $b$,最可能值 $c$。例如某专家 $i$ 给出的 9 个方案的属性估计值如表 2 所示(其他专家的估计略)。

**表 2　专家 $i$ 给出的方案属性值($a,b,c$)**

| 方案 | 长期收益 | 短期收益 | 市场占有率 |
|---|---|---|---|
| a1 | (154,759,456.5) | (88,241,164) | (5,15,10) |
| a2 | (146,751,448.5) | (89,242,165) | (2,8,5) |
| a3 | (192,705,448.5) | (99,228,163) | (5,15,10) |
| a4 | (0,588,294) | (27,180,103) | (5,15,10) |
| a5 | (329,881,605) | (145,294,219) | (5,15,10) |
| a6 | (126,726,426) | (84,233,158) | (10,20,15) |
| a7 | (144,744,444) | (88,237,162) | (8,2,14) |
| a8 | (95,782,438.5) | (76,249,162) | (5,15,10) |
| a9 | (196,709,452.5) | (98,227,162) | (10,20,15) |

**步骤 3**　按文献[17]的方法将决策者和专家给出的三角分布转换为正态分布,并根据式(3)～式(7)将决策者先验和各专家的分布集结为一致分布,结果如表 3 所示。

**表 3　决策方案属性值的后验分布($\mu,\sigma$)**

| 方案 | 长期收益 | 短期收益 | 市场占有率 |
|---|---|---|---|
| a1 | (467,128) | (164,30) | (9.3, 5) |
| a2 | (447,126) | (165,31) | (4.5, 2) |
| a3 | (450,107) | (163,27) | (9.5, 2.5) |
| a4 | (268,135) | (104,32) | (9.0, 3) |
| a5 | (605,117) | (221,33) | (9.2,2) |
| a6 | (426,125) | (158,31) | (15,6) |
| a7 | (446,125) | (161,31) | (9.6, 3) |
| a8 | (439,143) | (163,36) | (9.8,4) |
| a9 | (453,107) | (163,27) | (16,4) |

**步骤 4**　根据决策方案属性的分布情况和权重的分布及算法 1,用 Matlab7.0 编程模拟计算(为保证 $P_{ij}$ 误差在 0.01 范围内的置信度为 95%,本例模拟 10 000 次[21]),得到 $P_{ij}$,如表 4 所示。

**表 4　各方案期望排名因子 $P_{ij}$**　(%)

| 方案 | $P_{i1}$ | $P_{i2}$ | $P_{i3}$ | $P_{i4}$ | $P_{i5}$ | $P_{i6}$ | $P_{i7}$ | $P_{i8}$ | $P_{i9}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a1 | 8 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 8 |
| a2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 17 | 18 |
| a3 | 7 | 10 | 12 | 13 | 13 | 13 | 13 | 11 | 8 |
| a4 | 8 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 11 | 14 | 30 |
| a5 | 25 | 14 | 11 | 9 | 9 | 8 | 8 | 8 | 9 |
| a6 | 15 | 15 | 14 | 13 | 11 | 10 | 10 | 8 | 5 |
| a7 | 8 | 10 | 11 | 12 | 14 | 13 | 12 | 11 | 8 |
| a8 | 8 | 10 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 10 |
| a9 | 17 | 17 | 15 | 13 | 12 | 10 | 7 | 6 | 3 |

**步骤 5**　根据式(12)和式(13)计算各方案的排名期望值 $EW_i$,如表 5 所示。

**表 5　各方案的排名期望值 $EW_i$**

| 方案 | 排名期望值 $EW_i$ | 排名 |
|---|---|---|
| a1 | 0.107 826 | 7 |
| a2 | 0.086 483 | 8 |
| a3 | 0.109 160 | 4 |
| a4 | 0.084 037 | 9 |
| a5 | 0.132 059 | 2 |
| a6 | 0.128 279 | 3 |
| a7 | 0.108 715 | 5 |
| a8 | 0.108 493 | 6 |
| a9 | 0.135 171 | 1 |

**步骤 6**　结果分析。从表 3 可知:方案 a5 的 $P_{i1}$ 值最大,表明方案 a5 最有可能获得排名第 1,方案 a4 的 $P_{i1}$ 最小,而 $P_{i9}$ 最大,表明方案 a1 获得排名第 9 的可能性最大,其他方案可做类似分析。

$EW_i$ 为方案的排名依据,从表 5 可知,方案 a9 的 $EW_i$ 最大,而 a4 最小,所以,按 $EW_i$ 进行的方案排序为:a9≻a5≻a6≻a3≻a7≻a8≻a1≻a2≻a4。

## 6　结　论

本文针对方案属性值为随机变量的风险性多属性群决策问题,结合 Bayes 理论和 Monte Carlo 模拟方法,提出了几种主观概率(分布)集结模型和随机多属性决策方案排序的方法。这些模型和方法的优点是:(1) 集结模型考虑了决策者的先验信息和专家方差未知的情况,更加符合实际决策问题需要。(2) 由于采用概率集结和随机模拟的方法,保留了随机变量的特性,因此结果具有统计意义,解释能力更强。

如何将该方法扩展,以处理决策过程中专家判断之间及属性之间存在相关性的群决策问题,是进一步研究的方向。

## 参考文献:

[1] Stewart T. *Dealing with uncertainties in MCDA*[C]// *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. New York: Springer, 2005:445 - 466.

[2] 姚升保,岳超源. 基于综合赋权的风险型多属性决策方法[J]. 系统工程与电子技术,2005,27(12): 2047 - 2050. (Yao Shengbao, Yue Chaoyuan. Method for multiple attribute decision-making under risk based on synthetic weighting[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2005, 27(12): 2047 - 2050.)

[3] 于义彬,王本德. 具有不确定信息的风险型多目标决策理论及应用[J]. 中国管理科学,2003, 11(06): 9 - 13.

[4] Clemen R T, Winkler R L. Combining probability distributions from experts in risk analysis[J]. *Risk Analysis*, 1999, 19(2): 187 -203.

[5] 杨雷,席酉民. 理性群体决策的概率集结研究[J]. 系统工程理论与实践, 1998(4): 90 - 94.

[6] Nowak M. Aspiration level approach in stochastic MCDM problems[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007,177(3): 1626 - 1640.

[7] Lahdelma R, Hokkanen J, Salminen P. SMAA- stochastic multiobjective acceptability analysis [J]. *European Journal of Operational Research*, 1998,106(1):137 - 143.

[8] Lahdelma R, Makkonen S, Salminen P. Multivariate Gaussian criteria in SMAA [J]. *European Journal of Operational Research*, 2006,170(3):957 - 970.

[9] 姚升保. 基于随机优势与概率优势的风险型多属性决策方法[J]. 预测,2007,26(3):33 - 38.

[10] Garthwaite P H, Kadane J B, O'Hagan A. Statistical methods for eliciting Probability distributions[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 2005(100):680 - 700.

[11] 毕文杰,陈晓红. 群决策中随机信息的贝叶斯集结与统计模拟方法[J]. 控制与决策,2009,24(2):262 - 273.

[12] Morris P A. Combining expert judgments: A Bayesian approach[J]. *Management Science*, 1977,23: 679 - 693.

[13] Clemen R T, Winkler R L. Aggregating point estimates: A flexible modeling approach[J]. *Management Science*, 1993,39: 501 - 515.

[14] Jouini M N, Clemen R T. Copula models for aggregating expert opinions[J]. *Operations Research*, 1996,44:444 - 457.

[15] Merrick J R W, Dorp van J R, Singh A. Analysis of correlated expert judgments from extended pairwise comparisons[J]. *Decision Analysis*, 2005,2:17 - 29.

[16] Gelman A, Carlin J B, Stern H S, et al. *Bayesian data analysis*[M]. 2nd ed. London: Chapman and Hall, 2003.

[17] Scherer W T, Pomroy T A, Fuller D N. The triangular density to approximate the normal density: decision rules-of-thumb [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2003,82(3):331 -341.

[18] Robert C P, Casella G. *Monte Carlo statistical methods* [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2004.

[19] Martel J M, Zaras K. Stochastic dominance in multicriterion analysis under risk [J]. *Theory and Decision*, 1995,(39):31 - 49.

[20] Sengupta J K. Maximum probability dominance and portfolio theory[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1991,71(2):341 - 357.

[21] Miton J S. *Probability and statistics* [M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1995.