

一种有限对象集的输入通道任意增益/相角裕度调节方法

武 杰, 孙秀霞, 董文瀚

(空军工程大学工程学院, 陕西 西安 710038)

摘 要: 针对一类有限多输入多输出线性时不变对象集, 提出了一种调节输入通道增益/相角裕度的方法。首先针对单个对象, 采用连续线性二次调节器理论设计状态反馈控制器; 进而利用周期控制方法设计一个针对有限对象集的线性周期控制器。该控制器可使有限对象集的所有反馈控制回路在输入通道同时实现任意大的增益裕度和直到 90° 的相角裕度。仿真结果表明了所设计控制器的有效性。

关键词: 线性周期控制器; 连续线性二次调节器理论; 状态反馈; 增益裕度; 相角裕度

中图分类号: TP 273

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2011.12.29

Tuning method to provide arbitrarily large gain/phase margins in the input channels for a finite set of plants

WU Jie, SUN Xiu-xia, DONG Wen-han

(Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

Abstract: For a finite set of multiple-input multiple-output (MIMO) linear time-invariant (LTI) plants, a new method to tune gain/phase margins in the input channels is presented. By using the theory of continuous-time linear quadratic regulator (LQR), a state feedback controller is designed for a plant at first, and then a method of periodic control is used to design a linear periodic controller for a finite set of plants. The controller can simultaneously provide gain margins as large as desired and phase margins of up to 90 degrees in the input channels of all feedback control loops for a finite set of plants. Simulation results show the effectiveness of the proposed control law.

Keywords: linear periodic controller; continuous-time LQR theory; state feedback; gain margin; phase margin

0 引 言

增益裕度和相角裕度是衡量系统稳定鲁棒性程度的重要指标。尽管相关概念提出较早, 但如何获得满意的增益裕度和相角裕度一直是控制领域的热点研究方向。

针对单输入单输出 (single-input single-output, SISO) 对象, 文献[1-6]通过调节比例积分微分 (proportional-integral-derivative, PID) 控制器在不同的限制条件下获得满意的增益相角裕度; 文献[7]采用分析综合的方法设计一个状态反馈控制器, 达到了相同的目的; 文献[8]针对有限的 SISO 对象集, 在保证系统灵敏度上界的前提下, 通过调节 PID 控制器来实现任意大的增益裕度。

针对多输入多输出 (multiple-input multiple-output, MIMO)

对象, 文献[9-10]指出一个线性二次调节器 (linear quadratic regulator, LQR) 可以在 MIMO 闭环系统产生 60° 的相角裕度和 $(\frac{1}{2}, \infty)$ 的增益裕度; 文献[11-13]基于上述理论设计一类静态通用采样保持函数 (generalized sampled-data hold function, GSHF) 控制器^[14], 使系统在输出通道实现任意大的增益裕度; 文献[15-16]采用一种新的证明方法, 把文献[11-13]的方法拓展到联合增益相角裕度问题中。

但是, 综合分析上述文献, 可以看出, 目前尚未发现能同时调节有限集 MIMO 对象联合增益相角裕度的统一线性控制器。鉴于此, 本文在文献[15-16]的基础上, 设计了一个统一的线性周期控制器, 使有限 MIMO 对象集的所有反馈控制回路在输入通道均可获得任意大的增益裕度和直

收稿日期: 2011-03-15; 修回日期: 2011-10-07。

基金项目: 国家自然科学基金 (60904038) 资助课题

作者简介: 武杰 (1985-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为现代控制理论与应用、飞行控制。E-mail: wujielgd@163.com

到 90° 的相角裕度。具体方案为:首先利用增益相角裕度测试器^[17-18] $\gamma: = \rho e^{-j\phi}$ 使有限集联合增益相角裕度问题转化为有限集不确定系统的稳定性问题;再采用连续 LQR 理论和周期控制方法设计一个满足要求的统一线性周期控制器。

1 问题描述

考虑如下系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $x \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态; $u \in \mathbf{R}^m$ 为系统的控制输入; $y \in \mathbf{R}^r$ 为系统输出; A, B, C 属于如下集合:

$$\{(A_i, B_i, C_i) \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i} \times \mathbf{R}^{n_i \times m} \times \mathbf{R}^{r \times n_i}; i = 1, \dots, q\}$$

即有限对象集的每个对象均具有 m 个输入和 r 个输出,但可能有不同的状态维数。

控制目标:给定一个有限对象集合,设计一个统一的线性控制器,使该有限集内的所有对象在输入通道均可获得任意大的增益裕度和直到 90° 的相角裕度。

类似文献[15],系统(1)输入通道的增益/相角裕度调节问题可等价于以下控制问题:在系统(1)的输入通道加入不确定性,得到系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \gamma Bu(t), x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2)$$

其中不确定参数 $\gamma \in \mathbf{C}$, 并属于如下集合:

$$\Gamma(\underline{\rho}, \bar{\rho}, \bar{\phi}): = \{\rho e^{-j\phi}; \rho \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}], \phi \in [-\bar{\phi}, \bar{\phi}]\}$$

式中, $\underline{\rho} \in (0, 1]; \bar{\rho} \in [1, \infty); \bar{\phi} \in [0, \frac{\pi}{2})$ 。此时,不确定系统状态 $x(t) \in \mathbf{C}^n$, 输出 $y(t) \in \mathbf{C}^r$ 。由文献[17-18]可知: $\gamma = \rho e^{-j\phi}$ 为系统(1)的增益相角裕度测试器。 $[\underline{\rho}, \bar{\rho}]$ 代表了系统(1)增益的调节范围, $[-\bar{\phi}, \bar{\phi}]$ 代表了系统(1)相角的调节范围。当 $\bar{\phi} = 0$, 此时该问题为有限集增益裕度问题;当 $\underline{\rho} = \bar{\rho} = 1$ 时,此时该问题为有限集相角裕度问题;一般情况则为有限集联合增益相角裕度问题^[15-16]。

用 (A, B, C) 表示系统(1), $(A, \gamma B, C)$ 表示系统(2)。控制目标转化为:设计控制律 $u(t)$ 稳定如下系统: $\{(A_i, \gamma B_i, C_i); \gamma \in \Gamma(\underline{\rho}, \bar{\rho}, \bar{\phi}); i = 1, \dots, q\}$ 。

为完成控制器设计,对系统(1)作如下假设:

假设 1 系统(1)的每一个 (A_i, B_i) 可控;

假设 2 系统(1)的每一个 (C_i, A_i) 可观测;

假设 3 当 $i \neq j$ 时, A_i 和 A_j 具有完全不同的特征值。

符号标记:记函数 $f = o(T^j)$, 若存在着一个常数 $c_1 > 0, T_0 > 0$ 使得 $\|f(T)\|_2 \leq c_1 T^j, T \in (0, T_0)$; $sp\{\Pi\}$ 表示矩阵 $\Pi \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 的特征值集合; W^* 表示 $W \in \mathbf{C}^{m \times m}$ 的共轭转置; 序列 $G \in s(\mathbf{R}^{n \times m})$ 表示该序列的每个元素均属于 $\mathbf{R}^{n \times m}$ 。

2 控制律设计及稳定性分析

2.1 控制律设计

控制律设计过程包括三大步:

步骤 1 设计可调节单个对象输入通道增益/相角裕度的状态反馈控制器。

定理 1 选定 i , 则存在着状态反馈控制器 $u = F_i x(t)$, $F_i \in \mathbf{R}^{m \times n_i}$ 稳定如下形式的任何系统

$$\{(A_i, \gamma B_i, C_i); \gamma \in \Gamma(\underline{\rho}, \bar{\rho}, \bar{\phi})\}$$

证明 证明过程分为两大步

(1) 构造辅助系统,采用连续 LQR 理论选择 F_i 。

由文献[10]可知,一个 LQR 最优控制器可保证 MIMO 线性时不变系统的每个反馈控制回路均具有 60° 的相角裕度和 $(\frac{1}{2}, \infty)$ 的增益裕度;为了使系统 (A_i, B_i, C_i) 可实现任意的增益裕度和直到 90° 的相角裕度,本文采用类似于文献[15-16]的方法,按比例调整系统(1)的系数矩阵 B_i , 得到辅助系统,从而修改标准的 LQR 问题。定义

$$\alpha: = 2\cos(\bar{\phi}) \quad (3)$$

$$\hat{B}_i: = \alpha \underline{\rho} B_i \in \mathbf{R}^{n_i \times m} \quad (4)$$

构造辅助系统:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + \hat{B}_i u(t), x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^{n_i} \quad (5)$$

由文献[19]可知,针对式(5)表示的系统,对任意的初始值 x_0 , 可找到如下形式的最优控制:

$$u(t) = F_i x(t) \quad (6)$$

使得以下的性能指标最小,其表达式为

$$\int_0^\infty [x(t)^T Q_i x(t) + u(t)^T R_i u(t)] dt$$

式中, $Q_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}, R_i \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 为正定对称矩阵。且当 (A_i, \hat{B}_i) 可控时,系统(5)的连续代数 Riccati 方程具有唯一的正定对称解 P_i :

$$A_i^T P_i + P_i A_i - P_i \hat{B}_i R_i^{-1} \hat{B}_i^T P_i + Q_i = 0 \quad (7)$$

相应的辅助系统最优增益 F_i 为

$$F_i = -R_i^{-1} \hat{B}_i^T P_i \quad (8)$$

(2) 证明由式(8)所得到的 F_i 使 $u = F_i x(t)$ 稳定系统

$\{(A_i, \gamma B_i, C_i); \gamma \in \Gamma(\underline{\rho}, \bar{\rho}, \bar{\phi})\}$, 即证明

$$sp(A_i + \rho e^{-j\phi} B_i F_i) \subset \mathbf{C}^- \quad (9)$$

由假设 1 可知 (A_i, B_i) 可控, 则 (A_i, \hat{B}_i) 可控, 所以式(7)存在唯一的正定对称解 P_i 。设

$$\hat{\rho} \in [\frac{1}{\alpha}, \frac{\bar{\rho}}{\alpha}], \phi \in [-\bar{\phi}, \bar{\phi}] \quad (10)$$

考虑

$$\dot{x}(t) = (A_i + \hat{\rho} e^{-j\phi} \hat{B}_i F_i) x(t), x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^{n_i}$$

固定 x_0 且考虑候选 Lyapunov 函数 $V: \mathbf{C}^{n_i} \rightarrow \mathbf{C}$:

$$V(x(t)): = x(t)^* P_i x(t) \quad (11)$$

由 P_i 为正定对称矩阵可知 V 为非负实数, 因此

$$\dot{V}(x(t)): = \frac{\partial}{\partial x} V(x) \dot{x}(t) \quad (12)$$

为实数。展开 $\dot{V}(x(t))$ 并使用式(7)和式(8)简化, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & -x(t)^* Q_i x(t) + \\ & (1 - 2\bar{\rho}\cos\phi)x(t)^* (P_i \hat{B}_i R_i^{-1} \hat{B}_i^T P_i)x(t) \end{aligned} \quad (13)$$

由式(3)、式(10)及 $\rho, \bar{\rho}, \bar{\phi}$ 的边界, 可得

$$1 - 2\bar{\rho}\cos\phi \leq 0 \quad (14)$$

再根据 P_i 和 R_i 均为正定对称矩阵, 可得式(13)右侧第二项为非正数, 从而:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -x(t)^* Q_i x(t) \quad (15)$$

由于 Q_i 为正定对称矩阵, 因此对每一个 x_0 , 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $V(x(t)) \rightarrow 0$; 由于 P_i 是正定的, 所以当 $t \rightarrow \infty$ 时, 亦有 $x(t) \rightarrow 0$, 得到:

$$\begin{aligned} sp(A_i + \hat{\rho}e^{-j\bar{\phi}} \hat{B}_i F_i) & \subset C^- \\ \Leftrightarrow sp(A_i + \alpha\rho\hat{\rho}e^{-j\bar{\phi}} \hat{B}_i F_i) & \subset C^- \end{aligned}$$

由于 $\alpha\rho\hat{\rho} \in [\rho, \bar{\rho}]$, 则当 $\rho \in [\rho, \bar{\rho}]$, $\phi \in [-\bar{\phi}, \bar{\phi}]$ 时, 得证式(9)成立, 从而得证定理 1。

步骤 2 在第一步的基础上, 设计一个可调节单个对象输入通道增益/相角裕度的周期控制器。

本文设计了一种周期控制的方法, 该方法将状态反馈控制器 $u = F_i x(t)$ 近似为周期为 $T_i = \rho h > 0$ 的如下控制律:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [kT, (k + \frac{\bar{n}}{p})T) \\ \frac{p}{p - \bar{n}} F_i x[kT], & t \in [(k + \frac{\bar{n}}{p})T, (k + 1)T) \end{cases} \quad (16)$$

式中, $k \in \mathbf{Z}^+$; $F_i \in \mathbf{R}^{m \times n}$; $p > \bar{n} \geq 0$ 为正整数。其基本思想是将控制器周期化, 每一个周期分为两部分: 估计阶段和控制阶段。在估计阶段, 关闭控制信号以辨识系统, 在控制阶段, 应用合适的状态反馈控制律, 对被控对象进行实际控制。不断地进行上述“估计-控制-估计……”的过程, 周期性地探测系统并施加控制。控制律(16)一个周期内的控制信号如图 1 所示。

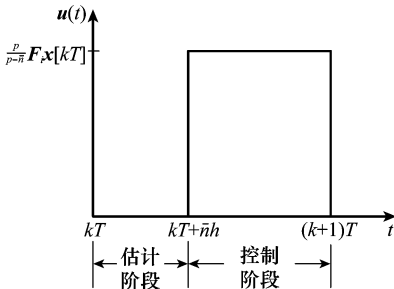


图 1 控制律(16)的估计和控制阶段

注 1 控制律(16)在一个周期 T 内的完整控制信号等于: $\{(p - \bar{n}) \times \frac{p}{p - \bar{n}} F_i x[kT]\} \div p = F_i x[kT]$ 。即如果采样时间 h (即周期 $T = \rho h$) 越小, 则控制律(16)对系统产生的

效果越接近于状态反馈控制器 $u = F_i x(t)$ 。事实上, 采样时间 h 不可能无限小, 它受计算机等硬件条件的限制。

定理 2 选定 i , 则存在着 $T_1 > 0$, 使得对任意 $T \in (0, T_1)$, 控制律(16)稳定如下形式的任何系统:

$$\{(A_i, \gamma B_i, C_i) : \gamma \in \Gamma(\rho, \bar{\rho}, \bar{\phi})\}$$

证明 定义

$$A_d^i := e^{A_i T}, B_d^i := \frac{p}{p - \bar{n}} \int_0^{\frac{p-\bar{n}}{p}T} e^{A_i \tau} B_i d\tau \quad (17)$$

选定 i , 将式(16)代入系统 $(A_i, \gamma B_i, C_i)$, 得到

$$x[(k+1)T] = (A_d^i + \gamma B_d^i F_i)x[kT], \quad k \in \mathbf{Z}^+ \quad (18)$$

则要证定理 2, 即证存在着控制律(16)对每个 $\gamma \in \Gamma(\rho, \bar{\rho}, \bar{\phi})$, 有

$$sp(A_d^i + \gamma B_d^i F_i) \subset \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\} \quad (19)$$

由定理 1 可得式(8)所选择的 F_i 使 $A_i + \gamma B_i F_i$ 稳定, 定义 $A_\gamma^i := A_i + \gamma B_i F_i$, 则 $A_\gamma^i \in \mathbf{C}^{n_i \times n_i}$, 且存在着唯一的实正定对称矩阵 P_γ , 使得:

$$(A_\gamma^i)^* P_\gamma + P_\gamma A_\gamma^i + I = 0 \quad (20)$$

考虑

$$x[k+1] = (A_d^i + \gamma B_d^i F_i)x[k], x[0] = x_0 \in \mathbf{R}^{n_i} \quad (21)$$

由麦克劳林公式和 γ 的有界性, 可化式(21)为

$$x[k+1] = [I + A_\gamma^i T + o(T^2)]x[k] \quad (22)$$

固定 x_0 且考虑候选 Lyapunov 函数 $V: \mathbf{C}^{n_i} \rightarrow \mathbf{C}$:

$$V(x) := x^* P_\gamma x \quad (23)$$

由 P_γ 为正定对称矩阵可知 V 为非负实数, 因此

$$\Delta V(x[k]) := V(x[k+1]) - V(x[k]) \quad (24)$$

为实数。依次代入式(22)和式(20)可得:

$$\begin{aligned} \Delta V(x[k]) = & Tx[k]^* [(A_\gamma^i)^* P_\gamma + P_\gamma A_\gamma^i + o(T)]x[k] - \\ & Tx[k]^* x[k] + o(T^2)x[k]^* x[k] \end{aligned} \quad (25)$$

所以存在着 $T_1 > 0$, 使得:

$$\Delta V(x[k]) \leq 0, T \in (0, T_1) \quad (26)$$

因此, 对任意 x_0 , 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $V(x(t)) \rightarrow 0$; 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, 亦有 $x(t) \rightarrow 0$, 从而得证式(19), 即得证定理 2。

步骤 3 设计一个针对有限对象集的统一线性周期控制器, 该控制器可对有限对象集内的任一对象产生相应的控制信号(16)。

选用如下形式的线性周期控制器来调节有限 MIMO 对象集输入通道的增益相角裕度:

$$\begin{aligned} z[k+1] = & G(k)z[k] + H(k)y(kh), z[0] = z_0 \in \mathbf{R}^m \\ u(kh + \tau) = & J(k)z[k], \tau \in [0, h) \end{aligned} \quad (27)$$

用 $p \in \mathbf{Z}^+$ 表示控制器参数 G, H 和 J 的周期, 使得线性周期控制器(27)的周期为 $T_i = \rho h > 0$, 用 5 维数组 (G, H, J, T, ρ) 来表示控制器(27)。首先给出如下引理:

引理 1^[20] 选定 i , 当系统(1)的 (C_i, A_i) 可观测时, 则存在着一个 $T_\beta > 0$, 使得对任意 $T \in (0, T_\beta)$, $(C_i, e^{A_i T})$

观测。

再通过理论证明给出如下结论:

定理 3 令 $T > 0, \gamma \in \mathbf{C}$, 对每个 $p > \bar{n} := n_1 + \dots + n_q$, 存在着一个 $h_0 > 0$ 和一个 m 阶的线性周期控制器 $(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{J}, T, \rho)$, 使得对任意 $h \in (0, h_0)$, 该控制器可对任意 $(\mathbf{A}_i, \gamma \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i)$ 产生相应的控制信号(16), 其中, $i = 1, \dots, q$ 。

证明 设 $k \in \mathbf{Z}^+$, 对系统 $(\mathbf{A}_i, \gamma \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i)$ 应用控制律(16), 得到

$$\mathbf{x}[kT + jh] = (e^{\mathbf{A}_i h})^j \mathbf{x}[kT], j = 0, 1, \dots, \bar{n} - 1 \quad (28)$$

因此

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}[kT] \\ \mathbf{y}[kT + h] \\ \vdots \\ \mathbf{y}[kT + (\bar{n} - 1)h] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i \\ \mathbf{C}_i e^{\mathbf{A}_i h} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_i e^{\mathbf{A}_i (\bar{n} - 1)h} \end{bmatrix} \mathbf{x}[kT] \quad (29)$$

$=: \mathbf{Y}[kT] \in \mathbf{R}^{r\bar{n}}$ $=: \mathbf{L}_i \in \mathbf{R}^{r\bar{n} \times n_i}$

如果能找到一个增益矩阵 $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^{m \times (r\bar{n})}$ 使得

$$\mathbf{F} \mathbf{L}_i = \frac{\rho}{p - \bar{n}} \mathbf{F}_i, i = 1, \dots, q \quad (30)$$

那么

$$\mathbf{F} \mathbf{Y}[kT] = \begin{cases} \frac{\rho}{p - \bar{n}} \mathbf{F}_1 \mathbf{x}[kT], & \text{如果对象是 } (\mathbf{A}_1, \gamma \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1) \\ \frac{\rho}{p - \bar{n}} \mathbf{F}_2 \mathbf{x}[kT], & \text{如果对象是 } (\mathbf{A}_2, \gamma \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\rho}{p - \bar{n}} \mathbf{F}_q \mathbf{x}[kT], & \text{如果对象是 } (\mathbf{A}_q, \gamma \mathbf{B}_q, \mathbf{C}_q) \end{cases} \quad (31)$$

此时, 对有限对象集内的任一系统 $(\mathbf{A}_i, \gamma \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i)$ 应用如下控制律时, 可得到相应的控制律(16)。

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{0}, & t \in [kT, (k + \frac{\bar{n}}{p})T) \\ \mathbf{F} \mathbf{Y}[kT], & t \in [(k + \frac{\bar{n}}{p})T, (k + 1)T) \end{cases} \quad (32)$$

下面的问题便是如何通过式(30)求出 \mathbf{F} 。

定义 1 $\bar{\mathbf{C}} := [\mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2 \ \dots \ \mathbf{C}_q], \bar{\mathbf{A}} := \text{diag}\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_q\}$ 则由假设 2 和假设 3 可得 $(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{A}})$ 可观测。再根据引理 1 可得: 存在着 $h_0 = \frac{T_0}{p}$ (其中, $T_0 \in (0, T_1)$), 使得对任意 $h \in (0, h_0)$, $(\bar{\mathbf{C}}, e^{\bar{\mathbf{A}}h})$ 可观测, 则可观测矩阵 $\mathbf{L} := [\mathbf{L}_1 \ \mathbf{L}_2 \ \dots \ \mathbf{L}_q] = [\bar{\mathbf{C}}^T \ (\bar{\mathbf{C}} e^{\bar{\mathbf{A}}h})^T \ \dots \ (\bar{\mathbf{C}} e^{\bar{\mathbf{A}}(\bar{n} - 1)h})^T]^T$ 列满秩。式(30)可改写为

$$\mathbf{F} \mathbf{L} = \frac{\rho}{p - \bar{n}} [\mathbf{F}_1 \ \mathbf{F}_2 \ \dots \ \mathbf{F}_q] \quad (33)$$

由于 \mathbf{L} 列满秩, 则 $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$ 可逆, 解式(33)可得:

$$[\mathbf{f}_0 \ \dots \ \mathbf{f}_{\bar{n} - 1}] := \mathbf{F} = \frac{\rho}{p - \bar{n}} [\mathbf{F}_1 \ \mathbf{F}_2 \ \dots \ \mathbf{F}_q] [\mathbf{L}^T \mathbf{L}]^{-1} \mathbf{L}^T \quad (34)$$

选择 $(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{J})(k) \in_s (\mathbf{R}^{m \times m}) \times_s (\mathbf{R}^{m \times r}) \times_s (\mathbf{R}^{m \times m})$ 为

$$(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{J})(k) := \begin{cases} (\mathbf{0}, \mathbf{f}_0, \mathbf{0}), & k = 0 \\ (\mathbf{I}, \mathbf{f}_k, \mathbf{0}), & k = 1, \dots, \bar{n} - 1 \\ (\mathbf{I}, \mathbf{0}, \mathbf{I}), & k = \bar{n}, \dots, p - 1 \end{cases} \quad (35)$$

并且设置

$$(\mathbf{G}(k + p), \mathbf{H}(k + p), \mathbf{J}(k + p)) = (\mathbf{G}(k), \mathbf{H}(k), \mathbf{J}(k)), k \in \mathbf{Z}^+ \quad (36)$$

易验证对每个系统 $(\mathbf{A}_i, \gamma \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i)$, 式(35)和式(36)所设计的控制律 $(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{J}, T, \rho)$ 均等价于控制律(16)。

2.2 稳定性分析

定理 4 设系统 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 满足假设 1~假设 3 的条件,

且 $\bar{\phi} \in [0, \frac{\pi}{2}), \rho \in (0, 1], \bar{\rho} \in [1, \infty)$ 。则存在着一个 $T_0 > 0$ 和 $p_0 > \bar{n} := n_1 + \dots + n_q$ 使得对任意 $T \in (0, T_0)$ 和 $p > p_0$, 可以找到一个线性周期控制器 $(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{J}, T, \rho)$ 稳定如下形式的任何系统:

$$\{(\mathbf{A}_i, \gamma \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i) : \gamma \in \Gamma(\rho, \bar{\rho}, \bar{\phi}); i = 1, \dots, q\}$$

证明 联合定理 1~定理 3 即可得证本定理。

3 数值仿真

设对象 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 位于如下有限集

$$\left\{ \begin{aligned} (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1) &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}, \\ (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2) &:= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{A}_3, \mathbf{B}_3, \mathbf{C}_3) &:= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{A}_3, \mathbf{B}_3, \mathbf{C}_3) &:= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \\ (\mathbf{A}_3, \mathbf{B}_3, \mathbf{C}_3) &:= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

使用本文的方法, 设计一个统一的线性控制器, 同时使系统 $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ 、 $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ 和 $(\mathbf{A}_3, \mathbf{B}_3, \mathbf{C}_3)$ 的所有反馈控制回路在输入通道均具有 $[0.75, 6]$ 的增益调节范围和 $[-70^\circ, 70^\circ]$ 的相角调节范围。即设计一个统一的线性控制器同时稳定如下系统:

$$\{(\mathbf{A}_i, \gamma \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i) : \gamma \in \Gamma(0.75, 6, 70^\circ), i = 1, 2, 3\}$$

由题可得 $\bar{n} = n_1 + n_2 + n_3 = 8, \bar{\phi} = 70^\circ, \rho = 0.75, \bar{\rho} = 6$; 选择 $h = 0.002 \text{ s}, p = 25, T = p \times h = 0.05 \text{ s}, \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_3 = \mathbf{I}_{3 \times 3}, \mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}_{2 \times 2}, R_1 = R_2 = R_3 = 1$ 。

图 2~图 4 展示了当初始值 $\mathbf{x}_1(0) = (1 \ 1 \ 1)^T, \mathbf{x}_2(0) = (1 \ 1)^T, \mathbf{x}_3(0) = (1 \ 1 \ 1)^T, \gamma = 4$ 时, 系统 $(\mathbf{A}_1, \gamma \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$ 、 $(\mathbf{A}_2, \gamma \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$ 和 $(\mathbf{A}_3, \gamma \mathbf{B}_3, \mathbf{C}_3)$ 的输出与控制信号仿真结果图。

其中, $y_{11}, y_{12}, y_{13}; y_{21}, y_{22}, y_{23}; y_{31}, y_{32}, y_{33}$ 分别表示对象 1、对象 2 和对象 3 的三个输出; u_1, u_2, u_3 表示所设计的统一控制器分别应用于对象 1、对象 2 和对象 3 时的控制信号。

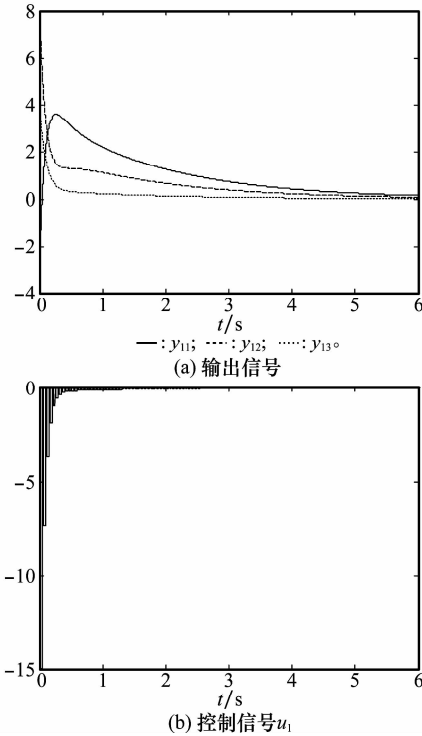


图 2 对象 1 的仿真结果

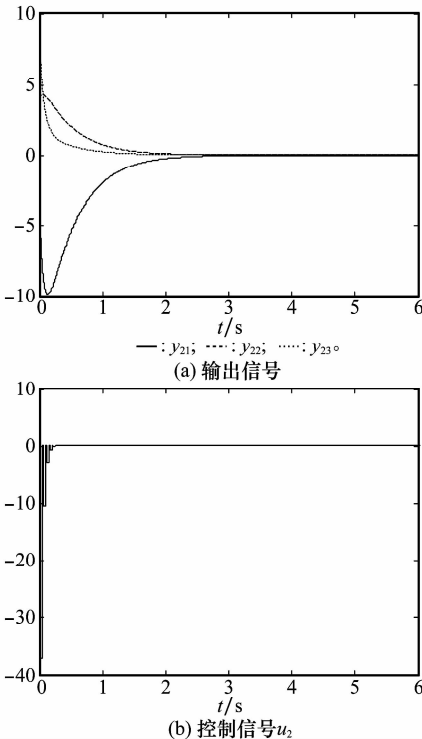


图 3 对象 2 的仿真结果

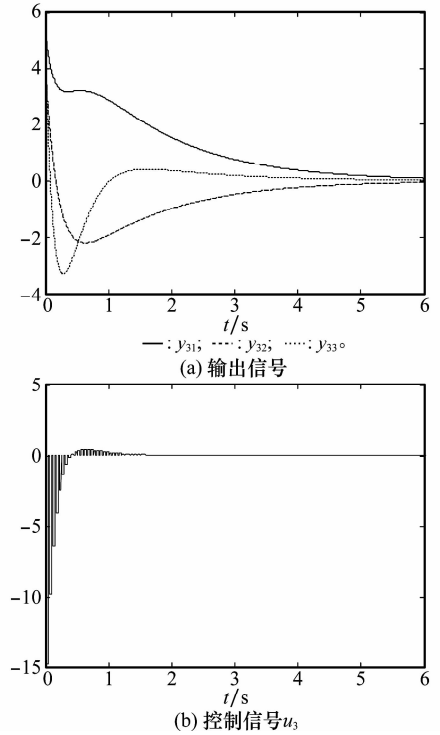


图 4 对象 3 的仿真结果

4 结 论

本文针对有限集 MIMO 线性时不变系统,提出了一种调节输入通道增益/相角裕度的方法。首先针对单个对象,采用连续 LQR 理论设计状态反馈控制器;进而利用周期控制方法设计一个针对有限对象集的线性周期控制器。该控制器可同时使有限集 MIMO 系统的所有反馈控制回路在输入通道获得任意大的增益裕度和直到 90° 的相角裕度。最后,通过仿真实例验证了所设计控制器的有效性。

参考文献:

[1] Wang D J. Synthesis of phase-lead/lag compensators with complete information on gain and phase margins[J]. *Automatica*, 2009,45(4):1026 - 1031.

[2] Wang Q G, Zhen Y, Chang C H. Tuning of phase-lead compensators for exact gain and phase margins[J]. *Automatica*, 2006, 42(2):349 - 352.

[3] Kaya I. Tuning PI controllers for stable processes with specifications on gain and phase margins[J]. *ISA Transactions*, 2004,43 (2):297 - 304.

[4] Crowe J, Johnson M A. Automated PI control tuning to meet classical performance specifications using a phase locked loop identifier[C] // *Proc. of the American Control Conference*, 2001:2186 - 2191.

[5] Wang Q G, Fung H W, Zhang Y. PID tuning with exact gain and phase margins[J]. *ISA Transactions*, 1999,38(4):243 -249.

- [6] Fung H W, Wang Q G, Lee T H. PI tuning in terms of gain and phase margins[J]. *Automatica*, 1998, 34(9): 1145 - 1149.
- [7] Yaniv O, Nagurka M. Design of PID controllers satisfying gain margin and sensitivity constraints on a set of plants[J]. *Automatica*, 2004, 40(1): 111 - 116.
- [8] Haddad W M, Chellaboina V, Gholami B. Controller synthesis with guaranteed closed-loop phase constraints[J]. *Automatica*, 2008, 44(12): 3211 - 3214.
- [9] Safonov M G, Athans M. Gain and phase margin for multiloop LQG regulators[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1977, 22(2): 173 - 179.
- [10] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002. (Zheng D Z. *Linear system theory* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)
- [11] Er M J, Anderson B D O, Yan W Y. Gain margin improvement using generalized sampled-data hold functions based multirate output compensator[J]. *Automatica*, 1994, 30(3): 461 - 470.
- [12] Yang C, Kabamba P T. Multi-channel output gain margin improvement using generalized sampled-data hold functions[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1994, 39(3): 657 - 661.
- [13] Yan W Y, Anderson B D O, Bitmead R R. On the gain margin improvement using dynamic compensation based on generalized sampled-data hold functions[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1994, 39(11): 2347 - 2354.
- [14] Feuer A, Goodwin G C. Generalized sample holdfunctions- frequency domain analysis of robustness, sensitivity, and inter-sample difficulties[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1994, 39(5): 1042 - 1047.
- [15] Roosi M, Miller D E. Gain/phase margin improvement using static generalized sampled-data hold functions[J]. *Systems & Control Letters*, 1999, 37(3): 163 - 172.
- [16] Roosi M, Miller D E. Gain/phase margin improvement using static generalized sampled-data hold functions[C]// *Proc. of the 36th Conference on Decision & Control*, 1997: 2109 - 2114.
- [17] Chang C H, Han K W. Gain margins and phase margins for sampled-data control systems with adjustable parameters[J]. *IEE Proceeding: Control Theory and Applications*, 1991, 138(3): 285 - 291.
- [18] Chang C H, Han K W. Gain margins and phase margins for control systems with adjustable parameters[J]. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1991, 13(3): 404 - 408.
- [19] 胡寿松, 王执铨, 胡维礼. 最优控制理论与系统[M]. 北京: 科学出版社, 2005. (Hu S S, Wang Z Q, Hu W L. *The theory and system of optimal control* [M]. Beijing: Science Publishing House Press, 2005.)
- [20] Francis B A, Georgiou T T. Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1988, 33(9): 820 - 832.

(上接第 2695 页)

- [3] Zhang G Y, Li E Z. Information gene and its information knock-out/knock-in [J]. *An International Journal Advances in Systems Science and Applications*, 2010, 10(2): 308 - 315.
- [4] Zhang L, Cui Y Q. Outer P-sets and data internal-recover [J]. *An International Journal Advances in Systems Science and Applications*, 2010, 10(2): 189 - 199.
- [5] Liu J Q. P-probabilities and its application [J]. *An International Journal Advances in Systems Science and Applications*, 2010, 10(2): 200 - 208.
- [6] Lin H K, Li Y Y. P-sets and its P-separation theorems [J]. *An International Journal Advances in Systems Science and Applications*, 2010, 10(2): 209 - 215.
- [7] Huang S L, Wei W, Geng D Y. P-Sets and its P-separation theorems [J]. *An International Journal Advances in System Science and Application*, 2010, 10(2): 216 - 222.
- [8] 史开泉. P-集合与它的应用特征[J]. 计算机学报, 2010, 37(8): 1 - 8. (Shi K Q. P-sets and its applied characteristics [J]. *Computer Science*, 2010, 37(8): 1 - 8.)
- [9] 史开泉, 张丽. 内 P-集合与数据外-恢复[J]. 山东大学学报: 理学版, 2009, 44(4): 8 - 14. (Shi K Q, Zhang L. Internal P-sets and data outer-recovery [J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2009, 44(4): 8 - 14.)
- [10] Shi K Q, Li X Q. Camouflaged information and its on identification and its applications [J]. *An International Journal Advances in Systems Science and Applications*, 2010, 10(2): 157 - 167.
- [11] 汤积华, 陈保会, 史开泉. P-集合与 (\bar{F}, F) -数据生成-辨识[J]. 山东大学学报: 理学版, 2009, 44(11): 19 - 25. (Tang J H, Chen B H, Shi K Q. P-sets and (\bar{F}, F) -data generation-identification [J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2009, 44(11): 19 - 25.)
- [12] 于秀清. P-集合的识别与筛选[J]. 山东大学学报: 理学版, 2010, 45(1): 94 - 98. (Yu X Q. Recognition and screening of P-sets [J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2010, 45(1): 94 - 98.)
- [13] 张飞, 陈萍, 张丽. P-集合的 P-分离与应用[J]. 山东大学学报: 理学版, 2010, 45(3): 18 - 22. (Zhang F, Chen P, Zhang L. P-separation of P-sets and its applications [J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2010, 45(3): 18 - 22.)
- [14] 周玉华, 张冠宇, 张丽. 内-外数据圆与动态数据-恢复[J]. 山东大学学报: 理学版, 2010, 45(8): 27 - 32. (Zhou Y H, Zhang G Y, Zhang L. Internal-outer data circle and dynamic data-recovery [J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2010, 45(8): 27 - 32.)
- [15] 张丽, 崔玉泉, 史开泉. 外 P-集合与数据内恢复[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(6): 1233 - 1238. (Zhang L, Cui Y Q, Shi K Q. Outer P-set and data internal recovery [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(6): 1233 - 1238.)
- [16] 王亚敏, 代灼华. 遗传学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000: 97 - 112. (Wang Y F, Dai Z H. *Genetics* [M]. Beijing: Advanced Education Press, 2000: 97 - 112.)