

# 考虑温度影响的非饱和土变形特性

蔡国庆, 赵成刚\*, 刘艳, 李舰

北京交通大学土木建筑工程学院岩土工程系, 北京 100044

\* 联系人, E-mail: cgzhao@bjtu.edu.cn

2010-12-20 收稿, 2011-05-25 接受

国家重点基础研究发展计划(2010CB732100)、国家自然科学基金(51078019)、北京市自然科学基金(8112024)和中央高校基本科研业务费专项资金(2011YJS043)资助项目

**摘要** 随着高放核废物地下处置库建设、地热资源开发利用、节能建筑以及二氧化碳地下封存等一批现代岩土工程的发展,使得温度对非饱和土基本力学特性影响的研究成为当前国际上研究的热点问题.利用非饱和土中功的表达式,并考虑温度对非饱和土基本性质的影响,选取平均土骨架应力、修正吸力及温度作为热力学中广义力的状态变量,选取土骨架应变、饱和度及熵作为与广义力变量共轭的广义流状态变量.基于土体非线性多场耦合模型理论框架,利用现有的实验研究成果,提出了一个非等温条件下非饱和土弹塑性本构模型,对温度影响下的非饱和土变形特性进行了分析.应用所建立的模型,在各向同性条件下就吸力和温度对非饱和土变形性质的影响进行了预测和分析,并与已有的实验结果进行了比较.比较结果表明了所提模型的合理性.

## 关键词

非饱和土  
温度影响  
变形特性  
本构模型

受降雨、蒸发等气候因素的影响,地球表面绝大部分土层均处于非饱和状态.非饱和土是由固、液、气三相组成,其基本性质和工程特性都与传统的饱和土性质存在较大差异,由此也造成很多工程灾害.所以20世纪90年代以来,对非饱和土基本力学性质的研究已成为国际岩土工程界研究的热点问题<sup>[1,2]</sup>,而预测非饱和土的变形和强度则是非饱和土力学最为重要的研究课题之一.

现代岩土工程的发展,对传统的土力学理论提出了新的挑战.例如在高放核废物地下处置库建设中,作为缓冲/回填材料的非饱和膨润土是一道重要的人工屏障,它受到来自于核废料放出的热量影响,温度逐渐升高,含水量逐渐减小.最终,随着地下水位的上升,土样产生湿化从而再次达到饱和,这一过程中,在温度变化、毛细效应以及外部荷载共同影响下,非饱和土变形性质将呈现出有别于一般土体的新特征.此外,在地热资源的开发利用、二氧化碳地下封存、高速公路路基稳定性分析、高压电缆埋设以及石油开采等诸多工程建设领域,考虑非等温条件

下非饱和土本构模型的研究,都具有重要的理论意义和应用价值.

非饱和土体总是处于一定的自然环境中,其变形特性自然会受到诸如湿度、温度等环境因素的影响.实际上,非饱和土力学本身就是饱和土力学基础上考虑了湿度变化这一环境因素影响的结果.同样,温度对非饱和土变形和强度性质的影响也极为显著<sup>[3]</sup>.随着温度的变化,非饱和土内部三相之间的相互作用效果也随之变化,从而造成其前期固结压力的差异,并进一步影响到变形过程中屈服面的演化规律,使得非饱和土的变形性质对温度产生一定程度的依赖性.温度对土体力学性质的影响早已引起有关学者的重视<sup>[4]</sup>,但由于受实验条件限制,研究进展缓慢.Hueckel和Borsetto<sup>[5,6]</sup>较早提出了考虑热效应的土体弹塑性本构模型,Laloui等<sup>[7]</sup>、Cui等<sup>[8]</sup>也曾对土体变形的温度效应开展了大量研究工作.但需要指出的是,现有的考虑温度对土体性质影响的研究工作大多集中于饱和土,对更具一般性的非饱和土则涉及甚少.另外,现有的非饱和土本构模型也很

少考虑温度的影响,难以描述温度和吸力共同作用下土体的变形性质.为此,发展考虑温度影响的非饱和土本构模型显得尤为迫切和重要.随着先进实验技术的发展,Tang和Cui<sup>[9]</sup>,François等<sup>[10]</sup>,Uchaipichat等<sup>[11]</sup>对非饱和土基本性质的温度效应开展了大量的实验研究,从而为本构模型的发展奠定了基础.

多相孔隙介质理论能够统一地描述非饱和土中复杂的相互作用以及它在外力和多种环境耦合作用下的响应,可以成为描述非饱和土力学行为统一的理论基础<sup>[12-17]</sup>.笔者曾基于多相孔隙介质理论,在非饱和土广义有效应力原理和本构关系方面进行了研究<sup>[18-20]</sup>,并提出了非饱和土本构建模框架<sup>[21]</sup>;另外还建立了多组分三相非饱和土体非线性多场耦合模型<sup>[22]</sup>.本文将在上述研究基础上,将文献[22]所建立的理论框架应用于具体问题并加以适当简化,建立考虑温度影响的非饱和土本构模型.模型既包括描述土骨架应力应变关系的本构方程,还包括描述液相弹塑性变化的本构方程,本文着重研究了考虑温度影响下的非饱和土变形特性,并应用该模型对其在各向同性条件下的变形进行了预测,通过与已有的实验结果的比较,验证了模型的合理性.

### 1 应力状态变量的选择

热力学和多相孔隙介质理论要求本构模型中的应力变量和应变变量的选择应满足变形功的要求.从这个角度出发,应力和应变变量不能任意选择.赵成刚等<sup>[18]</sup>基于多相孔隙介质理论,推导出了非饱和土中总变形功的表达式:

$$W = \{ \sigma - [S_r p_l + (1 - S_r) p_g] \delta \} : \text{grad} v_s + sn \frac{dS_r}{dt} - \left[ p_g \frac{n(1 - S_r)}{K_g} \frac{dp_g}{dt} \right], \quad (1)$$

式中,  $W$  为变形功,  $\sigma$  为总应力,  $p_l$  和  $p_g$  分别为液相和气相的压力,  $S_r$  为饱和度,  $\delta$  为单位张量,  $n$  为孔隙率,  $s = p_g - p_l$  为基质吸力,  $K_g$  为气相体积压缩模量,  $v_s$  为固相物质的运动速度,  $t$  为时间. 式(1)表明: 等温条件下, 非饱和土中的变形功包含三部分: 第一部分是由土骨架的变形产生的(式(1)中等号右端第一项), 第二部分是由于含水量的改变而产生的(式(1)中等号右端第二项), 第三部分是由气体的压缩引起的(式(1)中等号右端第三项).

非饱和土作为固、液、气三相混合物, 其内部各相之间存在相互影响. 对于液相和气相之间的相互

作用, 是通过描述吸力和饱和度之间关系的土水特征曲线来描述的. 本研究按照非饱和土研究中的惯例, 忽略气相压力变化的影响, 重点引入温度对土骨架变形和液相含量变化的影响. 所以, 考虑温度影响时非饱和土中的广义应力变量和与其对偶的广义应变变量用矩阵分别表示为

$$\bar{\sigma} = (\tilde{\sigma}, \tilde{s}, T)^T, \quad \bar{\varepsilon} = (\varepsilon, S_r, \eta)^T, \quad (2)$$

其中,  $\tilde{\sigma}$  为非饱和土有效应力, 可以表示为  $\tilde{\sigma} = (\sigma - p_g) + S_r(p_g - p_l)$ ,  $\varepsilon$  为相应的土骨架应变;  $\tilde{s}$  为修正吸力, 可以表示为  $\tilde{s} = ns$ ,  $n$  为孔隙率;  $T$  为温度,  $\eta$  为相应的土体中的熵.

而在三轴应力条件下, 则一般采用以下应力变量和应变变量来描述土体的变化: 平均有效应力  $\tilde{p} = (\tilde{\sigma}_a + 2\tilde{\sigma}_r)/3$ , 剪应力  $q = \tilde{\sigma}_a - \tilde{\sigma}_r$ , 体应变  $\varepsilon_v = \varepsilon_a + 2\varepsilon_r$ , 剪应变  $\varepsilon_s = 2(\varepsilon_a - \varepsilon_r)/3$ ; 其中,  $\tilde{\sigma}_a$  为轴向有效应力,  $\tilde{\sigma}_a = \sigma_a - p_g$ ,  $\sigma_a$  和  $p_g$  分别为轴向应力和气压力;  $\tilde{\sigma}_r$  为径向有效应力,  $\tilde{\sigma}_r = \sigma_r - p_g$ ,  $\sigma_r$  为径向应力;  $\varepsilon_a$  和  $\varepsilon_r$  分别为轴向应变和径向应变.

### 2 弹性增量关系

不考虑弹塑性耦合, 即认为弹性模量不受塑性应变的影响, 同时, 假定温度对弹性模量和弹性偏应变没有影响, 因此, 固相弹性关系可以表示为

$$d\varepsilon_v^e = \frac{\kappa}{v\tilde{p}} d\tilde{p} + \beta'_s dT = \frac{1}{K_s^e} d\tilde{p} + \beta'_s dT, \quad (3)$$

$$d\varepsilon_s^e = \frac{2\kappa(1+u)}{9v\tilde{p}(1-2u)} dq = \frac{1}{3G_s^e} dq,$$

其中,  $K_s^e$  和  $G_s^e$  分别为固相的弹性体积模量和弹性剪切模量,  $v$  为比体积,  $\kappa$  为弹性常数,  $u$  为泊松比,  $\beta'_s$  为土骨架的热膨胀系数.

类似地, 对于液相的弹性关系可以表示为

$$dS_r^e = -\frac{1}{K_w^e} d\tilde{s} = -\frac{\kappa_w}{\tilde{s}} d\tilde{s}, \quad (4)$$

其中,  $K_w^e$  为液相的弹性模量, 它的形式与所选择的土水特征曲线模型有关, 此处暂不考虑温度对液相弹性变形的影响.

### 3 塑性增量关系

在文献[22]中, 我们给出了土体非线性多场耦合模型的一般表达式, 在此基础上, 本文重点考察在考虑温度影响下非饱和土固体骨架的变形  $d\varepsilon^p$  和液相

含量的变化  $dS_r^p$ , 而忽略其他因素的影响. 同时, 假定温度的变化在空间上是均匀的, 即不考虑热传导效应. 此时, 文献[22]中的耗散不等式中的耗散项简化为两部分: 土骨架塑性变形引起的耗散和液相不可恢复变化引起的耗散. 所以, 文献[22]中土体非线性多场耦合模型的一般表达式简化为

$$\tilde{X}(Y) = \tilde{X}(\varepsilon^p, S_r^p), \quad (5)$$

其中,  $\tilde{X}$  为有效广义热力学力,  $Y$  为与  $\tilde{X}$  对偶的广义变形.

但是在描述应力-应变本构关系时, 一般是将应力作为控制变量, 因此选用广义力作为独立变量更为方便, 而将广义热力学流作为广义力的函数. 这时广义热力学流可以通过以广义力作为独立变量的耗散势函数求得, 即  $Y = \partial D^*(\tilde{X}) / \partial \tilde{X}$ , 其中,  $D^*(\tilde{X})$  是耗散势函数  $D(Y)$  的 Legendre 变换式. 其具体的表达式和推导过程与文献[22]给出的过程类似, 只是需要把广义热力学流和广义热力学力互换; 最后会得到用广义热力学力作为自变量表示的广义热力学流的函数关系, 本文即采用了这一关系, 见下面式(6)和式(7). 在建立土体具体的本构模型时, 通常分别针对固相和液相建立相应的方程.

对于固相, 需要考虑广义热力学流是土骨架的塑性变形  $d\varepsilon^p$  (三轴应力条件下, 可用塑性体应变  $d\varepsilon_s^p$  和塑性剪应变  $d\varepsilon_s^p$  之和表示), 广义热力学力  $\tilde{X}$  则包括: 有效应力  $d\tilde{\sigma}$ 、修正吸力  $d\tilde{s}$  及温度变化  $dT$ . 所以, 对于固相需建立下述形式的耦合本构关系:

$$d\varepsilon^p = Ad\tilde{\sigma} + Bd\tilde{s} + CdT, \quad (6)$$

其中,  $A, B, C$  为耦合系数.

对于液相, 需要考虑的广义热力学流是液相的塑性变形, 用塑性饱和度变化  $dS_r^p$  表示. 在微观变形机制上, 液相的弹塑性变形主要表现为土体孔隙中水体积的改变, 就某一孔隙通道而言, 当孔隙水体积变化时, 首先是水气交界面曲率发生改变, 由此引起的饱和度变化是可恢复的, 用  $dS_r^e$  表示, 而当孔隙水体积继续变化到某一临界值时, 水膜将被冲破(干燥时, 气相冲破水膜进入孔隙; 浸润时, 液相冲破水膜进入孔隙), 水气交界面无法再恢复到原先的位置, 导致孔隙内饱和度不可恢复的变化, 用  $dS_r^p$  表示. Wheeler 等人<sup>[2]</sup>, Sheng 等人<sup>[23]</sup>, Wei 等人<sup>[24]</sup>, Sun 等人<sup>[25]</sup>在考虑上述液相弹塑性变形机制基础上, 建立了相应的非饱和土弹塑性本构方程. 本文中, 引起广

义热力学流  $dS_r^p$  变化的广义热力学力包括: 修正吸力  $d\tilde{s}$ 、有效应力  $d\tilde{\sigma}$  及温度变化  $dT$ . 所以, 对于液相需建立下述形式的耦合本构关系:

$$dS_r^p = A'd\tilde{s} + B'd\tilde{\sigma} + C'dT, \quad (7)$$

其中,  $A', B', C'$  为耦合系数.

为了考虑温度对非饱和土的塑性性质的影响以及固、液两相之间的相互作用, 可采用下面的方法: 对于固相而言, 液相和温度对其塑性变形的影响是通过固相屈服应力  $\tilde{p}_c$  随饱和度  $S_r^p$  和温度  $T$  的变化关系而给出; 对于液相而言, 固相和温度对塑性饱和度变化的影响是通过液相屈服应力  $\tilde{s}_y$  随塑性体应变  $\varepsilon_s^p$  和温度  $T$  的变化关系而给出. 下面, 将从屈服条件、硬化规律、流动法则和一致性条件推导给出考虑温度影响的非饱和土毛细效应和弹塑性变形耦合的增量本构方程.

### 3.1 屈服条件

(1)  $\tilde{p}-q$  平面内的屈服.  $\tilde{p}-q$  平面内的屈服面反映了非饱和土中固相的屈服情况. 采用热力学方法建立土中固相的本构关系, 能克服传统方法在理论上的不严谨, 可有效避免违反热力学基本定律的情况, 这一方法已逐渐被研究者接受和采纳<sup>[16,17,21,26]</sup>.

赵成刚等<sup>[21]</sup>推导了非饱和土固相的 Helmholtz 自由能增量方程, 采用 Collins<sup>[26]</sup>给出的耗散增量方程和蓄藏能的表达式, 得到耗散应力空间的屈服面方程:

$$g_s(\tilde{\pi}, \tau) = \frac{B^2}{A^2} \tilde{\pi}^2 + \tau^2 - B^2 = 0, \quad (8)$$

其中,  $A = (1-\gamma)\tilde{p} + 1/2\gamma\tilde{p}_c$ ,  $B = M[(1-\alpha)\tilde{p} + 1/2\alpha\gamma\tilde{p}_c]$ ,  $\tilde{p}_c$  为预固结压力,  $M$  为临界状态线斜率,  $\alpha$  是 0~1 之间的参数;  $\gamma$  是与应力比有关的量, 反映了蓄藏能在总塑性功中所占的比重, 其取值范围在 0~1 之间, 对于黏土可以假定为  $\gamma=1$ ;  $\tilde{\pi}$  和  $\tau$  分别为耗散应力空间中的平均有效应力和偏应力.

然后利用转换应力就可以把耗散空间中的屈服条件转换到真实应力空间中, 得到真实应力空间的屈服面方程如下:

$$f_s(\tilde{p}, q, \tilde{p}_c) = M^2 R^2 (\tilde{p} - \tilde{p}_c/2)^2 + q^2 - M^2 R^2 (\tilde{p}_c/2)^2 = 0, \quad (9)$$

其中,  $R = 2(1-\alpha)\tilde{p} / \tilde{p}_c + \alpha$ .

(2)  $\tilde{p}-\tilde{s}$  平面内的屈服 I ——LC 屈服. 非饱和

土中颗粒之间滑移以及由颗粒组成的团聚体之间的受力滑移过程, 都可以通过  $\bar{p}-q-\bar{s}$  空间内的 LC (loading collapse) 屈服面来描述, 在等向压缩条件下, 则可以简化为  $\bar{p}-\bar{s}$  平面内的 LC 屈服曲线. 它不仅可以在外力较高的条件下湿化时出现的塑性收缩现象, 同时还可以描述先期固结压力随着吸力的增大而增大的特性. 由于先期固结压力代表了弹性区的极限, 所以 LC 曲线在某种程度上也反映了吸力对材料的强化作用. 根据 Loret 和 Khalili<sup>[27]</sup> 的相关研究成果, 本文的 LC 屈服面采用下列形式:

$$\bar{p}_c(s) = \begin{cases} \bar{p}_{c0} & \bar{s} < s_e, \\ \bar{p}_{c0} \left\{ 1 + k_m \left[ \left( \frac{\bar{s}}{s_e} \right)^\gamma - 1 \right] \right\} & \bar{s} > s_e, \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $\bar{p}_{c0}$  为饱和土的先期固结压力,  $k_m$  和  $\gamma$  为材料参数,  $s_e$  为进气值.

(3)  $\bar{p}-\bar{s}$  平面内的屈服面 II —— SI/SD 屈服. 液相的屈服方程可以用土水特征曲线来描述, 本文采用 Wheeler 等<sup>[2]</sup> 的线性模型, 其中, 主干燥线和主浸润线的斜率为  $\lambda_w$ , 扫描线的斜率为  $\kappa_w$ . 在扫描线上, 只有弹性饱和度的变化, 在主干燥线和主浸润线上, 才会产生塑性饱和度的变化. 模型中不考虑  $\bar{p}$  增长所引起的弹性变形对修正吸力  $\bar{s}$  的影响, 所以  $\bar{p}-\bar{s}$  平面内的 SI (suction increase) 和 SD (suction decrease) 屈服曲线都是水平直线, 液相屈服方程可以表示为

$$f_w = \bar{s} - \bar{s}_y, \quad (y = I, D), \quad (11)$$

其中,  $\bar{s}_y$  为液相屈服应力, 当  $y=I$  时表示吸力增加产生的屈服; 当  $y=D$  时表示吸力降低产生的屈服. 吸力变化引起的饱和度塑性变化可以表示为

$$dS_r^p = -\frac{1}{K_w^p} \frac{d\bar{s}_y}{\bar{s}_y}, \quad (12)$$

其中,  $K_w^p = 1/(\lambda_w - \kappa_w)$  为液相的塑性模量.

(4)  $T-p$  平面内的屈服面 I —— LY 屈服. 为了在原先的土体弹塑性理论框架中引入温度的影响, 必须定义一个新的热-力弹性区, 在该区域内任何温度的改变、有效应力的改变或者温度和有效应力的同时改变, 都仅引起可恢复的弹性变形. 通过恒定塑性变形条件下的预固结压力随温度的变化, 即可给出上述热-力弹性区. 基于现有试验结果<sup>[6]</sup>, 在  $T-p$  坐标内绘出各点并连接成线, 从而得到 LY (loading yield) 屈服曲线方程为

$$\bar{p}_c(T) = \bar{p}_{c0} \exp p[-\alpha_{tp}(T-T_0)], \quad (13)$$

其中,  $\bar{p}_c(T)$  和  $\bar{p}_{c0}$  分别为温度  $T$  和参考温度  $T_0$  下的预固结压力值,  $\alpha_{tp}$  为表征温度对屈服应力影响的参数.

(5)  $T-p$  平面内的屈服面 II —— TY 屈服. 通过上述 LY 屈服面来考虑温度对土体变形的影响, 在后续的实验中也遇到了新的问题. 实验表明: 温度变化引起的土体变形还依赖于土体的应力历史 (用超固结比 OCR 表示), 当土体由正常固结状态向超固结状态演化时 (即超固结比 OCR 不断增大), 温度升高引起的体积收缩不断减小, 当 OCR 超过某一临界值时, 温度升高引起土体体积膨胀并不断增大<sup>[8,28]</sup>. 因此, 对于超固结土而言, 在上述弹性区内部还存在另一种形式的因温度导致的屈服机制, 使得土体的温度变化路径在尚未到达热-力屈服面 LY 时, 已经发生了屈服, 并产生了相应的塑性变形, 这一屈服被定义为 TY (temperature yield) 屈服. 对于饱和土而言, Cui 等<sup>[8]</sup> 给出了 TY 屈服曲线表达式:

$$T_{CT} = (T_c - T_0) \exp(-\beta_T \cdot p/p_0) + T_0, \quad (14)$$

其中,  $T_{CT}$  为屈服温度,  $T_0$  和  $T_c$  分别是初始和参考温度值,  $\beta_T$  是表征应力状态  $p/p_0$  (当前净平均应力与初始条件下的净平均应力的比值) 对屈服温度影响的参数.

基于 Tang 等<sup>[9]</sup> 的研究, 对于非饱和土而言, 考虑吸力作用的 TY 屈服曲线可采用下面的表达式:

$$T_{CT} = [(T_c - T_0) \exp(-\beta_T \cdot p/p_0) + T_0] \exp[\alpha_{Ts}(s - s_0)], \quad (15)$$

其中,  $s_0$  和  $s$  分别是初始和当前的吸力值,  $\alpha_{Ts}$  是表征吸力对屈服温度影响的参数.

### 3.2 硬化规律

硬化规律主要反映屈服面的演化规律.

(1) 固相的硬化. 由于在本模型中非饱和土处于非等温条件下, 即需要考虑不同饱和度及温度条件下土体的屈服, 所以固相屈服应力  $\bar{p}_c$  不仅与其塑性体变有关系, 而且还与液相饱和度和温度的变化有关. 所以固相硬化规律中必须包含固相体应变硬化项  $d\bar{p}_{cs}$ 、液相硬化项  $d\bar{p}_{cw}$  和温度变化引起的硬化项  $d\bar{p}_{cT}$ . 假定硬化规律为这 3 项硬化的线性叠加, 即

$$d\bar{p}_c = d\bar{p}_{cs} + d\bar{p}_{cw} + d\bar{p}_{cT}. \quad (16)$$

对于固相土骨架体应变硬化项, 采用剑桥模型中的塑性体应变硬化; 对于液相硬化项, 很多模型都采用吸力作为硬化参数, 但这样就不能考虑干湿循环出现的滞回效应, 相比之下, 塑性饱和度可以直接

反映孔隙中流体的变化情况，它对弯液面的影响比吸力更加重要，故选择塑性饱和度作为硬化参数考虑液相变形对固相屈服应力的影响；对于温度变化引起的硬化项，采用式(13)表示的实验结果。

由此，可得到固相总的硬化方程为

$$\tilde{p}_{cs} = \tilde{p}_c(\varepsilon_v^p, S_r^p, T) = \tilde{p}_{c0} \exp\left(\frac{\nu}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p\right) \times \exp\left[\frac{k_{sw}}{\lambda_w - \kappa_w}(1 - S_r^p)\right] \exp[-\alpha_{Tp}(T - T_0)], \quad (17)$$

其中， $\varepsilon_v^p$  和  $S_r^p$  分别为塑性体应变和塑性饱和度变化， $\nu$  为比体积， $\lambda$  和  $\kappa$  为土性常数， $k_{sw}$  和  $\alpha_{Tp}$  分别为反映液相和温度对固相影响的耦合系数。

(2) 液相的硬化。对于考虑非等温条件下非饱和和土中液相的硬化规律，必须考虑固体变形和温度对土水特征曲线的影响，液相硬化方程采用下面的表达式：

$$\tilde{p}_{cw} = \tilde{s}_y(S_r^p, \varepsilon_v^p, T) = \tilde{s}_{y0} \exp\left[\frac{1}{\lambda_w - \kappa_w}(1 - S_r^p)\right] \times \exp\left(\frac{k_{ws}\nu}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p\right) \exp[-\alpha_{Ts}(T - T_0)], \quad (18)$$

其中， $\tilde{s}_{y0}$  为初始屈服应力， $k_{ws}$  和  $\alpha_{Ts}$  分别为反映固相和温度对液相影响的耦合系数。Wheeler<sup>[2]</sup>给出了一个与(18)式类似的表达式，但却不能反映温度的影响。

(3) 温度屈服面对应的硬化。当应力路径激活 TY 屈服面时，TY 屈服面将随之移动，假定该硬化由参数  $\beta_r$  控制。Cui 等<sup>[8]</sup>基于实验结果给出了塑性体变随温度变化的表达式：

$$d\varepsilon_{vT}^p = \frac{-\beta'_s}{1-a} \left\{ \exp\left[\frac{-\beta'_s}{1-a}(T - T_{CT}^0)\right] - a \right\} dT, \quad (19)$$

其中， $a$  为材料参数， $T_{CT}^0$  为初始屈服温度。

本文基于 Cui 等<sup>[8,9]</sup>的研究，并忽略净应力增加引起的 TY 屈服面的移动以及吸力的影响，采用下列形式的硬化规律：

$$d\tilde{p}_{CT} = d\beta_r = \frac{-\exp(\beta_r p)}{p(T_c - T_0)\alpha_p[\exp(\alpha_p \Delta T) - a]} d\varepsilon_{vT}^p, \quad (20)$$

其中，参数  $\alpha_p = \frac{-\beta'_s}{1-a}$ 。

### 3.3 流动法则和一致性条件

用流动法则可以确定塑性应变增量的大小。当考虑非等温条件下非饱和和土基本特性时，固相与液

相之间存在相互影响，同时温度的变化对固液两相也有影响。对于固相而言，其自身的塑性变形除了来自于固相本身的屈服(LC 和 LY 屈服)，还来自于液相的屈服(SI/SD 屈服)和温度的变化(TY 屈服)；同样，对于液相而言，饱和度的塑性变化除了来自于液相的屈服(SI/SD 屈服)，还来自于固相的屈服(LC 和 LY 屈服)和温度的变化(TY 屈服)。因此塑性应变增量可以表示为

$$\begin{aligned} d\varepsilon_v^p &= d\varepsilon_{v(LC/LY)}^p + d\varepsilon_{v(SI/SD)}^p + d\varepsilon_{v(TY)}^p, \\ d\varepsilon_s^p &= d\varepsilon_{s(LC/LY)}^p + d\varepsilon_{s(SI/SD)}^p + d\varepsilon_{s(TY)}^p, \\ -dS_r^p &= -dS_{r(LC/LY)}^p - dS_{r(SI/SD)}^p - dS_{r(TY)}^p, \end{aligned} \quad (21)$$

其中， $d\varepsilon_{v(LC/LY)}^p$ ， $d\varepsilon_{v(SI/SD)}^p$ ， $d\varepsilon_{v(TY)}^p$  分别为 LC 和 LY 屈服引起的固相塑性体应变、液相的 SI/SD 屈服引起的固相塑性体应变、以及温度的 TY 屈服引起的固相塑性体应变； $d\varepsilon_{s(LC/LY)}^p$ ， $d\varepsilon_{s(SI/SD)}^p$ ， $d\varepsilon_{s(TY)}^p$  分别为 LC 和 LY 屈服引起的固相塑性剪应变、液相的 SI/SD 屈服引起的固相塑性剪应变、以及温度的 TY 屈服引起的固相塑性剪应变； $dS_{r(LC/LY)}^p$ ， $dS_{r(SI/SD)}^p$ ， $dS_{r(TY)}^p$  分别为 LC 和 LY 屈服引起的液相塑性饱和度变化、液相的 SI/SD 屈服引起的液相塑性饱和度变化、以及温度的 TY 屈服引起的液相塑性饱和度变化。根据 Wheeler 等人<sup>[2]</sup>的思想，上述温度-固相-液相之间的相互影响可以通过屈服面之间的耦合来描述，即温度的变化或某一相的屈服，将引起另外一相的屈服面发生移动，从而影响其塑性变形，3.2 节给出的硬化方程可以反映这一点。

对于本文所研究的非膨胀性黏土而言，SI/SD 屈服线的移动本身并不引起变形，而是通过其引起的 LC 屈服曲线的移动实现对变形的影响，即  $d\varepsilon_{v(SI/SD)}^p = 0$ ， $d\varepsilon_{s(SI/SD)}^p = 0$ 。同样，LC 屈服本身并不引起饱和度的塑性变化，而是通过引起 SI/SD 屈服线的移动来实现其对饱和度变化的影响，即  $dS_{r(LC/LY)}^p = 0$ 。暂不考虑温度屈服引起的液相塑性饱和度变化，即  $dS_{r(TY)}^p = 0$ ，同时忽略温度对剪切性能的影响，即  $d\varepsilon_{s(TY)}^p = 0$ 。

根据上述分析，式(21)简化为

$$\begin{aligned} d\varepsilon_v^p &= A_s \frac{\partial g_s}{\partial p_D} + d\varepsilon_{vT}^p, & d\varepsilon_s^p &= A_s \frac{\partial g_s}{\partial q}, \\ -dS_r^p &= A_w \frac{\partial g_w}{\partial s}, \end{aligned} \quad (22)$$

其中,  $g_s$  和  $g_w$  分别为固、液两相的塑性势,  $A_s$  和  $A_w$  为对应的塑性因子,  $d\varepsilon_{vT}^p$  为温度变化引起的土体塑性变形, 采用式(19).

对于固相, 采用非相关联流动法则, 塑性势函数  $g_s$  由式(8)给出, 而对于液相以及温度屈服, 采用相关联流动法则, 即

$$g_w = f_w, \quad g_T = f_T. \quad (23)$$

根据固相、液相的屈服面方程(9)和(11)式, 一致性条件由下式给出:

$$\begin{cases} df_s = \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}} d\bar{p} + \frac{\partial f_s}{\partial q} dq + \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} d\bar{p}_c = 0, \\ df_w = \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}} d\bar{s} + \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}_y} d\bar{s}_y = 0. \end{cases} \quad (24)$$

将硬化方程(17), (18)式以及(22)式分别代入(24)式中, 有

$$\begin{cases} df_s = \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}} d\bar{p} + \frac{\partial f_s}{\partial q} dq + \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \left( A_s \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial \varepsilon_{v(L)}^p} \frac{\partial g_s}{\partial p_D} - A_w \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial S_r^p} \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial T} dT \right) = 0, \\ df_w = \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}} d\bar{s} + \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}_y} \left( A_s \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial \varepsilon_{v(L)}^p} \frac{\partial g_s}{\partial p_D} - A_w \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial S_r^p} \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial T} dT \right) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

解上述方程组, 有

$$\begin{cases} A_s = - \frac{\left( \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}} d\bar{p} + \frac{\partial f_s}{\partial q} dq + \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial T} dT \right) \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}_y} \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial S_r^p} \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}} - \left( \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}} d\bar{s} + \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}_y} \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial T} dT \right) \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial S_r^p} \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}}}{-\left( \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial \varepsilon_{v(L)}^p} \frac{\partial g_s}{\partial p_D} \right) \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}_y} \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial S_r^p} \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}} + \left( \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial S_r^p} \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}} \right) \left( \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}_y} \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial \varepsilon_{v(L)}^p} \frac{\partial g_s}{\partial p_D} \right)}, \\ A_w = \frac{-\left( \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}} d\bar{p} + \frac{\partial f_s}{\partial q} dq + \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial T} dT \right) \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}_y} \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial \varepsilon_{v(L)}^p} \frac{\partial g_s}{\partial p_D} + \left( \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}} d\bar{s} + \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}_y} \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial T} dT \right) \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial \varepsilon_{v(L)}^p} \frac{\partial g_s}{\partial p_D}}{-\left( \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial S_r^p} \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}} \right) \left( \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}_y} \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial \varepsilon_{v(L)}^p} \frac{\partial g_s}{\partial p_D} \right) + \left( \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial \varepsilon_{v(L)}^p} \frac{\partial g_s}{\partial p_D} \right) \left( \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}_y} \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial S_r^p} \frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}} \right)}. \end{cases} \quad (26)$$

据液相屈服方程(11)式, 有  $\frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}_y} = -1$ ,  $\frac{\partial f_w}{\partial \bar{s}} = 1$ , 代入(26)式, 同时令  $\Pi = -\frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \frac{\partial g_s}{\partial p_D} \bar{p}_c (1 - k_{sw} k_{ws})$ , 式(26)化简为

$$\begin{cases} A_s = \frac{1}{\Pi K_s^p} \left( \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}} d\bar{p} + \frac{\partial f_s}{\partial q} dq + \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial S_r^p} \frac{\partial S_r^p}{\partial \bar{s}_y} d\bar{s} + \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial T} dT - \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial S_r^p} \frac{\partial S_r^p}{\partial \bar{s}_y} \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial T} dT \right), \\ A_w = -\frac{k_{ws}}{\Pi K_w^p} \frac{\partial g_s}{\partial p_D} \left( \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}} d\bar{p} + \frac{\partial f_s}{\partial q} dq + \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial \varepsilon_{v(L)}^p} \frac{\partial \varepsilon_{v(L)}^p}{\partial \bar{s}_y} d\bar{s} + \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial T} dT - \frac{\partial f_s}{\partial \bar{p}_c} \frac{\partial \bar{p}_c}{\partial \varepsilon_{v(L)}^p} \frac{\partial \varepsilon_{v(L)}^p}{\partial \bar{s}_y} \frac{\partial \bar{s}_y}{\partial T} dT \right). \end{cases} \quad (27)$$

### 4 增量本构方程

非饱和土中固、液两相应变增量分别为

$$\begin{aligned} d\varepsilon_v &= d\varepsilon_v^e + d\varepsilon_v^p, \\ d\varepsilon_s &= d\varepsilon_s^e + d\varepsilon_s^p, \end{aligned}$$

$$dS_r = dS_r^e + dS_r^p. \quad (28)$$

将弹性关系式(3), (4), 以及塑性增量式(22)代入上式, 即可求出固、液两相各自总的应变增量, 得到所需的本构方程. 将所得到的本构关系汇总如下:



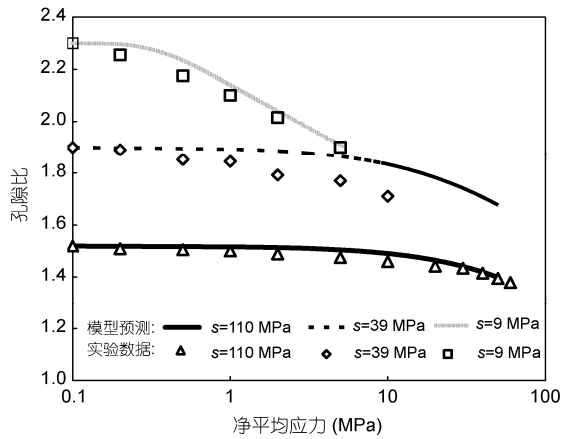


图1  $T=25^{\circ}\text{C}$ 时不同吸力条件下等向加载预测结果与实验结果对比

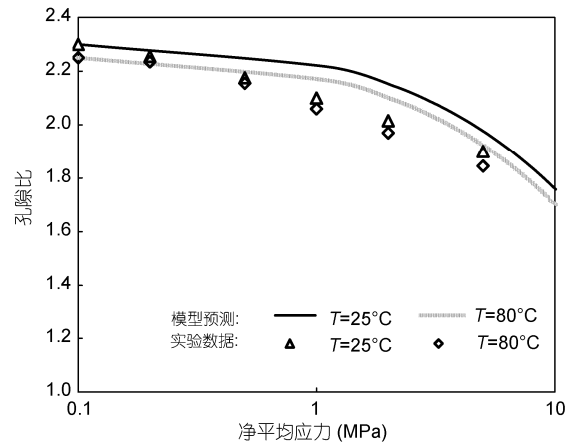


图3  $s=9\text{ MPa}$ 时不同温度条件下等向加载预测结果与实验结果对比

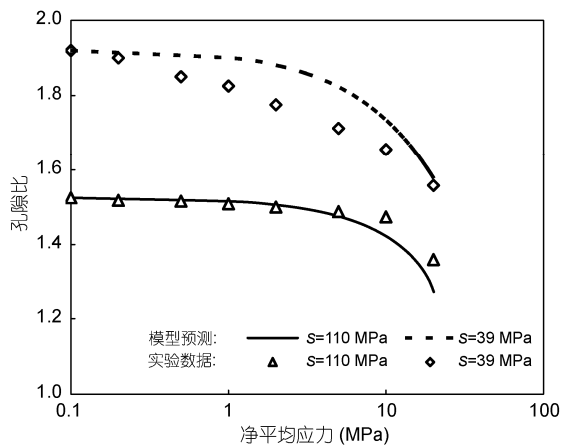


图2  $T=60^{\circ}\text{C}$ 时不同吸力条件下等向加载预测结果与实验结果对比

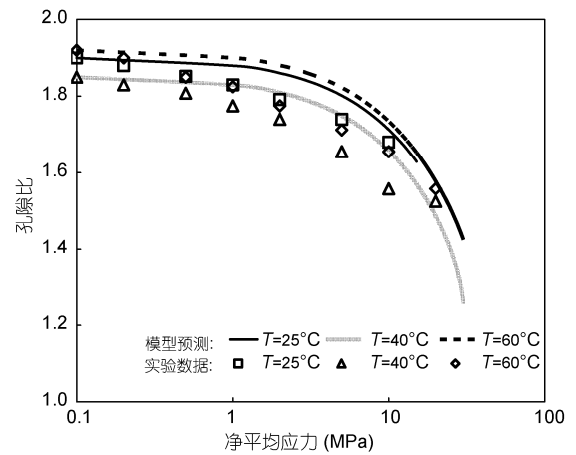


图4  $s=39\text{ MPa}$ 时不同温度条件下等向加载预测结果与实验结果对比

图3~5分别给出了吸力为9, 39, 110 MPa时, 不同温度条件下等向加载预测结果与实验结果对比, 模型预测结果与实验数据基本吻合. 由图可见,  $s=9\text{ MPa}$  情况下, 温度分别为  $25^{\circ}\text{C}$ ,  $80^{\circ}\text{C}$ 时, 对应的屈服应力分别为 1.3, 1.1 MPa;  $s=39\text{ MPa}$  情况下, 温度分别为  $25^{\circ}\text{C}$ ,  $40^{\circ}\text{C}$ ,  $60^{\circ}\text{C}$ 时, 对应的屈服应力分别为 7.2, 5.6, 3.8 MPa;  $s=110\text{ MPa}$  情况下, 温度分别为  $25^{\circ}\text{C}$ ,  $60^{\circ}\text{C}$ 时, 对应的屈服应力分别为 18, 11 MPa, 即在某一固定吸力条件下, 随着温度的增加, 土体的屈服应力随之减小, 表明温度减小了土体的屈服强度, 使土体变得更容易屈服, 同时当吸力增加时, 温度对土体的弱化作用也依然存在. 由图还不难发现, 温度对压缩曲线的斜率基本没有影响.

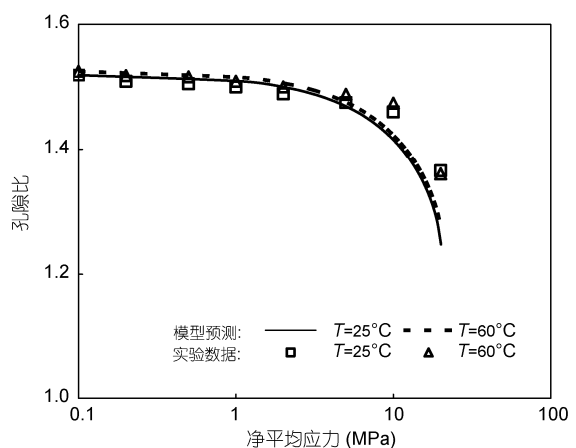


图5  $s=110\text{ MPa}$ 时不同温度条件下等向加载预测结果与实验结果对比



## 6 结论

本文利用现有的实验研究成果,研究了考虑温度影响的非饱和土体变形特性,并据此建立了一个非等温条件下非饱和土毛细效应和弹塑性变形耦合的本构模型,然后用已有实验结果确定模型参数,并通过将模型预测结果与实验数据的对比,验证了模型的适应性.主要成果和结论如下:

(1) 非饱和土本构模型建立过程中,应力状态变量的选择必须满足土中功率变化的要求.基于非饱和土中功的表达式,对考虑受温度影响的非饱和土本构建模过程,选取平均土骨架应力、修正吸力及温度作为应力状态变量,选取土骨架应变、饱和度及熵作为与应力变量共轭的应变增量.

(2) 在非等温条件下,非饱和土在  $\bar{p}-q-s-T$  应力空间中由于应力路径的不同存在 5 种不同的屈服机制.  $\bar{p}-q$  平面内的屈服反映了非饱和土中固相的屈服情况,基于热力学原理给出的屈服方程为式(8), (9);  $\bar{p}-\bar{s}$  平面内的 LC 屈服反映出吸力对屈服的强化作用,相应的屈服方程为式(10);  $\bar{p}-\bar{s}$  平面内的

SI/SD 屈服反映了液相的屈服情况,可以通过土水特征曲线对其进行描述,相应的屈服方程为式(11);  $T-p$  平面内的 LY 屈服反映了温度对屈服的弱化作用,相应的屈服方程为式(13);  $T-p$  平面内的 TY 屈服反映了不同于 LY 屈服的温度屈服机制,考虑当前应力水平和吸力作用的 TY 屈服方程为式(15).

(3) 模型中,固相和液相的硬化,都考虑了温度和除气体外另一相的影响,相应的硬化规律为式(17), (18).

(4) 考虑到摩擦性材料的耗散增量函数依赖于真实应力,所以固相在真实应力空间的流动法则非相关联的,而对于液相以及温度变化引起的屈服对应的则是相关联流动.

(5) 最终建立的非等温条件下非饱和土毛细-弹塑性变形耦合本构模型如(29)式所示,模型包含的 17 个参数均可通过非饱和土相关实验结果拟合得到,通过模型验证表明:本文提出的模型能对等向加载条件下,不同吸力和温度时非饱和土的变形特性进行很好地模拟.

## 参考文献

- Alonso E E, Gens A, Josa A. A constitutive model for partially saturated soils. *Géotechnique*, 1990, 40: 405-430
- Wheeler S J, Sharma R S, Buisson M S. Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behaviour in unsaturated soils. *Géotechnique*, 2003, 53: 41-54
- 蔡国庆, 赵成刚. 非饱和土渗流和变形强度特性的温度效应. *力学进展*, 2010, 40: 147-156
- Campanella R G, Mitchell J K. Influence of temperature variations on soil behavior. *J Soil Mech Found Div, ASCE*, 1968, 94: 709-734
- Hueckel T, Borsetto M. Thermoplasticity of saturated soils and shales: Constitutive equations. *J Geotech Engrg*, 1990, 116: 1765-1777
- Hueckel T, Baldi G. Thermoplasticity of saturated clays: Experimental constitutive study. *J Geotech Engrg*, 1990, 116: 1778-1796
- Laloui L, Cekerevac C. Thermo-plasticity of clays: An isotropic yield mechanism. *Comput Geotech*, 2003, 30: 649-660
- Cui Y J, Sultan N, Delage P. A thermomechanical model for saturated clays. *Can Geotech J*, 2000, 37: 607-620
- Tang A M, Cui Y J. Modelling the thermomechanical volume change behaviour of compacted expansive clays. *Géotechnique*, 2009, 59: 185-195
- François B, Laloui L. ACMEG-TS: A constitutive model for unsaturated soils under non-isothermal conditions. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 2008, 32: 1955-1988
- Uchaipichat A, Khalili N. Experimental investigation of thermo-hydro-mechanical behaviour of an unsaturated silt. *Géotechnique*, 2009, 59: 339-353
- Hutter K, Laloui L, Vulliet L. Thermodynamically based mixture models of saturated and unsaturated soils. *Mech Cohes Frict Mater*, 1999, 4: 295-338
- Bowen R M. Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. *Int J Eng Sci*, 1980, 18: 1129-1148
- Bowen R M. Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. *Int J Eng Sci*, 1982, 20: 697-735
- de Boer R. Highlights in the historical development of the porous media: Toward a consistent macroscopic theory. *Appl Mech Rev*, 1996, 49: 201-262
- Li X S. Thermodynamics-based constitutive framework for unsaturated soils. 1: Theory. *Géotechnique*, 2007, 57: 411-422
- Li X S. Thermodynamics-based constitutive framework for unsaturated soils. 2: A basic triaxial model. *Géotechnique*, 2007, 57: 423-435

- 18 赵成刚, 张雪东. 非饱和土中功的表述以及有效应力与相分离原理的讨论. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2008, 38: 1453–1463
- 19 Zhao C G, Liu Y, Gao F P. Work and energy equations and the principle of generalized effective stress for unsaturated soils. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 2010, 34: 920–936
- 20 刘艳, 赵成刚, 蔡国庆, 等. 考虑气相影响的非饱和土本构模型. 科学通报, 2010, 55: 2635–2642
- 21 赵成刚, 刘艳. 连续孔隙介质土力学及其在非饱和土本构关系中的应用. 岩土工程学报, 2009, 31: 1324–1335
- 22 Cai G Q, Zhao C G, Liu Y et al. A nonlinear multi-field coupled model for soils. *Sci China E: Tech Sci*, 2011, 54: 1300–1314
- 23 Sheng D, Sloan S W, Gens A. A constitutive model for unsaturated soils: Thermomechanical and computational aspects. *Comput Mech*, 2004, 33: 453–465
- 24 Wei C F, Dewoolkar M M. Formulation of capillary hysteresis with internal state variables. *Water Resour Res*, 2006, 42: w07405
- 25 Sun D, Sheng D, Xiang L, et al. Elastoplastic prediction of hydro-mechanical behaviour of unsaturated soils under undrained conditions. *Comput Geotech*, 2008, 35: 845–852
- 26 Collins I F, Kelly P A. A thermomechanical analysis of a family of soil models. *Géotechnique*, 2002, 52: 507–518
- 27 Loret B, Khalili N. A three-phase model for unsaturated soils. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 2000, 24: 893–927
- 28 Abuel-Naga H M, Bergado D T, Bouazza A, et al. Volume change behaviour of saturated clays under drained heating conditions: Experimental results and constitutive modeling. *Can Geotech J*, 2007, 44: 942–956