

# AWGN 信道下 Turbo 码解码算法的选择

许可 万建伟 王玲

(国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 在加性高斯白噪声 (AWGN) 信道下, 采用最大后验概率 (MAP) 算法的 Turbo 码解码是误比特率最低的算法。为了降低运算量实现快速解码, Log-MAP 算法、Max-Log-Map 算法和线性 Max-Log-Map 算法分别对 MAP 算法进行了不同程度的简化。本文简单介绍了基于 MAP 算法的 Turbo 码解码原理, 从纠正函数的角度出发归纳和比较了三种 MAP 类简化算法, 通过纠正函数从理论上对算法性能以及对信噪比估计误差的敏感度进行了分析, 对分析结果进行了仿真验证。综合解码性能和运算量, 提出了 Turbo 码解码的算法选择方案, 以及实用, 简易的 Turbo 码解码参数设置建议。

**关键词:** Turbo 码; Log-MAP 算法; Max-Log-MAP 算法; 线性 Max-Log-MAP 算法; 信噪比估计误差

**中图分类号:** TN911.23    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1003-0530(2010)08-1217-05

## Turbo-Decoding Algorithm Selection on AWGN Channels

XU Ke    WAN Jian-wei    WANG Ling

(College of Electrical Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** For Turbo decoding on the additive white Gaussian noise (AWGN) channel, the optimal algorithm in term of bit error rate (BER) is symbol by symbol maximum *a posteriori* (MAP) algorithm. In order to reduce the computational complexity and to implement the MAP decoding algorithm, a number of simplified MAP-based methods have been proposed recently, e. g. the Log-MAP algorithm, the Max Log-MAP algorithm and the linear Max Log-MAP algorithm. This paper introduces the basic principle of MAP-based turbo decoding. In addition, by the means of the so called correction function, these simplified MAP-based approaches are categorized and compared, while the performance and sensitivity to the signal to noise ratio (SNR) offsets of those simplified algorithms are also theoretically investigated. Further, all the results are verified with a number of computer simulations. By considering both the performance and the computational cost, Turbo decoding algorithm selection suggestion as well as a practical and easy parameter configuration are proposed.

**Key words:** Turbo codes; Log-MAP algorithm; Max-Log-MAP algorithm; Linear Max-Log-MAP algorithm; Signal-to-Noise Ratio estimation error

## 1 引言

1993年 C. Berrou 等人提出的 Turbo 码掀起了纠错编码领域的一场革命<sup>[1]</sup>。由于其解码性能非常接近于 Shannon 理论极限, Turbo 码已成为了第 3 代高速移动通信的信道编码标准之一<sup>[2,3,4]</sup>。

Turbo 码一般采用的是基于最大后验概率 (MAP) 准则的解码算法, 这是一种追求误比特率最低的算法<sup>[5]</sup>。由于在 MAP 算法中存在大量形如  $\ln(e^x + e^y)$  的运算, 为了降低运算量, 文献[6]提出了 Log-MAP 算法和 Max-Log-MAP 算法; 前者利用雅克比对数方程对  $\ln(e^x + e^y)$  运算做了等价转换, 是在解码性能上等价于 MAP 算法

的最优算法; 后者将  $\ln(e^x + e^y)$  进一步简化为求最大值操作, 运算量大大减小, 但在一定程度上牺牲了解码性能。文献[9]提出的线性 Max-Log-MAP 算法是以上两者的折衷, 其运算量接近 Max-Log-MAP 算法, 而解码性能接近 Log-MAP 算法。

在加性高斯白噪声 (AWGN) 信道下, 信噪比数值是 Turbo 解码的重要参数。文献[7, 8]研究了信噪比估计误差对 Log-MAP 和 Max-Log-MAP 算法解码性能的影响, 并提出了在 AWGN 信道下 Turbo 解码的算法选择方案。文献[8]的研究表明: Log-MAP 算法对信噪比估计误差较敏感, 而 Max-Log-MAP 算法和信噪比参数无关。

本文将主要分析信噪比估计误差对线性 Max-Log-MAP 算法解码性能的影响,并提出 AWGN 信道下 Turbo 码解码的算法选择及参数设置的建议。本文第2节简要回顾 Turbo 码的解码流程和算法,介绍了 Log-MAP, Max-Log-MAP 和线性 Max-Log-MAP 三种算法;第3节以纠正函数为出发点分析了信噪比估计误差对线性 Max-Log-MAP 算法的影响;第4节给出仿真结果和算法选择方案;第5节对全文进行总结。

## 2 Turbo 码解码算法与分类

经典的 Turbo 码是并行级联卷积码(PCCC),有关 Turbo 码的详细原理可以参考文献[10]。Turbo 码解码器由两个软输入软输出(SISO)分量解码器组成,SISO 解码器中输出和反馈的只是待判决比特位是0或1的概率。

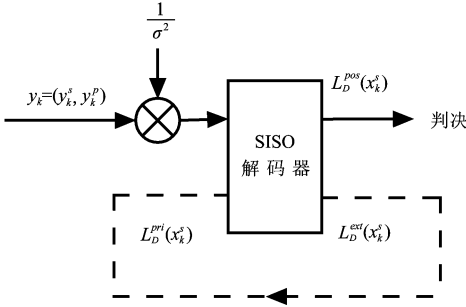


图1 SISO 解码器

图1描述了SISO解码器的输入输出和运作流程,  $x_k = (x_k^s, x_k^p)$  和  $y_k = (y_k^s, y_k^p)$  分别表示  $k$  时刻传递和收到的信息码和校验码。第一个输入  $y_k$  来自 AWGN 信道输出;第二个输入  $L_D^{pri}(x_k^s)$  来自 SISO 解码器的反馈,代表了信息码  $x_k^s$  取0或1的先验概率;第一个输出  $L_D^{pos}(x_k^s)$  代表了  $x_k^s$  取0或1的后验概率,根据最大后验概率准则我们可以用公式(1)来对  $x_k^s$  进行0或1的判

决;第二个输出  $L_D^{ext}(x_k^s)$  称作外部信息,它体现了 SISO 解码器扣除  $L_D^{pri}(x_k^s)$  和  $y_k$  这两个内部输入后对解码的“纯贡献”。

$$L_D^{pos}(x_k^s) = \ln \frac{\Pr(x_k^s = 1 | \text{observation})}{\Pr(x_k^s = 0 | \text{observation})} \Bigg|_{x_k^s=0}^{x_k^s=1} > 0 \quad (1)$$

### 2.1 Turbo 码的解码算法

使用 MAP 算法的 SISO 解码器存在大量形如  $\ln(e^x + e^y)$  的运算,为了减少运算量实现快速解码,一般用  $\max^*(\cdot)$  操作来取代对数运算和指数运算<sup>[6]</sup>,定义如下:

$$\ln(e^x + e^y) \stackrel{\Delta}{=} \max^*(x, y) = \max(x, y) + f_c(|x - y|) \quad (2)$$

其中  $\max(\cdot)$  是取最大值操作,  $f_c(\cdot)$  称为“纠正函数”。此时  $x_k^s$  的后验概率对数似然比为:

$$L_D^{pos}(x_k^s) = \max_{(S_k, S_{k-1})}^* \{ \bar{\gamma}_1[(y_k^s, y_k^p), S_k, S_{k-1}] + \bar{\alpha}_{k-1}(S_{k-1}) + \bar{\beta}_k(S_k) \} - \max_{(S_k, S_{k-1})}^* \{ \bar{\gamma}_0[(y_k^s, y_k^p), S_k, S_{k-1}] + \bar{\alpha}_{k-1}(S_{k-1}) + \bar{\beta}_k(S_k) \} \quad (3)$$

$S_k$  表示编码器在  $k$  时刻的状态,  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  和  $\bar{\gamma}$  分别被称为前向状态度量,后向状态度量和分支度量。

$$\bar{\alpha}_k(S_k) = \max_{(S_{k-1}, i)}^* \{ \bar{\gamma}_i[(y_k^s, y_k^p), S_k, S_{k-1}] + \bar{\alpha}_{k-1}(S_{k-1}) \} \quad (4)$$

$$\bar{\beta}_k(S_k) = \max_{(S_{k+1}, i)}^* \{ \bar{\gamma}_i[(y_{k+1}^s, y_{k+1}^p), S_k, S_{k+1}] + \bar{\beta}_{k+1}(S_{k+1}) \} \quad (5)$$

$$\bar{\gamma}_i[(y_k^s, y_k^p), S_k, S_{k-1}] = \frac{1}{\sigma^2} y_k^s x_k^s(i) + \frac{1}{\sigma^2} y_k^p x_k^p(i, S_k, S_{k-1}) + \ln \Pr \{ S_k | S_{k-1} \} \quad (6)$$

在计算  $\bar{\gamma}$  的过程中,  $\ln \Pr \{ S_k | S_{k-1} \}$  代表了  $x_k^s$  的先验概率对数似然比,

$$\ln \Pr \{ S_k | S_{k-1} \} = \begin{cases} L_D^{pri}(x_k^s) - \ln(1 + e^{L_D^{pri}(x_k^s)}), & q(x_k^s = 1 | S_k, S_{k-1}) = \text{true} \\ -\ln(1 + e^{L_D^{pri}(x_k^s)}), & q(x_k^s = 0 | S_k, S_{k-1}) = \text{true} \end{cases} \quad (7)$$

外部信息  $L_D^{ext}(x_k^s)$  是 SISO 解码器对 Turbo 迭代解码过程的“纯贡献”,是扣除内部输入  $L_D^{pri}(x_k^s)$  和  $y_k$  影响后的结果。

$$L_D^{ext}(x_k^s) = L_D^{pos}(x_k^s) - \frac{2}{\sigma^2} y_k^s - L_D^{pri}(x_k^s) \quad (8)$$

如果假设符号能量  $E_s$  为1,噪声为双边带,码率为  $1/2$ ,信噪比  $E_b/N_0 = 1/\sigma^2$ 。在信噪比未知情况下,需要对噪声方差  $\sigma^2$  (或信噪比  $1/\sigma^2$ ) 进行估计,将估计值  $\hat{\sigma}^2$

代入公式(6)和(8):

$$\bar{\gamma}_i[(y_k^s, y_k^p), S_k, S_{k-1}] = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} y_k^s x_k^s(i) + \frac{1}{\hat{\sigma}^2} y_k^p x_k^p(i, S_k, S_{k-1}) + \ln \Pr \{ S_k | S_{k-1} \} \quad (9)$$

$$L_D^{ext}(x_k^s) = L_D^{pos}(x_k^s) - \frac{2}{\hat{\sigma}^2} y_k^s - L_D^{pri}(x_k^s) \quad (10)$$

由此可以看出:由于使用估计值  $\hat{\sigma}^2$  引起的信噪比  $(1/\hat{\sigma}^2)$  估计误差,对  $L_D^{pos}(x_k^s)$  和  $L_D^{ext}(x_k^s)$  的计算有着重要的影响。

## 2.2 Turbo 码解码算法分类

Log-MAP 算法采用纠正函数的准确表达式  $\ln(1 + e^{-|x-y|})$  [6], 此时公式(2)变为:

$$\max^*(x, y) \stackrel{\text{Log-MAP}}{=} \max(x, y) + \ln(1 + e^{-|x-y|}) \quad (11)$$

把  $\max^*(\cdot)$  进一步简化为  $\max(\cdot)$ , 这就是 Max-Log-MAP 算法:

$$\max^*(x, y) \stackrel{\text{Max-Log-MAP}}{=} \max(x, y) + 0 \quad (12)$$

把 Log-MAP 算法中的纠正函数在原点线性展开, 得到线性 Max-Log-MAP 算法 [9]:

$$\max^*(x, y) \stackrel{\text{线性Max-Log-MAP}}{=} \max(x, y) + \max(0, \ln 2 - \frac{1}{2}|x-y|) \quad (13)$$

通过对公式(11~13)的观察, 我们可以认为 Log-MAP, Max-Log-MAP 和线性 Max-Log-MAP 算法都是将  $\ln(e^x + e^y)$  运算定义为了  $\max^*(\cdot)$  操作, 唯一区别就是对  $\max^*(\cdot)$  纠正函数  $f_c(\cdot)$  的定义。

图 2 描述了 Log-MAP, Max-Log-MAP 和线性 Max-Log-MAP 三种算法的纠正函数, 用  $t = x - y$  表示纠正函数的输入。Log-MAP 算法的纠正函数对应图中的实线, Max-Log-MAP 算法的纠正函数恒为零, 线性 Max-Log-MAP 算法的纠正函数对应图中的虚线, 可见线性 Max-Log-MAP 算法的纠正函数介于 Log-MAP 算法和 Max-Log-MAP 算法之间。

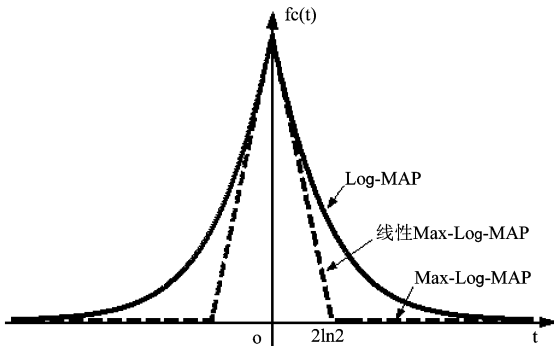


图 2 三种算法的纠正函数

当  $|t| \geq 2\ln 2$  时, 线性 Max-Log-MAP 算法的纠正函数与 Max-Log-MAP 算法的纠正函数相同, 此时线性 Max-Log-MAP 算法与 Max-Log-MAP 算法的解码性能相同; 当  $|t| < 2\ln 2$  时, 线性 Max-Log-MAP 的纠正函数线性逼近 Log-MAP 算法的纠正函数, 此时线性 Max-Log-MAP 算法与 Log-MAP 算法的解码性能接近。可以认为: 线性 Max-Log-MAP 算法的纠正函数反映了它与另外两种算法在解码性能上的接近程度。

## 3 纠正函数与信噪比估计误差敏感度

根据 Max-Log-MAP 算法的定义, 公式(7)的取值只可能是  $-L_D^{pri}(x_k^s)$ , 0 或  $L_D^{pri}(x_k^s)$ 。如果在初始迭代时设  $L_D^{pri}(x_k^s) = 0$ , 那么公式(4~6)都与噪声方差  $\sigma^2$  成反比, 进一步可知似然比判决表达式也与噪声方差  $\sigma^2$  成反比。由于噪声方差  $\sigma^2 > 0$ ,  $\sigma^2$  的取值并不会影响判决表达式的符号, 所以 Max-Log-MAP 算法与  $\sigma^2$  的取值是无关的 [8]。

由于 Log-MAP 算法的纠正函数不为 0, 公式(7)的取值无法成为  $\alpha \cdot L_D^{pri}(x_k^s)$  这样的线性函数 ( $\alpha = 0, \pm 1$ )。即使在初始迭代时设  $L_D^{pri}(x_k^s) = 0$ , 似然比表达式  $L_D^{pos}(x_k^s)$  也无法与  $\sigma^2$  成反比。在这种情况下,  $\sigma^2$  的取值就会影响判决表达式的符号, 所以 Log-MAP 算法与  $\sigma^2$  的取值是有关的。

由以上的分析可以看出: 如果纠正函数取值为 0, 公式(7)就能写为  $\alpha \cdot L_D^{pri}(x_k^s)$  这样的表达式, 那么该算法就与  $\sigma^2$  的取值无关, 反之则与  $\sigma^2$  的取值有关。Log-MAP 算法的非线性纠正函数修正了用  $\max(\cdot)$  替代  $\max^*(\cdot)$  所带来的运算误差, 提升解码性能的同时却导致了其对  $\sigma^2$  取值的依赖, 从文献 [8] 和本文下一节的仿真结果都可以看出 Log-MAP 算法对信噪比估计误差是比较敏感的。Max-Log-MAP 算法的纠正函数为 0, 简单地用  $\max(\cdot)$  替代了  $\max^*(\cdot)$ , 牺牲解码性能的同时却“收获”了与  $\sigma^2$  取值无关这样一个优良特性。

由于线性 Max-Log-MAP 算法与另外两种算法相比只是对纠正函数的定义有所不同, 所以下面通过纠正函数分析线性 Max-Log-MAP 算法对信噪比估计误差的敏感程度。需要说明的是: 根据前面的假设可知信噪比只是噪声方差  $\sigma^2$  的函数, 本文讨论的信噪比估计误差也就是由于用  $\hat{\sigma}^2$  代替  $\sigma^2$  所引起的误差。

如图 2 所示: 当  $|t| \geq 2\ln 2$  时, 线性 Max-Log-MAP 算法的纠正函数与 Max-Log-MAP 算法的纠正函数相同, 此时线性 Max-Log-MAP 算法应该与 Max-Log-MAP 算法一样与  $\sigma^2$  取值无关; 当  $|t| < 2\ln 2$  时, 线性 Max-Log-MAP 的纠正函数线性逼近 Log-MAP 算法的纠正函数, 此时线性 Max-Log-MAP 算法的对信噪比估计误差的敏感程度也应该趋向于 Log-MAP 算法。可以认为: 线性 Max-Log-MAP 算法的纠正函数同时也反映了它与另外两种算法在对信噪比估计误差敏感性上的接近程度。下一节用仿真实例来证实理论分析结果。

## 4 仿真结果与算法选择

设 Turbo 码分量编码器的生成矩阵为  $g = [7, 5]$ ,

数据帧长度为 1024 比特, 码率  $r = 1/2$ 。用  $\gamma$  表示 AWGN 信道的真实信噪比,  $\hat{\gamma}$  表示实际使用的信噪比, 图 3 显示了  $\gamma$  分别为 1dB, 1.5dB 和 2dB 时三种解码算法在 5 次迭代后的误比特率。横坐标原点表示当前信噪比估计值和真实值相同 ( $\hat{\gamma} - \gamma = 0$ ), 原点以右表示高估信噪比 ( $\hat{\gamma} - \gamma > 0$ ), 原点以左表示低估信噪比 ( $\hat{\gamma} - \gamma < 0$ )。

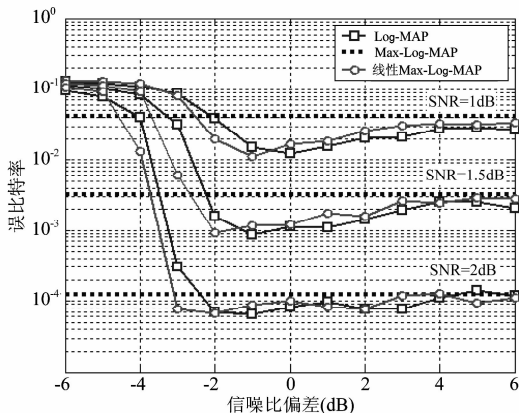


图3 信噪比估计误差对解码算法性能的影响, 1024 比特, 5 次迭代

从图 3 可以看出: 对于 Log-MAP 算法而言, 高估信噪比不会太影响解码性能, 但信噪比的低估会很快带来解码性能的极大下降, 或者我们可以认为低估信噪比更加“危险”; 对于 Max-Log-MAP 算法而言, 解码性能与信噪比数值无关, 它的误比特率曲线是一条直线; 对于线性 Max-Log-MAP 算法而言, 其解码性能和对信噪比估计误差的敏感程度都介于 Log-MAP 算法和 Max-Log-MAP 算法之间, 仿真结果证实了前一节的理论分析。

文献[8]提出了 AWGN 信道下 Turbo 码解码算法的选择方案: 当信噪比时变或不好估计时应该选用 Max-Log-MAP 算法; 当信噪比不变或缓变时应该使用 Log-MAP 算法, 并采用“设计点”的信噪比作为解码参数。所谓设计点法, 就是选取误比特率曲线上当误比特率为  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  或  $10^{-4}$  时候的信噪比作为 Log-MAP 算法的解码参数输入。这种方案的缺点在于: 第一、在实际情况下设计点的信噪比数值会随着帧长, 生成矩阵和码率等参数变化, 需要一段训练数据才能知道设计点的位置; 第二、当真实信噪比在变化时, 设计点及其对应的信噪比参数也是随之变化的; 第三、由于非线性纠正函数的引入, Log-MAP 算法的运算量偏大。

图 3 的结果与文献[7]得出的结论是一致的, 即适

当低估信噪比会对 Log-MAP 算法的解码性能有微量提升。文献[11]进一步提出这个低估的数值应该为  $-\gamma$ , 相当于始终使用 0dB 作为信噪比估计值。本文将文献[11]提出的结论推广到线性 Max-Log-MAP 算法, 并进行了仿真分析。图 4 和图 5 显示了将 Log-MAP 算法和线性 Max-Log-MAP 算法的输入信噪比固定为 0dB 时的误比特率曲线, 图 4 数据帧长度为 1024 比特, 图 5 的数据帧长度为 128 比特。

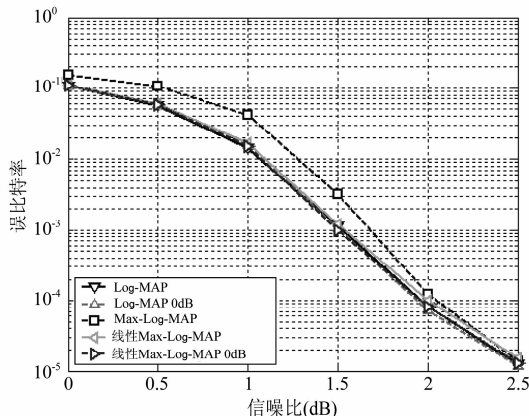


图4 设定信噪比恒为 0dB 时的误比特率曲线, 1024 比特, 5 次迭代

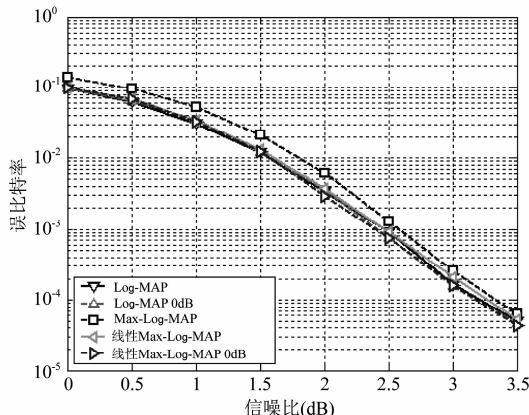


图5 设定信噪比恒为 0dB 时的误比特率曲线, 128 比特, 5 次迭代

从图 4 和图 5 可以看出: 对于线性 Max-Log-MAP 算法而言, 将信噪比估计值  $\hat{\gamma}$  固定为 0dB 时与使用准确参数 ( $\hat{\gamma} = \gamma$ ) 时的解码性能非常接近。相比于 Log-MAP 算法, 线性 Max-Log-MAP 算法的优点在于: 第一、在几乎拥有相同解码性能的前提下, 线性 Max-Log-MAP 算法的运算量小于 Log-MAP 算法, 有利于 Turbo 码解码的硬件实现; 第二、从对信噪比估计误差敏感度考虑, 线性 Max-Log-MAP 算法比 Log-MAP 算法更鲁棒。

在综合考虑解码性能和对信噪比误差敏感度的情况下, 在 AWGN 信道下 Turbo 码解码算法应以如下方案来选择解码算法和设置解码参数:

- 当 AWGN 信道信噪比不变或者缓变时,建议 Turbo 码解码器选择线性 Max-Log-MAP 算法,并设定输入参数  $\hat{\gamma}$  恒为 0dB。
- 当 AWGN 信道信噪比时变或者不好估计时,建议 Turbo 码解码器选择 Max-Log-MAP 算法。

## 5 结束语

本文利用纠正函数分析了 Log-MAP, Max-Log-MAP 和线性 Max-Log-MAP 这三种算法的解码性能和对信噪比估计误差的敏感性,并对分析结果进行了仿真验证。针对不同时变特性的 AWGN 信道,在综合考虑解码性能和信噪比估计误差敏感性的基础上,提出了 Turbo 码解码的算法选择及参数设置方案。该方案不仅能保证解码性能和有利于 Turbo 码解码的硬件实现,而且输入参数简单易得。

## 参考文献

- [1] BERROU C., GLAVIEUX A., et al. Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo-Codes(1) [C]. IEEE Int. Conf. on Communications, 1993, 1064-1070.
- [2] LEE L., HAMMONS A., et al. Application and Standardization of Turbo Codes in Third-Generation High-Speed Wireless Data Services [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2000, 49(6):2190-2207.
- [3] 3rd Generation Partnership Project, Technical Specification Group, Radio Access Network, Working Group 1, Multiplexing and Channel Coding (FDD) Release 5.0 [S]. 3GPP TS 25.212, 2002, <http://www.mumor.org/public/background/25212-500.pdf>.
- [4] Introduction to for CDMA2000 Standards for Spread Spectrum Systems [S], TIA/EIA/IS-2000.1-A, 2000, <http://www.tiaonline.org/standards/technology/cdma2000/documents/TIA-EIA-IS-2000-1-A.pdf>.
- [5] BAHL L., COCKE J., et al. Optimal Decoding of Linear Codes for Minimizing Symbol Error Rate [J]. IEEE Transactions on Information Theory 1974, 284-287.
- [6] ROBERTSON P., HOEHER P., et al. Optimal and Sub-Optimal Maximum A Posteriori Algorithms Suitable for Turbo Decoding [J]. European Transactions on Telecom. 1997, 8(2): 119-125.
- [7] SUMMERS T., WILSON S. SNR Mismatch and Online Estimation in Turbo Decoding [J]. IEEE Transactions on Communications, 1998, 46(4): 421-423.
- [8] WORM A., HOEHER P., et al. Turbo-decoding without SNR Estimation [J]. IEEE Communications Letters, 2000, 4(6):193-195.
- [9] TALAKOUB, S., SABETI L., et al. An Improved Max-Log-MAP Algorithm for Turbo Decoding and Turbo Equalization [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2007, 56(3):1058-1063.
- [10] SKLAR, B. A Primer on Turbo Code Concepts [J]. IEEE Communications Magazine, 1997, 35(12): 94-102.
- [11] LEE, K., Lee H., et al. A New Channel Reliability Value for Iterative MAP Turbo Decoder [C]. IEEE International Conference on Wireless & Mobile Computing, Networking & Communication, 2008, 333-334.

## 作者简介



许 可(1982-),男,生于四川乐山,现为国防科技大学电子科学与工程学院博士研究生,主要从事统计信号处理,数字通信等方面的研究。  
E-mail: xuke@nudt.edu.cn



万建伟(1964-),男,生于江西南昌,博士,国防科技大学电子科学与工程学院教授,博士生导师,主要从事现代信号处理研究。  
E-mail: kermitwjw@139.com

王 玲(1965-),女,生于河南郑州,博士,国防科技大学电子科学与工程学院副教授,硕士生导师,主要从事传感器网络研究。