文章编号:1001-506X(2011)11-2434-06

基于风险-效益比和前景理论的风险性多属性决策方法

马　健，孙秀霞，郭　创
（空军工程大学工程学院，陕西 西安 710038）

摘　要：针对依据期望效用理论的风险性多属性决策方法未考虑决策者实际决策时的不理性，提出基于风险-效益比和前景理论的风险性多属性决策方法。该方法借鉴经济学中商品性价比，定义了能有效反映方案间对比信息的风险-效益比参数；同时，为更充分地在决策中体现决策者的不理性，基于前景理论价值函数对风险-效益比进行修正，使用加权法得到包含方案优劣偏好信息的判断矩阵，进而得到方案排序。计算实例表明，该方法可操作性强，方案评价结果符合实际决策存在的非理性，为此类问题解决提供了一个新的途径。

关键词：期望效用理论；前景理论；多属性决策；风险-效益比

中图分类号：N 94；O 23　　**文献标志码**：A　　**DOI**：10.3969/j.issn.1001-506X.2011.11.17

Method of risk multiple attribute decision making based on risk-gain ratio and prospect theory

MA Jian，SUN Xiu-xia，GUO Chuang
(*College of Engineering*, *Air Force Engineering University*, *Xi'an 710038*, *China*)

Abstract: Aiming at decision-maker's irrationality is usually disregarded in risk multiple attribute decision making based on expected utility theory, a risk multiple attribute decision making method based on risk-gain ratio and prospect theory is proposed. According to the performance-price ratio in economics, a parameter of the risk-gain ratio is defined and modified by the value function in prospect theory for fully embodying decision-maker's irrationality, and a judgement matrix including project preference is obtained by using a simple weighted method, then the sequence of projects is worked out. As the case shows, the method has a strong operability, and the evaluated result is accordant with the irrationality in decision-making. The method provides a new path for risk multiple attribute decision making.

Keywords: expected utility theory; prospect theory; multiple attribute decision making; risk-gain ratio

0　引　言

风险和不确定性是多属性决策分析中最主要的两个概念[1]。针对风险及不确定性条件下的决策，Von Neumann 和 Morgenstern 于 1944 年提出的期望效用理论占有统治地位[2]。目前，关于多属性决策方法的研究取得的一些成果大多是建立在期望效用理论基础之上的，即基于决策者总是理性的这一假设，即效用值的大小是客观的[3-5]。

但是，Kahneman 和 Tversky 通过一系列实验表明人们的许多决策行为是违反期望效用理论的，进而提出前景理论[6-9]，通过实验得出价值函数和概率权重函数，其更符合决策者不确定情况下不完全理性的决策行为。当前，该方法已应用于经济政策选择[10]、国际关系分析[11]、清算决策[12]、纳税行为分析[13]、股票期权[14]等方面的研究，显示出该方法良好的应用前景。此外，随着以不确定的参考点为主要特征的第三代前景理论的提出[15]，该方法的理论体系得到进一步的完善。同时，风险性决策时，除了已知方案的评价值外，决策者可以通过调查，根据过去的统计资料，凭借主观预测与经验统计估计获取各种可选方案发生的概率[16]。如何充分挖掘风险性决策时的这些已知数据所包含的信息呢？

受到第三代前景理论中不确定参考点的启发，方案指标两两比较即互为参考点，同时借鉴经济学中商品的性能-价格比概念，提出方案的风险-效益比，但是这类似于期望

收稿日期：2010-12-26；**修回日期**：2011-04-07。
基金项目：航空科学基金(20080896009)资助课题
作者简介：马健(1980-)，男，博士研究生，主要研究方向为智能决策。E-mail:majian_1980@163.com

效用理论的效用值，是基于决策者是理性的假设，为了使方案评价结果符合实际决策过程中存在的非理性，进一步提出基于前景理论价值函数风险-效益比解决风险性多属性决策问题。

1　问题描述

风险性多属性决策问题是：按照某种决策准则，对具有多个属性，属性权重已知，各方案属性评价值已知，且各方案发生概率已知的有限方案进行选择和排序。对于有 m 个可选方案 $p_1,p_2,\cdots,p_m$，n 个评价指标 $q_1,q_2,\cdots,q_n$，属性权重向量 $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$，其中，$w_j$ 表示评价指标 q_j 的权重，$w_j\geqslant 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$，方案 p_i 发生概率为 $P_i(i=1,2,\cdots,m)$，$0<P_i<1$ 且 $\sum_{i=1}^{n}P_i=1$。假设方案 p_i 在准则 q_j 下的特征值 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。对于所有可选方案，其评价指标特征矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=(a_{ij})_{m\times n} \tag{1}$$

一般情况下，在构造特征矩阵 $\boldsymbol{A}$ 时，指标的意义、量纲不同，并且不同指标的样本值悬殊较大，为了便于计算和优选分析，利用模糊数学中的隶属度作标准化处理，可以消除指标间由于量纲不同而带来比较上的困难[17]。假设可选方案 i，评价指标 j 的隶属度为 r_{ij}。

对于目标为越大越好(效益型)的属性，有[18]

$$r_{ij}=\frac{a_{ij}-\min\limits_{j}a_{ij}}{\max\limits_{j}a_{ij}-\min\limits_{j}a_{ij}} \tag{2}$$

对于目标为越小越好(成本型)的属性，有

$$r_{ij}=\frac{\max\limits_{j}a_{ij}-a_{ij}}{\max\limits_{j}a_{ij}-\min\limits_{j}a_{ij}} \tag{3}$$

根据式(2)和式(3)，可以得到标准化处理后的隶属度矩阵 $\boldsymbol{R}$ 为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}=(r_{ij})_{m\times n} \tag{4}$$

2　基于期望效用理论的风险性多属性决策方法

关于风险以及不确定条件下的决策，主流的理论一直是期望效用理论，其基本内涵可归结于 3 个方面：理性预期、风险回避和效用最大化。即理性的决策行为体通过对获取的信息进行考察，并权衡各种可能政策选择及后果，选择预期效用最大化的决策[2]。

期望效用理论假定，每个决策者都有一个实值的效用函数 $u(x)$，效用函数以决策者行为可能产生的结果 x 为自变量，自变量 x 共有 l 个可能的取值 $x_1,x_2,\cdots$，第 i 个状态记作 x_i。

假设现有行为 a 和行为 b 供决策者选择，行为 a 将会使自变量 x_i 以 a_i 的概率实现，而行为 b 使 x_i 的发生概率为 b_i，决策者选择 a 而放弃 b 当且仅当选择 a 所导致的效用函数期望值大于 b 所带来的期望值，即

$$\sum_{i}a_iu(x_i)>\sum_{i}b_iu(x_i) \tag{5}$$

对于风险性多属性决策问题，第 j 个评价指标的属性权重为 $w_j(j=1,2,\cdots,n)$，第 i 个方案的发生概率为 $P_i(i=1,2,\cdots,m)$，标准化处理后的评价指标特征矩阵为 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$，根据期望效用理论可得到第 i 个方案的综合评价值 $M_i(i=1,2,\cdots,m)$，为

$$M_i=P_i\sum_{j=1}^{n}r_{ij}\cdot w_j \tag{6}$$

可得方案综合评价值 $M'_1>M'_2>\cdots>M'_m$，确定方案优劣排序为 $p'_1,p'_2,\cdots,p'_m$。

3　基于风险-效益比的风险性多属性决策方法

风险性多属性决策方法追求最大期望效用值，对于不同方案之间实现概率的变化量和属性评价值变化量信息没有加以充分利用，同时单纯地以两个方案之间实现概率的变化量或属性评价值变化量都不足以充分比较方案之间的优劣，借鉴经济学中商品性价比的思想，将二者结合起来才能充分反映方案之间的差异，在此引入风险-效益比的概念。

定义 1　对于指标评估隶属度矩阵为 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$ 的风险性多属性决策问题，方案 p_l 和方案 $p_k(l,k=1,2,\cdots,n)$ 的发生概率分别为 P_l 和 P_k，属性 $q_i(i=1,2,\cdots,m)$ 对应于方案 p_l 和方案 p_k 的值分别为 r_{li} 和 r_{ki}，按照式(7)可以得到 Δ_{lk}^{i}

$$\Delta_{lk}^{i}=\begin{cases}\dfrac{r_{li}-r_{ki}}{P_l-P_k}, & P_l\neq P_k \\ 0, & P_l=P_k\end{cases} \tag{7}$$

将 Δ_{lk}^{i} 称为方案 p_l 相对于方案 p_k 在属性 q_i 上的风险-效益比，简称风险-效益比。

定义 2　对有 m 个可选方案，n 个评价指标的风险性多属性决策问题，依据式(7)计算方案两两之间各属性的风险-效益比，如式(8)所示组合而成 $\boldsymbol{\Delta}=(\Delta_{ij}^{k})_{\frac{m(m-1)}{2}\times n}$，称为风险-效益比矩阵。

$$\boldsymbol{\Delta}=\begin{bmatrix} \Delta_{12}^{1} & \Delta_{12}^{2} & \cdots & \Delta_{12}^{n} \\ \Delta_{13}^{1} & \Delta_{13}^{2} & \cdots & \Delta_{13}^{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1m}^{1} & \Delta_{1m}^{2} & \cdots & \Delta_{1m}^{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{ij(i<j)}^{1} & \Delta_{ij(i<j)}^{2} & \cdots & \Delta_{ij(i<j)}^{n} \\ \Delta_{i(j+1)(i<j)}^{1} & \Delta_{i(j+1)(i<j)}^{2} & \cdots & \Delta_{i(j+1)(i<j)}^{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{im}^{1} & \Delta_{im}^{2} & & \Delta_{im}^{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{(m-1)m}^{1} & \Delta_{(m-1)m}^{2} & \cdots & \Delta_{(m-1)m}^{n} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m-1\text{ 行} \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m-i\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \tag{8}$$

依据期望效用理论，由于评价指标 $q_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重 w_j 已知，使用简单加权法即可得到方案 p_i 相对于方案 p_j 的风险-效益比综合评价值 $c_{ij(i<j)}$，有

$$c_{ij(i<j)}=\sum_{k=1}^{n}\Delta_{ij}^{k}\cdot w_k \tag{9}$$

定义 3 对于风险-效益比矩阵为 $\boldsymbol{\Delta}=(\Delta_{ij}^{k})_{[m(m-1)/2]\times n}$ 的风险性多属性决策问题，已知评价指标 $q_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重 w_j，按照式(9)可以得到矩阵 $c_{ij(i<j)}$，将 $c_{ij(i<j)}$ 称为方案 p_i 相对于方案 p_j 的风险-效益比综合评价值。

按照式(9)可以得到 $m(m-1)/2$ 个方案两两对比的风险-效益比综合评价值，其中包含了方案的优劣排序信息，若是将 $m(m-1)/2$ 个值直接排序，并不能得到方案的排序，此处将方案 p_i 相对于方案 p_j 的风险-效益比综合评价值 $c_{ij(i<j)}$ 依据式(10)进行转换，得到一个上三角阵 $\boldsymbol{C}^*$

$$c_{ij}^{*}=\begin{cases}1, & c_{ij(i<j)}>0\\ -1, & c_{ij(i<j)}\leqslant 0\end{cases} \tag{10}$$

然后将主对角线上元素取为 0，即 $c_{ii}^{*}=0(i=1,2,\cdots,m)$，下三角阵取为上三角阵的反对称阵，则得到一个判断矩阵 $\boldsymbol{C}^*=(c_{ij}^{*})_{m\times m}$。其物理含义为：依据方案 p_i 相对于方案 p_j 的风险-效益比综合评价值 $c_{ij(i<j)}$ 的大小，若 $c_{ij(i<j)}>0$，则方案 p_i 优于方案 p_j，故 $c_{ij}^{*}=1$；反之，方案 p_i 劣于方案 p_j，$c_{ij}^{*}=-1$；其主对角线上元素为方案 p_i 自身比较，没有优劣之分，故 $c_{ii}^{*}=0$。因此，判断矩阵 $\boldsymbol{C}^*$ 包含了基于方案 p_i 相对于方案 p_j 的风险-效益比综合评价值方案偏好信息，那么如何从中得出方案排序呢？

根据最优传递矩阵原理[19]，构造 $\boldsymbol{C}^*$ 的传递矩阵 $\boldsymbol{S}=(s_{ij})_{m\times m}$，其中

$$s_{ij}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(c_{ik}^{*}+c_{kj}^{*}) \tag{11}$$

从而可以得到相应的矩阵 $\boldsymbol{E}=(e_{ij})_{m\times m}$，其中

$$e_{ij}=\exp(s_{ij}) \tag{12}$$

对矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的每一行求和得到向量 $\boldsymbol{D}=(d_1,d_2,\cdots,d_m)^{\mathrm{T}}$，即

$$d_i=\sum_{j=1}^{m}e_{ij},\quad i=1,2,\cdots,m \tag{13}$$

然后，对求和向量 $\boldsymbol{D}$ 进行正规化，得到排序的权重向量 $\boldsymbol{V}=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m)^{\mathrm{T}}$

$$\nu_j=d_i\Big/\sum_{i=1}^{m}d_i,\quad j=1,2,\cdots,m \tag{14}$$

且 $\sum_{j=1}^{m}\nu_j=1$，可得 $v_1'\succ v_2'\succ\cdots\succ v_m'$，确定方案优劣排序为 $p_1',p_2',\cdots,p_m'$。

上述基于风险-效益比的风险性多属性决策方法虽然考虑了方案之间的风险-效益比，但得到的方案优劣排序的依据仍然是期望效用理论，那么如何在决策过程中体现决策者的非理性呢？

4 基于价值函数风险-效益比的风险性多属性决策方法

Kahneman 和 Tversky 认为，个人在不确定情况下的选择所展示出的特性和期望效用理论的基本原理是不相符的，并于 1979 年提出前景理论。前景理论将决策者的非理性引入到决策过程中，其更符合决策者在实际不确定情况下不完全理性的决策行为。

相比较而言，前景理论假设有两个实值函数[6-9]：价值函数 v 和决策权重函数 π，分别替代预期效用理论的预期效用函数和主观概率模型，决策者选择行为 a 而非行为 b，当且仅当

$$\sum_i\pi(a_i)v(\Delta x_i)>\sum_i\pi(b_i)v(\Delta x_i) \tag{15}$$

式中，$\Delta x_i=x_i-x_0$，是 x_i 相对于某一参考水平 x_0 的偏离值。价值函数 v 和决策权重函数 π 的形式如式(16)、式(17)所示。

$$v(\Delta x_i)=\begin{cases}\Delta x^{\alpha}, & \Delta x_i\geqslant 0\\ -\theta(-\Delta x_i)^{\beta}, & \Delta x_i<0\end{cases} \tag{16}$$

$$\pi(a_i)=\begin{cases}\dfrac{a_i^{\gamma}}{(a_i^{\gamma}+(1-a_i)^{\gamma})^{1/\gamma}}, & \Delta x_i\geqslant 0\\[2ex] \dfrac{a_i^{\delta}}{(a_i^{\delta}+(1-a_i)^{\delta})^{1/\delta}}, & \Delta x_i<0\end{cases} \tag{17}$$

式中，α,β 为风险态度系数，$0<\alpha,\beta<1$，α,β 越大表示决策者越倾向于冒险；θ 为损失规避系数，若 $\theta>1$，则决策者将对损失更加敏感；γ,δ 小于 1，使得权重曲线呈倒 S 形，即小概率时权重大于概率，中、大概率时权重小于概率。

显然，价值函数 v 和决策权重函数 π 都需要首先规定参照点，但是不同的决策构架将产生不同的参照点，价值相对于这个参照点就有不同的盈亏变化，这种变化将改变人们对价值的主观感受，从而影响并改变人们的偏好。

从这个角度来看，定义 1 的风险-效益比是以另一个方案的实现概率和属性评价值为参考点，以价值函数的形式引入决策者的非理性，假设 $\Delta P_{lk}=P_l-P_k$，$\Delta r_{lk}^{i}=r_{li}-r_{ki}$，有

$$v(\Delta P_{lk})=\begin{cases}\Delta P_{lk}^{\alpha}, & \Delta P_{lk}\geqslant 0\\ -\theta(\Delta P_{lk})^{\beta}, & \Delta P_{lk}<0\end{cases} \tag{18}$$

$$v(\Delta r_{lk}^{i})=\begin{cases}\Delta r_{lk}^{i\alpha}, & \Delta r_{lk}^{i}\geqslant 0\\ -\theta(\Delta r_{lk}^{i})^{\beta}, & \Delta r_{lk}^{i}<0\end{cases} \tag{19}$$

定义 4　对于指标评估隶属度矩阵为 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$ 的风险性多属性决策问题，方案 p_l 和方案 $p_k(l,k=1,2,\cdots,n)$ 的实现概率分别为 P_l 和 P_k，属性 $q_i(i=1,2,\cdots,m)$ 对应于方案 p_l 和方案 p_k 的值分别为 r_{li} 和 r_{ki}，按式(20)可得到 ∇_{lk}^{i}

$$\nabla_{lk}^{i}=\begin{cases}\dfrac{v(\Delta r_{lk}^{i})}{v(\Delta P_{lk})}, & \Delta P_{lk}\neq 0\\ 0, & \Delta P_{lk}=0\end{cases} \tag{20}$$

将 ∇_{lk}^{i} 称为方案 p_l 相对于方案 p_k 在属性 q_i 上的价值函数风险-效益比，简称价值函数风险-效益比。

定义 5　对于有 m 个可选方案，n 个评价指标的风险性多属性决策问题，依据式(20)计算方案两两之间各属性的价值函数风险-效益比，如式(21)所示组合成 $\nabla=(\nabla_{ij}^{k})_{\frac{m(m-1)}{2}\times n}$，称为风险性多属性决策问题的价值函数风险-效益比矩阵。

$$\boldsymbol{\nabla}=\begin{bmatrix}\nabla_{12}^{1} & \nabla_{12}^{2} & \cdots & \nabla_{12}^{n}\\ \nabla_{13}^{1} & \nabla_{13}^{2} & \cdots & \nabla_{13}^{n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \nabla_{1m}^{1} & \nabla_{1m}^{2} & \cdots & \nabla_{1m}^{n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \nabla_{ij(i<j)}^{1} & \nabla_{ij(i<j)}^{2} & \cdots & \nabla_{ij(i<j)}^{n}\\ \nabla_{i(j+1)(i<j)}^{1} & \nabla_{i(j+1)(i<j)}^{2} & \cdots & \nabla_{i(j+1)(i<j)}^{n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \nabla_{im}^{1} & \nabla_{im}^{2} & & \nabla_{im}^{n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \nabla_{(m-1)m}^{1} & \nabla_{(m-1)m}^{2} & \cdots & \nabla_{(m-1)m}^{n}\end{bmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}m-1\text{ 行}\\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}m-i\text{ 行}\\ \\ \end{matrix} \tag{21}$$

由于各方案的实现概率和属性评价值已经加以利用，而属性权重又不同于前景理论所用的各个自然状态的发生概率，而且此时价值函数风险-效益比矩阵 $\boldsymbol{\nabla}$ 已经包含决策者风险偏好信息，因此，使用简单加权法得到方案 p_i 相对于方案 p_j 的价值函数风险-效益比综合评价值 $z_{ij(i<j)}$，有

$$z_{ij(i<j)}=\sum_{k=1}^{n}\nabla_{ij}^{k}\cdot w_k \tag{22}$$

用 $z_{ij(i<j)}$ 替换 $c_{ij(i<j)}$，依据式(10)构造判断矩阵 $\boldsymbol{C}^{*}$，进而按式(11)～式(14)得到的方案优劣排序。

综上所述，基于价值函数风险-效益比的风险性多属性决策方法步骤为

步骤 1　确定评价指标特征矩阵 $\boldsymbol{A}$，按式(2)、式(3)标准化处理后得到隶属度矩阵 $\boldsymbol{R}$；

步骤 2　根据方案 p_l 和方案 $p_k(l,k=1,2,\cdots,n)$ 的实现概率分别为 P_l 和 P_k，属性 q_i 对应于方案 p_l 和方案 p_k 的值分别为 r_{li} 和 r_{ki}，计算得到价值函数风险-效益比 ∇_{lk}^{i}（式(20)），从而可以得到价值函数风险-效益比矩阵 $\boldsymbol{\nabla}$（式(21)）；

步骤 3　基于矩阵 $\boldsymbol{\nabla}$ 和评价指标 $q_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重 w_j，按式(22)得到方案 p_i 相对于方案 p_j 的价值函数风险-效益比综合评价值 $z_{ij(i<j)}$；

步骤 4　用 $z_{ij(i<j)}$ 替换 $c_{ij(i<j)}$，依据式(10)构造上三角阵，在此基础上添加主对角线元素 $c_{ii}^{*}=0\ (i=1,2,\cdots,m)$，下三角阵取为上三角阵的反对称阵，得到判断矩阵 $\boldsymbol{C}^{*}$；

步骤 5　基于判断矩阵 $\boldsymbol{C}^{*}$，根据最优传递矩阵原理，按式(11)～式(14)得到包含方案优劣信息的方案评价值 ν_j，该值大小排序即为方案优劣排序。

5　案例分析

应用算例：选用文献[3,20]的案例，对该离散方案决策问题的描述如表 1 所示，决策的目的是依据最大速度、飞行范围等 6 个指标对 6 种飞机的综合性能进行排序。

表 1　决策原始数据表

属性	最大速度	飞行范围	最大负荷	购买费用	可靠性	灵敏度	实现概率
1	2.0	1 500	20 000	5.5	5	9	0.156
2	2.5	2 700	18 000	6.5	3	9	0.178
3	1.8	2 000	21 000	4.5	7	7	0.186
4	2.2	1 800	20 000	5.0	5	5	0.168
5	2.1	2 100	19 750	5.3	6	6	0.150
6	2.3	2 300	20 800	5.2	6	8	0.162
权重	0.17	0.13	0.21	0.11	0.30	0.08	

注：为了研究更全面，表中增加了属性权重和方案实现概率。

利用基于价值函数风险-效益比的风险性多属性决策问题算法，按照如下步骤对该案例进行分析：

步骤 1　对于购买飞机可选方案，由表 1 可知其评价指标特征矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2.0 & 1\,500 & 20\,000 & 5.5 & 5 & 9\\ 2.5 & 2\,700 & 18\,000 & 6.5 & 3 & 9\\ 1.8 & 2\,000 & 21\,000 & 4.5 & 7 & 7\\ 2.2 & 1\,800 & 20\,000 & 5.0 & 5 & 5\\ 2.1 & 2\,100 & 19\,750 & 5.3 & 6 & 6\\ 2.3 & 2\,300 & 20\,800 & 5.2 & 6 & 8\end{bmatrix}$$

标准化处理后的隶属度矩阵 $\boldsymbol{R}$ 为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0.285\,7 & 0.000\,0 & 0.666\,7 & 0.50 & 0.50 & 1.00\\ 1.000\,0 & 1.000\,0 & 0.000\,0 & 0.00 & 0.00 & 1.00\\ 0.000\,0 & 0.416\,7 & 1.000\,0 & 1.00 & 1.00 & 0.50\\ 0.571\,4 & 0.250\,0 & 0.666\,7 & 0.75 & 0.50 & 0.00\\ 0.428\,6 & 0.500\,0 & 0.583\,3 & 0.60 & 0.75 & 0.25\\ 0.714\,3 & 0.666\,7 & 0.933\,3 & 0.65 & 0.75 & 0.75\end{bmatrix}$$

步骤 2　根据方案 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的实现概率 P_i 和隶属度矩阵 $\boldsymbol{R}$，价值函数的参数设置为 $\alpha=\beta=0.89$，$\theta=2.25$[6]，计算得到风险-效益比 Δ_{lk}^{i}、价值函数风险-效益比 ∇_{lk}^{i}，进而得到对应的矩阵 $\boldsymbol{\Delta}$ 和 $\boldsymbol{\nabla}$ 为

$$\boldsymbol{\Delta}=\begin{bmatrix} 32.4675 & 45.4545 & -30.3030 & -22.7273 & -22.7273 & 0 \\ -9.5238 & 13.8889 & 11.1111 & 16.6667 & 16.6667 & -16.6667 \\ 23.8095 & 20.8333 & 0 & 20.8333 & 0 & -83.3333 \\ -23.8095 & -83.3333 & 13.8889 & -16.6667 & -41.6667 & 125.0000 \\ 71.4286 & 111.1111 & 44.4444 & 25.0000 & 41.6667 & -41.6667 \\ -125.0000 & -72.9167 & 125.0000 & 125.0000 & 125.0000 & -62.5000 \\ 42.8571 & 75.0000 & -66.6667 & -75.0000 & -50.0000 & 100.0000 \\ 20.4082 & 17.8571 & -20.8333 & -21.4286 & -26.7857 & 26.7857 \\ 17.8571 & 20.8333 & -58.3333 & -40.6250 & -46.8750 & 15.6250 \\ -31.7460 & 9.2593 & 18.5185 & 13.8889 & 27.7778 & 27.7778 \\ -11.9048 & -2.3148 & 11.5741 & 11.1111 & 6.9444 & 6.9444 \\ -29.7619 & -10.4167 & 2.7778 & 14.5833 & 10.4167 & -10.4167 \\ 7.9365 & -13.8889 & 4.6296 & 8.3333 & -13.8889 & -13.8889 \\ -23.8095 & -69.4444 & -44.4444 & 16.6667 & -41.6667 & -125.0000 \\ 23.8095 & 13.8889 & 29.1667 & 4.1667 & 0 & 41.6667 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} 22.1406 & 29.8706 & -9.2542 & -7.1638 & -7.1638 & 0 \\ -3.3034 & 10.3986 & 8.5256 & 12.2305 & 12.2305 & -5.4358 \\ 16.8000 & 14.9175 & 0 & 14.9175 & 0 & -22.7691 \\ -37.7999 & -115.2687 & 10.3986 & -27.5187 & -62.2006 & 73.4937 \\ 44.6628 & 66.1796 & 29.2791 & 17.5455 & 27.6447 & -12.2865 \\ -32.6639 & -20.2178 & 73.4937 & 73.4937 & 73.4937 & -17.6259 \\ 28.3466 & 46.6449 & -94.5064 & -104.9511 & -73.1587 & 60.2560 \\ 14.6462 & 13.0051 & -33.5643 & -34.4165 & -41.9775 & 18.6567 \\ 13.0051 & 14.9175 & -83.9167 & -60.8147 & -69.0749 & 11.5478 \\ -48.8299 & 7.2486 & 13.4329 & 10.3986 & 19.2704 & 19.2704 \\ -20.3974 & -4.7490 & 8.8410 & 8.5256 & 5.6112 & 5.6112 \\ -46.1042 & -18.1118 & 2.4825 & 10.8601 & 8.0497 & -18.1118 \\ 6.3193 & -23.3968 & 3.9114 & 6.5998 & -23.3968 & -23.3968 \\ -37.7999 & -98.0031 & -65.8780 & 12.2305 & -62.2006 & -165.3607 \\ 16.8000 & 10.3986 & 20.1256 & 3.5613 & 0 & 27.6447 \end{bmatrix}$$

步骤 3 基于矩阵 $\boldsymbol{\Delta}$、$\boldsymbol{V}$ 和评价指标 $q_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重 w_j，得到风险-效益比综合评价值 $c_{ij(i<j)}$、价值函数风险-效益比综合评价值 $z_{ij(i<j)}$ 分别为

$$\boldsymbol{C}=[0,-1.33,-6.67,10.00,-3.33,-5.00,8.00,2.14,1.25,2.22,0.56,-0.83,-1.11,-10.00,3.33]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{Z}=[0,-0.43,-1.82,5.88,-0.98,-1.41,4.82,1.49,0.92,1.54,0.45,-1.45,-1.87,-13.23,2.21]^{\mathrm{T}}$$

步骤 4 根据得到的 $c_{ij(i<j)}$、$z_{ij(i<j)}$ 构造判断矩阵 $\boldsymbol{C}^*$，由于 $c_{ij(i<j)}$、$z_{ij(i<j)}$ 各项符号一致，导致得到的判断矩阵 $\boldsymbol{C}^*$ 也相同，为

$$\boldsymbol{C}^*=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

步骤 5 基于判断矩阵 $\boldsymbol{C}^*$，根据最优传递矩阵原理，得到包含方案优劣信息的方案评价值 $\boldsymbol{V}$，故方案排序为 326 514。

$$\boldsymbol{V}=[0.1120,0.2182,0.2578,0.0948,0.1324,0.1847]^{\mathrm{T}}$$

步骤 6 为了进行对比，根据期望效用理论，依据式(6)得到方案综合评价值 $\boldsymbol{M}$，故此方法方案排序为 635 412。

$$\boldsymbol{M}=[0.0739,0.0593,0.1114,0.0783,0.0891,0.1187]^{\mathrm{T}}$$

对上述不同方法得出的方案排序结果进行比较可知：基于风险-效益比的风险性多属性决策方法、基于价值函数风险-效益比的风险性多属性决策方法都借鉴经济学中商品性价比的思想引入了风险-效益比进行决策，区别在于是否采用前景理论价值函数，由于两种方法得出的包含方案两两比较偏好信息的综合评价值符号一致，导致判断矩阵相同，故得出的方案排序(326 514)也相同；基于期望效用理论的风险性多属性决策方法的排序(635 412)与前两种方法有显著区别，原因在于孤立的考虑单个方案的综合评

价值，不注重方案之间的比较。因此，本文从与期望效用理论不同角度，基于风险-效益比进行风险性多属性问题决策，所得方案排序充分考虑了决策者不确定情况下非理性对于决策结果的影响。

6 结　论

在风险性多属性决策问题的方案评估中，主流理论一直是期望效用理论。文中提出了基于价值函数风险-效益比、风险-效益比的风险性多属性决策方法，借鉴性价比的思想引入了风险-效益比进行决策，同时基于前景理论价值函数提出价值函数风险-效益比的概念，所确定出的优选方案具有与传统方法不同的优势。案例计算表明，本文方法排序结果符合实际决策存在的非理性，可操作性强，为此类问题提供了一个新的解决途径。

参考文献：

[1] 李凤章. 决策分析中的风险不确定性和熵[D]. 北京：中国科学院系统科学研究所，1988. (Li F Z. Uncertain risk and entropy in decision analysis[D]. Beijing: Institute of Systems Science, Chinese Academy of Science, 1988.)

[2] Neumann V M. *Theory of games and economic behavior*[M]. United States: Princeton University Press, 1944.

[3] Hwang C L, Yoon K. *Multiple attribute decision making*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[4] Kahraman C, Cebi S. A new muluattribute decision making method: hierarchical fuzzy axiomatic design[J]. *Expert Systems with Applications*, 2009, 36(3): 4848 - 4861.

[5] Fan Z P, Feng B. A multiple attributes decision making method using individual and collaborative attribute data in a fuzzy environment[J]. *Information Science*, 2009, 179(20): 3603 - 3618.

[6] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: an analysis of decision under risk[J]. *Econometric*, 1979, 47(2): 263 - 291.

[7] Tversky A, Kahneman D. The framing of decisions and the psychology of choice[J]. *Science*, 1981, 211(2): 453 - 480.

[8] Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty[J]. *Journal of Risk Uncertainty*, 1992, 5(4): 297 - 323.

[9] Kahneman D, Tversky A. *Choices, values and frames*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[10] Weyland K. Risk taking in latin american economic restructuring: lessons from prospect theory[J]. *International Studies Quarterly*, 1996, 40(2): 185 - 207.

[11] Levy J S. Prospect theory, rational choice, and international relations[J]. *International Studies Quarterly*, 1997, 41(1): 87 - 112.

[12] Kylea A S, Hui O Y, Wei X. Prospect theory and liquidation decisions[J]. *Journal of Economic Theory*, 2006, 129(1): 273 - 288.

[13] Dhami S, Nowaihi A. Why do people pay taxes? prospect theory versus expected utility theory[J]. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 2007, 64(1): 171 - 192.

[14] Gurevich G, Kliger D, Levy O. Decision-making under uncertainty—a field study of cumulative prospect theory[J]. *Journal of Banking & Finance*, 2009, 33(7): 1221 - 1229.

[15] Schmidt U, Starmer C, Sugden R. Third-generation prospect theory[J]. *Journal of Risk Uncertainty*, 2008, 36(3): 203 - 223.

[16] 佟春生. 系统工程的理论与方法概论[M]. 北京：国防工业出版社，2005. (Tong C S. *Theory and method conspectus of systems engineering*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2005.)

[17] 王美义，张凤鸣，刘智. 模糊信息的熵权多属性决策方案评估方法[J]. 系统工程与电子技术，2006，28(10)：1523 - 1535. (Wang M Y, Zhang F M, Liu Z. Evaluation method of the multi-attribute scheme based on entropy weight of fuzzy information[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2006, 28(10): 1523 - 1535.)

[18] 陈水利，李敬功，王向公. 模糊集理论及其应用[M]. 北京：科学出版社，2005. (Chen S L, Li J G, Wang X G. *Fuzzy sets theory and application*[M]. Beijing: Science Press, 2005.)

[19] 徐森泉. 基于熵权的施工导流标准多目标风险决策研究[D]. 武汉：武汉大学，2004. (Xu S Q. Multi-objective decision analysis of diversion study of diversion standards based on entropy[D]. Wuhan: Wuhan University, 2004.)

[20] 易平涛，郭亚军. 权数非独裁性条件下基于竞争视野优化的多属性决策方法[J]. 控制与决策，2007，22(11)：1259 - 1263. (Yi P T, Guo Y J. Multi-attribute decision-making method based on competitive view optimization under condition of weights nondictatorship[J]. *Control and Decision*, 2007, 22(11): 1259 - 1263.)