

# 基于 FFT 的大型平面阵列方向图的综合方法

石 力<sup>1,2</sup>, 邓云凯<sup>1</sup>, 孙慧峰<sup>1,2</sup>

(1. 中国科学院电子学研究所, 北京 100190;

2. 中国科学院研究生院, 北京 100049)

**摘要:** 针对大型平面二维阵列, 提出了一种快速的综合方法。首先根据单元激励初值, 应用二维离散傅里叶逆变换(invert fast Fourier transform, IFFT)得出阵列方向图, 然后与期望方向图比较, 得出新的方向图, 再应用二维快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)反算出新的单元激励。如此反复, 直到方向图满足设计要求。该算法直接对大型平面二维阵列进行优化而不是针对一维线阵或小型阵列, 而且天线单元数大于 5 000。最后两个 6 400(80×80)单元阵列的仿真结果表明该方法实用、高效。

**关键词:** 二维方向图综合; 快速傅里叶变换; 阵列天线; 优化设计

**中图分类号:** TN 82

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.3969/j.issn.1001-506X.2011.11.06

## Pattern synthesis method for large planar two-dimensional arrays using FFT

SHI Li<sup>1,2</sup>, DENG Yun-kai<sup>1</sup>, SUN Hui-feng<sup>1,2</sup>

(1. Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. Graduate University, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** A pattern synthesis method for large planar two-dimensional arrays is proposed. Firstly, starting with an initial set of element excitations, the array pattern is calculated by using two-dimensional invert fast Fourier transform (IFFT). Secondly, after matching the array pattern to the desired pattern, a new set of excitations is obtained through two-dimensional fast Fourier transform (FFT) performed on the matched array pattern. Repeat the whole process until the array pattern satisfies the pattern requirements. This method directly optimizes the large planar two-dimensional array rather than linear and small planar arrays, and the size of the large planar array exceeds 5 000. Finally, the results of two 6 400-element (80×80) planar arrays are presented to demonstrate the high efficiency and practicality of the method.

**Keywords:** two-dimensional pattern synthesis; fast Fourier transform (FFT); array antenna; optimization design

## 0 引言

雷达技术的发展对天线各项指标的要求越来越高, 有源相控阵天线体制对于满足这些要求提供了巨大的潜力, 它已经广泛应用于各种星载雷达、机载雷达、舰载雷达和地面雷达等领域。而天线阵列的方向图综合, 是天线设计领域中一个比较重要的研究课题。近年来, 国内外提出了许多方法。文献[1]提出了一种快速的数值综合方法, 该方法把幅度方向图和相位方向图作为辅助函数, 以此计算出单元复数激励来满足期望方向图。文献[2]提出了设计任意形状口径综合平顶方向图的方法。文献[3]采用二次编码的遗传算法, 有效地解决了 MIMO 雷达天线方向图综合中低旁瓣电平的问题。文献[4-5]分别用自适应算法和线性

规划综合了天线方向图。文献[6]提出了基于双正交基的方向图综合方法。文献[7-17]利用遗传算法对相控阵天线单元的相位和幅度进行了优化和校正。文献[14, 18]采用粒子群算法来求解激励的复值。文献[19]使用一维快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)对线阵进行波束优化。文献[20]探讨了二维 FFT 技术的应用, 分析了等距平面阵方向图与傅里叶变换的一致性, 进行了严格的数学推导, 但并没有对方向图进行综合。

上述文献中, 文献[1-2, 4, 6]的计算过程过于繁杂; 文献[3, 7, 18]的智能算法虽然避免了局部最优, 但其变量数多, 收敛速度慢。而且文献中的方法只是应用到了线阵和小型的阵列中。文献[3-19]中线阵单元数不超过 100 个, 文献[1]中最大的阵列是单元数为 28 的圆阵, 文献[2]中最大的

阵列是单元数 160 的圆阵。而本文中阵列单元数大于 5 000。

与众多的综合方法相比,本文中的方法直接对二维方向图进行优化,而且不对计算出的阵因子做各种复杂的操作,而是不满足期望阵因子的区域,直接用期望阵因子的值代替。该方法大大节省了优化时间,提高了速度。

### 1 算法描述

#### 1.1 二维 FFT

假设  $x(m, n)$  为  $M \times N$  点二维有限序列,则它的 FFT 为

$$X(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m, n) e^{-j\frac{2\pi}{M}mk} e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} \quad (1)$$

式中,  $k=0, 1, \dots, M-1; l=0, 1, \dots, N-1$ 。

而它的快速傅里叶逆变换式(invert fast Fourier transform, IFFT)为

$$x(m, n) = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} X(k, l) e^{j\frac{2\pi}{M}mk} e^{j\frac{2\pi}{N}nl} \quad (2)$$

式中,  $m=0, 1, \dots, M-1; n=0, 1, \dots, N-1$ 。

#### 1.2 二维平面阵列方向图

考察如图 1 所示  $xy$  平面上的  $K \times L$  个单元组成的矩形栅格平面阵列。设第  $(m, n)$  个单元的激励复值为  $I(m, n)$ , 则其二维阵列天线方向图可描述为

$$AF(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{L-1} I(m, n) e^{j\frac{2\pi}{\lambda}[m dx \sin \theta \cos \phi + n dy \sin \theta \sin \phi]} \quad (3)$$

式中,  $dx$  和  $dy$  分别表示沿  $x$  和  $y$  轴方向单元间距;  $\lambda$  为自由空间波长。

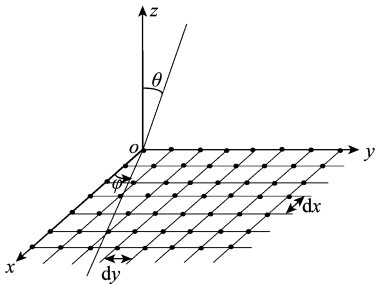


图 1 平面阵列结构

##### (1) IFFT 与平面阵列方向图函数的联系

进行二维 IFFT 两个方向的点数  $M$  和  $N$  ( $M, N$  为偶数)应满足  $M \geq K$  和  $N \geq L$ , 则对  $I(m, n)$  进行补零处理。根据式(2), 式(3)可变为

$$AF(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{L-1} I(m, n) e^{j\frac{2\pi}{M}m \times k} e^{j\frac{2\pi}{N}n \times l} \quad (4)$$

式中

$$k = \left[ \frac{M}{\lambda} \times dx \times \sin \theta \cos \phi \right] + 1 \quad (5)$$

$$l = \left[ \frac{N}{\lambda} \times dy \times \sin \theta \sin \phi \right] + 1 \quad (6)$$

式中,  $[a]$  为对  $a$  取整。

比较式(2)和式(4), 得

$$AF = MN \times \text{IFFT}(I) \quad (7)$$

由于  $k$  和  $l$  是从零开始取值的, 那么阵因子(array factor, AF)的值从  $\theta=0, \phi=0$  开始, 即为方向图的中心, 因此对  $AF(k, l)$  进行如图 2 所示的变换。

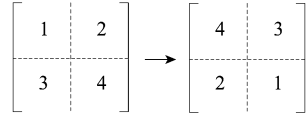


图 2 矩阵变换

把 AF 矩阵从中心分为 4 个子矩阵, 子矩阵 1 和子矩阵 4 对换, 子矩阵 2 和子矩阵 3 对换。此时, 由式(5)和式(6), 可得出与之对应的  $u$  和  $v$  的值如下

$$u = \sin \theta \cos \phi = \frac{k \times \lambda}{M \times dx} \quad (8)$$

$$v = \sin \theta \sin \phi = \frac{l \times \lambda}{N \times dy} \quad (9)$$

考虑到 IFFT 的周期性, 此时式(8)和式(9)中  $k$  和  $l$  的值为

$$k = -M/2, -M/2 + 1, \dots, M/2 - 1$$

$$l = -N/2, -N/2 + 1, \dots, N/2 - 1$$

##### (2) FFT 与平面阵列激励的联系

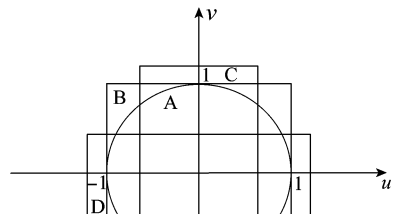
AF 与期望方向图匹配后, 得到新的(array factor, AF) (详见 1.4 中的步骤)。为了和 IFFT 中的值对应, 再次进行如图 2 所示的行和列的变换, 然后对 AF 进行 FFT 得出  $M \times N$  个激励值, 取前面的  $K \times L$  既可。

#### 1.3 可见空间

由式(8)和式(9), 可得

$$u^2 + v^2 = \sin^2 \theta \leq 1 \quad (10)$$

由此可见,  $uv$  坐标系下, 可见区域与一圆区域相对应。对于不同间距的平面阵列, 利用二维 FFT 计算出方向图的可见区域如图 3 所示。当  $dx \leq \lambda/2, dy \leq \lambda/2$  时, 可见区域为半径为 1 的圆 A; 当  $dx > \lambda/2, dy \leq \lambda/2$  时, 可见区域为半径为 1 的圆 A 与矩形 C 的交集; 当  $dx \leq \lambda/2, dy > \lambda/2$  时, 可见区域为半径为 1 的圆 A 与矩形 D 的交集; 当  $dx > \lambda/2, dy > \lambda/2$  时, 可见区域为半径为 1 的圆 A 与矩形 C 与矩形 D 的交集。对于不可见区域中的值, 应该保留, 因为反算天线单元激励时, 需要它们的值。



A  $dx \leq \lambda/2, dy \leq \lambda/2$  C  $\cap$  A  $dx \leq \lambda/2, dy \leq \lambda/2$   
C  $\cap$  A  $dx \leq \lambda/2, dy \leq \lambda/2$  C  $\cap$  D  $\cap$  A  $dx \leq \lambda/2, dy \leq \lambda/2$

图 3 可见区域示意图

### 1.4 二维 FFT 的综合方法

本文提出的阵列方向图综合方法并不依赖于初值,初值  $I_0(m, n)$  都取 1。其流程图如图 4 所示。

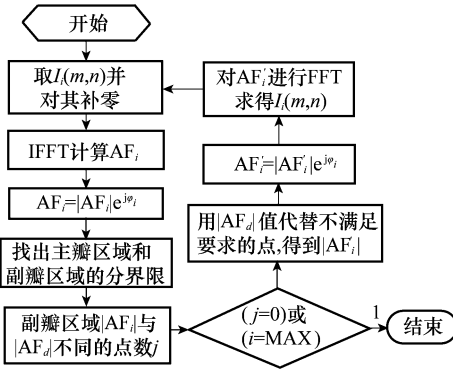


图 4 FFT 综合法流程图

**步骤 1** 对  $I_i(m, n)$  进行补零, 根据式(7)计算平面阵列的阵因子  $AF_i$ , 并且根据式(8)和式(9)计算出  $u$  和  $v$  的值。  $dx$  和  $dy$  不论取什么值, 不可见空间区域中的值继续保留。

**步骤 2** 把阵因子  $AF_i$  归一化后分解成幅度  $|AF_i|$  和相位  $\Psi_i$ 。

**步骤 3** 把  $|AF_i|$  分为主瓣和副瓣两个区域。首先, 找出二维方向图主瓣和副瓣区域之间的分界线, 即主瓣的第一零线。然后, 把零线以内即主瓣区域内  $|AF_i|$  的值进行保留。若要对主瓣赋形(详见 2.1 的例 1), 则无需判断分界线, 直接用主瓣的期望值代替原来位置上的值。

**步骤 4** 把主瓣以外的区域的  $|AF_i|$  值与期望阵因子的值  $|AF_d|$  进行比较, 若  $|AF_i|$  不满足  $|AF_d|$  的点数为零或  $i$  达到了最大值, 停止迭代, 否则执行以下步骤。

**步骤 5** 对不满足期望值的区域即  $|AF_i| > |AF_d|$ , 直接用期望阵因子的值代替, 得到新的幅度值  $|AF'_i|$ , 再利用步骤 2 中的相位  $\Psi_i$  计算出新的  $AF'_i$ 。

$$AF'_i = |AF'_i| \cdot \exp(j\Psi_i)$$

**步骤 6** 对  $AF'_i$  进行二维 FFT 得出  $M \times N$  个  $I_{i+1}(m, n)$ , 取前面的  $K \times L$  个值作为新的单元激励值  $I_{i+1}(m, n)$ 。

**步骤 7** 重复步骤 1。

该方法既可用于单元激励的幅度和相位的同时加权, 也可单独对单元激励的幅度或相位进行加权。

仅幅度加权: 和上述步骤不同的是, 步骤 6 中固定  $I(m, n)$  的相位不变, 只改变它的幅度即可。

仅相位加权: 和上述步骤不同的是, 步骤 6 中固定  $I(m, n)$  的幅度不变, 只改变它的相位即可。

## 2 仿真结果

### 2.1 优化举例

第 1 个例子的天线模型: 考虑一个  $80 \times 80$  的平面阵列天线, 对其方向图主瓣进行赋形并对副瓣进行压制。在  $v$  方向, 方向图主瓣是平顶形状, 其主瓣的区间为  $[-0.1, 0.1]$ , 在  $u$  方向, 方向图主瓣是线性下降的形状,

其主瓣的区间为  $[-0.1, 0.1]$ , 那么二维主瓣的范围为  $\{-0.1 \leq u \leq 0.1, -0.1 \leq v \leq 0.1\}$ , 并且压制方向图的最大副瓣电平为  $-30$  dB。天线的中心频率  $10$  GHz, 单元间距为  $dx=0.5\lambda$  和  $dy=0.5\lambda$ 。优化步骤如上, 在开始的  $500$  步用  $256 \times 256$  点优化, 最后  $500$  步用  $512 \times 512$  点来优化。这是因为在采样点少的时候, 方向图不准确, 但为了减少运算量, 所以采样点先少后多。本例子在软件 Matlab 下用了  $285$  s。图 5 是它的二维方向图。图 6 分别表示  $v=0$  和  $u=-0.076$  时的一维方向图, 虚线是期望方向图。

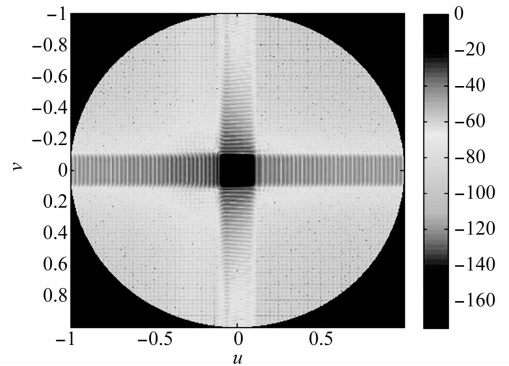
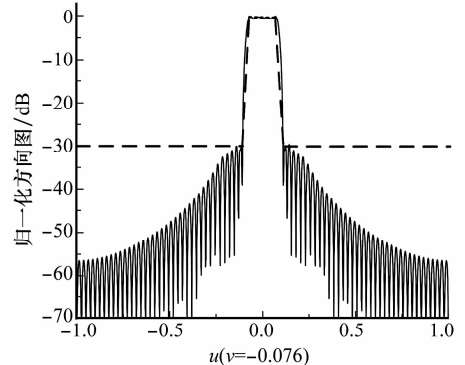
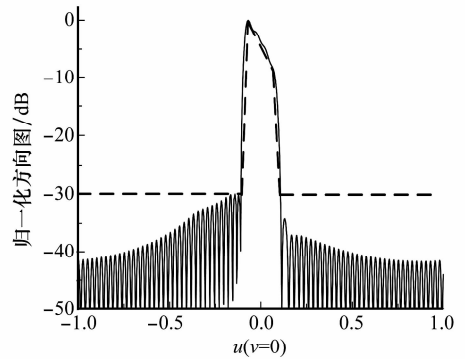


图 5 二维方向图



—: 优化方向图; ---: 期望方向图。

图 6 一维方向图

第 2 个例子的天线模型: 同样考虑一个  $80 \times 80$  的平面阵列天线, 不同的是天线的中心频率  $9.6$  GHz, 单元间距为  $dx=0.4\lambda$  和  $dy=0.4\lambda$ , 且扫描角度为:  $\theta_0 = 5.38^\circ$  和  $\Phi_0 = 68.24^\circ$ , 带入式(8)和式(9)可得出在  $uv$  空间的扫描为:  $u = 0.0348$  和  $v = 0.0871$ 。  $v$  方向的方向图和  $u$  方向的方向图

主瓣为笔状。再将其副瓣压制到 -30 dB 以下,并在指定区域  $\{-0.77 \leq u \leq -0.57, -0.013 \leq v \leq 0.187\}, \{0.245 \leq u \leq 0.435, -0.013 \leq v \leq 0.187\}, \{-0.065 \leq u \leq 0.135, -0.313 \leq v \leq -0.113\}$  和  $\{-0.065 \leq u \leq 0.135, 0.687 \leq v \leq 0.887\}$ , 形成零线, 压制副瓣为 -50 dB。和第 1 个例子一样, 方向图采样点先少后多。本例子在软件 Matlab 下用了 272 s。图 7 是用 6 位衰减器 6 位移相器量化激励复值得出的二维方向图, 4 个矩形区域为零线区域。图 8 表示  $u = 0.0348$  时在不同移相器下的方向图, 可以看出 6 位移相器压制区域副瓣电平都在 -50 dB 以下, 4 位移相器压制区域最大副瓣电平为 -46 dB, 3 位移相器压制区域最大副瓣电平为 -44 dB。可见移相器的位数主要影响了零线区域的副瓣电平。收敛曲线如图 9 所示。可以看出主瓣的赋形比零线压制要困难。图 10(a) 描述了 6 位衰减器量化后的口径幅度分布, 图 10(b) 描述了 6 位移相器量化后的口径相位分布。

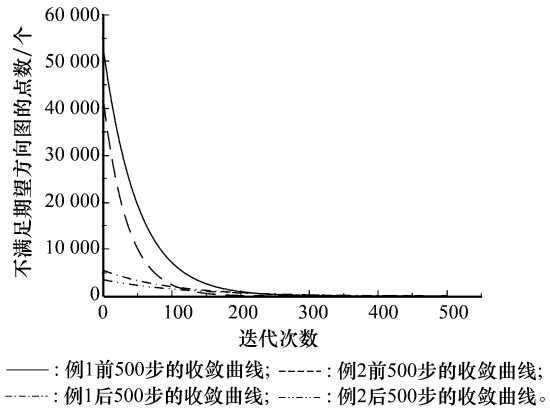


图 9 收敛曲线

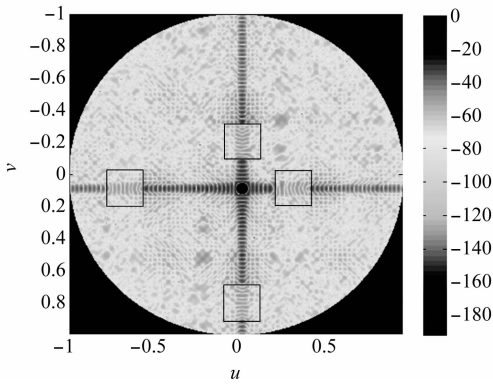
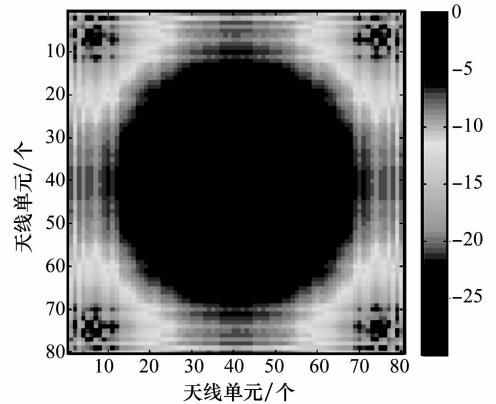


图 7 量化后的二维方向图



(a) 6位衰减器量化后的幅度

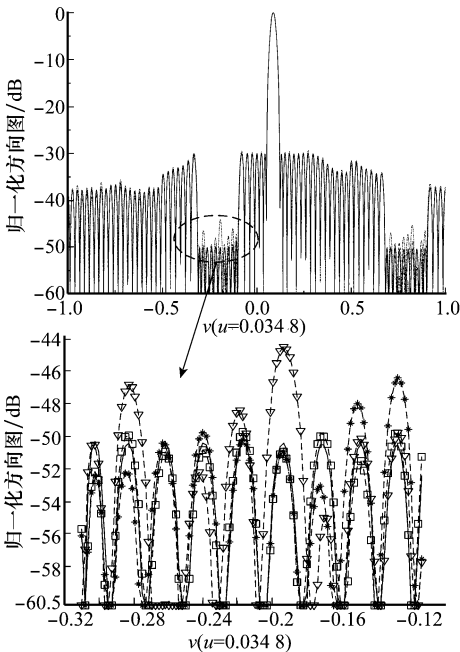
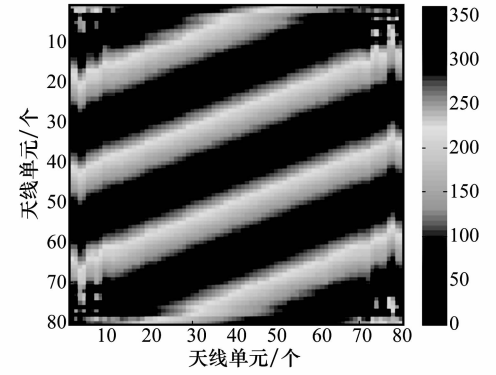


图 8 一维方向图



(b) 6位移相器量化后的相位

图 10 阵列的口径分布

—: 没量化的方向图; - - - -: 6位衰减6位移相的方向图;  
 - · - · -: 6位衰减4位移相的方向图; - · - · -: 6位衰减3位移相的方向图;  
 —: 没量化的方向图; - - - -: 6位衰减6位移相的方向图;  
 - · - · -: 6位衰减4位移相的方向图; - · - · -: 6位衰减3位移相的方向图。

### 2.2 算法比较与分析

本文利用二维 FFT 直接对二维平面阵进行了综合, 且平面阵单元数大于 5 000。而现有的综合方法中, 都是对一维的线阵或小型的阵列。对于大型的阵列, 一般的优化方法难以办到。这是由于二维 FFT 能够快速地反算出单元激励, 而智能算法(遗传算法<sup>[7-13, 15-17]</sup>和粒子群算法<sup>[14, 18]</sup>)是在一定的空间里去搜索最优值, 其他算法<sup>[1-6, 19]</sup>只是针对线阵, 而且本文中的方法操作简单, 对不满足期望阵因子的区域, 只需直接用期望阵因子的值代替。下面列出了二维 FFT 的计算时间: 在 CPU 为 T 7 250, 内存为 2 G 的电脑

上,用 matlab 计算  $256 \times 256$  点的 FFT 只需 0.1 s,  $512 \times 512$  点的 FFT 需要 0.3 s,  $1024 \times 1024$  点的 FFT 需要 1 s。从上面的比较和分析可看出,基于 FFT 的二维方向图综合方法,具有优化时间短,操作简单等优点。

### 3 结 论

本文提出了基于 FFT 的二维方向图综合方法,并且用幅度和相位同时加权实现主瓣的赋形,实现了任意位置的零线,两个例子都得到了令人满意的结果,可以看出基于 FFT 的二维方向图综合方法,具有优化时间短和操作简单等优点,具有很好工程实用价值。

### 参考文献:

- [1] Massimiliano C, Roberto V. Fast iterative method of power synthesis for antenna arrays[J]. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2009, 57(6):1952-1962.
- [2] Alireza A, Eric L M, Jalil R M. Flat-top footprint pattern synthesis through the design of arbitrary planar-shaped apertures[J]. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2010, 58(8):2539-2552.
- [3] 赵光辉,陈伯孝. 基于二次编码的 MIMO 雷达阵列稀布与天线综合[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(6):1032-1036. (Zhao G H, Chen B X. Pattern synthesis of antenna array in MIMO radar by using two-layer coding[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2008, 30(6):1032-1036.)
- [4] 杨莘元,杨林. 一种考虑互耦的自适应阵列综合方法[J]. 系统工程与电子技术, 2005, 27(12):1997-1999. (Yang S Y, Yang L. Pattern synthesis algorithm for adaptive arrays with mutual coupling[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2005, 27(12):1997-1999.)
- [5] 胡亮兵,刘宏伟,杨晓超,等. 集中式 MIMO 雷达发射方向图快速设计方法[J]. 电子与信息学报, 2010, 32(2):481-484. (Hu L B, Liu H W, Yang X C, et al. Fast transmit beam pattern synthesis for MIMO radar with collocated antennas[J]. *Journal of Electronics & Information*, 2010, 32(2):481-484.)
- [6] 张云峰,曹伟. 一种基于双正交模的新型天线阵方向图综合方法[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(8):1992-1996. (Zhang Y F, Cao W. A biorthogonal-mode based approach to pattern synthesis for array antennas[J]. *Journal of Electronics & Information*, 2007, 29(8):1992-1996.)
- [7] Zhao F, Cheng N Q. Genetic algorithm in the design of thinned arrays with low sidelobe levels[C]// *Proc. of the International Conference on Wireless Communications & Signal Processing*, 2009:1-4.
- [8] Son S H, Eom S Y, Jeon S I, et al. Automatic phase correction of phased array antennas by a genetic algorithm[J]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 2008, 56(8):2751-2754
- [9] Grubisic S, Carpes J W P, Bastos J P A. Optimization model for antenna positioning in indoor environments using 2-D ray-tracing technique associated to a real-coded genetic algorithm[J]. *IEEE Trans. on Magnetic*, 2009, 45(3):1626-1629.
- [10] Li W T, Liu S F, Shi X W, et al. Low-sidelobe pattern synthesis of spherical array using the hybrid genetic algorithm[J]. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2009, 51(4):1487-1491.
- [11] Mandal D, Ghoshal S K, Das S, et al. Improvement of radiation pattern for linear antenna arrays using genetic algorithm[C]// *Proc. of the International Conference on Recent Trends in Information, Telecommunication and Computing*, 2010:126-129.
- [12] 张杨,邓云凯. 基于遗传算法的星载合成孔径雷达天线方向图与模糊综合[J]. 电子与信息学报, 2006, 28(8):1472-1475. (Zhang Y, Deng Y K. Antenna pattern synthesis for ambiguity depressing in spaceborne SAR systems based on genetic algorithms[J]. *Journal of Electronics & Information*, 2006, 28(8):1472-1475.)
- [13] 路占波,孙丹,陈亚军. 遗传算法在共形天线阵方向图综合中的应用[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(5):1488-1491. (Lu Z B, Sun D, Chen Y J. Application of genetic algorithm to conformal antenna array pattern synthesis[J]. *Journal of System Simulation*, 2009, 21(5):1488-1491.)
- [14] Ismail T H, Hamici Z M. Array pattern synthesis using digital phase control by quantized particle swarm optimization[J]. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2010, 58(6):2142-2145.
- [15] 李东风,龚中麟. 遗传算法应用于超低副瓣线阵天线方向图综合[J]. 电子学报, 2003, 31(1):82-84. (Li D F, Gong Z L. Application of genetic algorithms in the pattern synthesis of ultra-low sidelobe linear array antenna[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2003, 31(1):82-84.)
- [16] Villegas F J. Parallel genetic-algorithm optimization of shaped beam coverage areas using planar 2-D phased array[J]. *IEEE Trans. on Antenna and Propagation*, 2007, 55(6):1745-1753.
- [17] Daniel W B, Douglas H W, David W M. A simultaneous parameter adaptation scheme for genetic algorithms with application to phased array synthesis[J]. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2005, 53(1):2142-2145.
- [18] Daniel W B, Douglas H W. Particle swarm optimization versus genetic algorithms for phased array synthesis[J]. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2004, 52(3):771-779.
- [19] 盛严慈,金荣洪. 基于方向图拓展和 FFT 的阵列快速综合法[J]. 电波科学学报, 2003, 18(5):540-544. (Sheng Y C, Jin R H. A speedy array pattern synthesis method based on pattern expansion and FFT[J]. *Chinese Journal of Radio Science*, 2003, 18(5):540-544.)
- [20] 李建新,陈瑞. 基于 FFT 平面相控阵天线方向图快速计算[J]. 微波学报, 2009, 25(6):12-17. (Li J X, Chen R. Fast computation of planar phased array pattern based on FFT[J]. *Journal of Microwaves*, 2009, 25(6):12-17.)