

受压正交异性矩形分层的屈曲和后屈曲

北方交通大学 费志中

BUCKLING AND POSTBUCKLING OF ORTHOTROPIC RECTANGULAR DELAMINATION UNDER COMPRESSION

Fei Zhizhong

(Northern Jiaotong University)

关键词 正交异性, 分层, 屈曲, 后屈曲。

Abstract The delamination in a laminate will buckle under a sufficiently large in-plane compression. The problems of buckling and postbuckling of clamped and simply supported orthotropic rectangular delamination for different material properties under compression have been solved by means of the force method in this paper. Some numerical results are given.

Key words orthotropic, delamination, buckling, postbuckling.

一、引言

为了给飞行器的设计提供理论依据, 采用力法分析了不同材料的受压固支、简支正交异性矩形分层模型的屈曲和后屈曲, 把一组非线性偏微分方程构成的边值问题化为求解一组非线性代数方程, 进而用梯度法解之, 最后给出有关的计算结果, 并说明了支承条件的影响。

二、理论分析

分层模型为一固支或简支正交异性矩形板, 如图1所示。设板的材料对称轴与板边平行, 沿板边 $x = 0$, a 及 $y = 0$, b 分别作用有单位长度压力 n_x 和 n_y 。

利用无量纲力函数 F 和挠度 W 可将控制板的后屈曲特性的无量纲偏微分方程表示为

$$C_5 W_{,cccc} + 2\lambda^2 C_6 W_{,cc\eta\eta} + \lambda^4 W_{,\eta\eta\eta\eta} \\ = \lambda^2 C_7 (W_{,cc} F_{,\eta\eta} + W_{,\eta\eta} F_{,cc} - 2W_{,c\eta} F_{,c\eta}) \quad (1a)$$

$$C_5 F_{,cccc} + 2\lambda^2 C_8 F_{,cc\eta\eta} + \lambda^4 F_{,\eta\eta\eta\eta} \\ = \lambda^2 C_9 (W_{,\xi\xi} - W_{,cc} W_{,\eta\eta}) \quad (1b)$$

式中各无量纲参数的定义已由文献[2]给出。

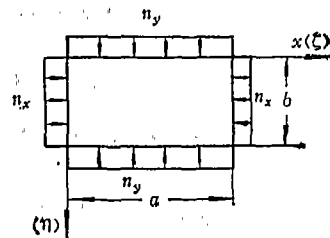


图1 载荷与尺寸

1987年9月17日收到

与上述方程组相对应的固支边界条件可在文献[2]中查到, 而简支边界条件则为

$$\left. \begin{aligned} \text{面内边界条件} \quad & F_{,\zeta\eta} = 0, \quad F_{,\eta\eta} = -R \quad \text{在 } \zeta = 0.1 \\ & F_{,\zeta\eta} = 0, \quad F_{,\zeta\zeta} = -\lambda^2 k R \quad \text{在 } \eta = 0.1 \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{横向位移边界条件} \quad & W = W_{,\zeta\zeta} = 0 \quad \text{在 } \zeta = 0.1 \\ & W = W_{,\eta\eta} = 0 \quad \text{在 } \eta = 0.1 \end{aligned} \right\} \quad (2b)$$

设满足上述边值问题的解 F 和 W 的形式为如下广义傅氏双级数

$$F = -\frac{R}{2}(\eta^2 + k\lambda^2\zeta^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} X_m(\zeta) Y_n(\eta) \quad (3a)$$

$$W = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} W_{pq} \phi_p(\zeta) \psi_q(\eta) \quad (3b)$$

其中, X_m, Y_n, ϕ_p, ψ_q 为梁的特征函数且有

$$X_m(\zeta) = \text{ch } \alpha_m \zeta - \cos \alpha_m \zeta - \gamma_m (\text{sh } \alpha_m \zeta - \sin \alpha_m \zeta) \quad (4a)$$

$$Y_n(\eta) = \text{ch } \alpha_n \eta - \cos \alpha_n \eta - \gamma_n (\text{sh } \alpha_n \eta - \sin \alpha_n \eta) \quad (4b)$$

$$\phi_p(\zeta) = A_p (\text{ch } \beta_p \zeta - \cos \beta_p \zeta) + B_p \text{sh } \beta_p \zeta + \sin \beta_p \zeta \quad (5a)$$

$$\psi_q(\eta) = A_q (\text{ch } \beta_q \eta - \cos \beta_q \eta) + B_q \text{sh } \beta_q \eta + \sin \beta_q \eta \quad (5b)$$

为使 F, W 满足边界条件, 在固支情况下, 式(4), 式(5)中的无量纲参数 $A_i, B_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 按文献[2]的规定选用; 在简支情况下, 除 α_i, γ_i 如上选用外, $A_i = 0, B_i = 0, \beta_i = i\pi$ 。

至此, 无论对于固支还是简支, $A_i, B_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 均已确定, 从而函数 X_m, Y_n, ϕ_p, ψ_q 就随之确定。因此, 如果求出了未知系数 F_{mn}, W_{pq} , 就能得到由式(3)所定义的解 F, W 。

把式(3)代入方程式(1), 用 $\varphi_i(\zeta)\psi_j(\eta)$ 乘以结果的两边, 从 0 到 1 对 ζ 和 η 积分, 利用特征函数的正交性后, 把所得表达式两边再除以 $H_i H_j$, 最后得到

$$\begin{aligned} & W_{ij} (C_5 \beta_i^4 + \lambda^4 \beta_j^4) + 2\lambda^2 C_6 \sum_p \sum_q W_{pq} \beta_p^2 \beta_q^2 K_1^{ip} L_1^{jq} \\ & - \lambda^2 C_7 \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s F_{mn} W_{rs} (\alpha_n^2 \beta_r^2 K_5^{imr} L_3^{jns} + \alpha_m^2 \beta_s^2 K_3^{imr} L_5^{jns}) \\ & - 2\alpha_m \alpha_n \beta_r \beta_s K_4^{imr} L_4^{jns} + \lambda^2 C_7 R \left(\sum_p W_{pj} \beta_p^2 K_1^{ip} + k\lambda^2 \sum_q W_{,j} \beta_q^2 L_1^{jq} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6a)$$

$i, j = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} & F_{ij} (C_5 \alpha_i^4 + \lambda^4 \alpha_j^4) + 2\lambda^2 C_8 \sum_m \sum_n F_{mn} \alpha_m^2 \alpha_n^2 K_5^{im} L_5^{jn} \\ & = \lambda^2 C_5 \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s W_{pq} W_{rs} (\beta_p \beta_q \beta_r \beta_s K_6^{ipr} L_6^{qs} - \beta_p^2 \beta_s^2 K_7^{ipr} L_7^{qs}) \end{aligned} \quad (6b)$$

$i, j = 1, 2, 3, \dots$

式中, 系数 K_1 到 K_7, L_1 到 L_7 的定义参见文献[2]; 固支下 $H_i = A_i^2$, 简支下 $H_i = 0.5$ 。

式(6a, 6b) 就是求解未知系数 F_{ij} 和 W_{ij} 的非线性代数方程组。

三、结果与说明

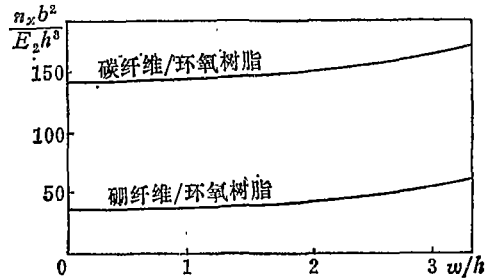
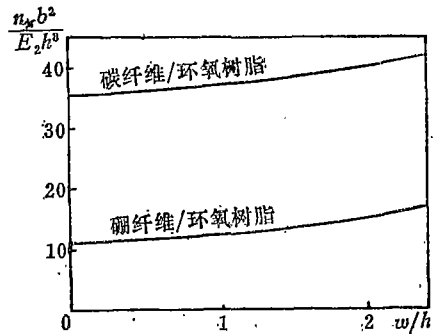
本文仅对承受沿 ζ 方向均匀单向压力的固支、简支正交异性矩形板进行了数值分析。板的材料分别是碳纤维/环氧树脂和碳纤维/环氧树脂, 它们的弹性常数已在文献[2]中列出。

无量纲临界屈曲载荷定义为 $R_{cr} = n_x b^2 / E_2 h^3$ 。

略去式(6a)中的非线性项后, 可得关于 R_{cr} 的特征方程。上述线性齐次方程组的最小特征值就是所要求的临界屈曲载荷。附表给出了方程(6a)中级数均取前4项(即 $i = j = 2$) 的数值解。

附表 无量纲临界屈曲载荷 R_{cr}

材 料	λ	$R_{cr}(i = j = 2)$	
		固支	简支
碳纤维/环氧树脂	1.0	40.09782	11.16279
	0.8	141.7975	35.83071
碳纤维/环氧树脂	0.8	216.9837	54.06861
	0.667	309.7081	76.56075
碳纤维/环氧树脂	0.5	546.7638	134.0633

图2 固支下 $R-w/h$ 曲线图3 简支下 $R-w/h$ 曲线

把式(6b)中系数 F_{ij} 用 W_{ij} 表示并代入式(6a), 得到关于 W_{ij} 的三次非线性代数方程组。用梯度法求解该方程组。在计算时, 仅取式(6a)中各级数的前4项考虑。图2、图3分别给出了沿 ζ 方向受均匀单向压力的不同材料正交异性固支、简支方板中点无量纲挠度 (w/h) 与无量纲载荷 ($R = n_x b^2 / (E_2 h^3)$) 之间的关系曲线。

附表说明, 无量纲临界屈曲载荷随着板长宽比 λ 的减小而增大, 这种变化是显著的。应指出, 表中固支与简支矩形板的屈曲载荷之比接近 4:1, 这一结果和固支与简支压杆的欧拉临界力之比是吻合的。

由图2、图3可见, 随着载荷的增大, 板中点的挠度逐渐增大而成为大变形, 且挠度与载荷呈非线性关系。

参 考 文 献

- 1 费志中 位移法解受压固支正交异性矩形分层的屈曲和后屈曲。应用力学学报, 1986, 3:(1)65—72
- 2 费志中 受压固支正交异性矩形分层的稳定性分析。航空学报, 1986, 7:(6)586—595