第9卷 第11期
1988年11月

航空学报
ACTA AERONAUTICA ET
ASTRONAUTICA SINICA

Vol. 9 No. 11
Nov. 1988

飞行器壁板颤振的无限维非线性分析

上海交通大学 郭乾荣

AN INFINITE DIMENSIONAL NONLINEAR ANALYSIS OF PANEL FLUTTER

Guo Qianrong

(*Shanghai Jiaotong University*)

关键词 翼板颤振，Hopf 分叉，中心流形。

Abstract The equation of motion of panel flutter is a nonlinear partial differential equation. It is usually treated approximately by a system of ordinary differential equations. In this paper the author makes an infinite dimensional nonlinear analysis for panel flutter: (1) using the infinite dimensional Hopf bifurcation theory to find the bifurcation values, and (2) using center manifold theory to determine the stability of the bifurcating periodic motions.

Key word panel flutter, hopf bifurcation, center manifold theory.

一、无限维Hopf 分叉定理和中心不变流形定理

由于偏微分方程的矢量场(在任一适当的 Banach 空间中)常常不是光滑函数，Marsden-McCracken[2]利用（相）流的光滑性提出了流的 Hopf 分叉定理和中心流形定理。这里的流都是半（相）流，也就是半群。

（1）流的 Hopf 分叉定理（Marsden-McCracken1976）

设在 Banach 空间E中依赖参数μ的演化方程为

$$dx/dt=A_\mu x+G_\mu(x)$$

E有c^∞非零范数，$G_\mu(x)$为非线性项。考虑一族c^0局部半流F_t^μ，定义在E中0的邻域，$0\leqslant t<T$，μ在R中0的邻域，且$F_t^\mu(0)=0$。

光滑假定 $F_t^\mu(x)$对x、t、$\mu(t\geqslant 0)$是联合连续；并且对每一$t>0$，$F_t^\mu(x)$对x是$c^{k+1}(k\geqslant 5)$可微。

谱假定：（1）$F_t^\mu(0)=0$，对$\forall t\in\{0,T\}$，$\forall\mu$在$O\in R$附近；（2）线性半群$D_xF_t^\mu(0)$(F_t^μ的*Frèchet* 导数)具有无限小生成元A_μ，且$\exp(t\sigma(A_\mu))=\sigma(D_xF_t^\mu(0))\backslash\{0\}$，对$\forall t>0$，($\sigma$为特征值)；（3）$A_\mu$有一对共轭复根$\lambda(\mu)$、$\overline{\lambda(\mu)}$，$\lambda(0)\times i\omega_0(\omega_0>0)$；且$[dRe\lambda(\mu)/d\mu]|_{\mu=0}>0$；（4）存在一个数$\delta>0$，使得对于0附近的$\mu$有$Re[\sigma(A_\mu)\backslash\{\lambda(\mu),\overline{\lambda(\mu)}\}]\leqslant-\delta<0$。

在上述诸假定下，F_t^μ在$\mu=0$有一Hopf 分叉；对$\mu>0$，存在关于F_t^μ的一族单

1987年6月27日收到

参数封闭轨线，这种封闭轨线随 μ 连续变化。

（2）流的中心流形定理（Marsden-Mc Cracken1976）

设 $\boldsymbol{E}$ 为 Banach 空间，具有 c^{∞} 非零范数。F_t 为定义在 $\boldsymbol{E}$ 中 0 的邻域上的半流，$0 \leqslant t \leqslant T$。设 $F_t(0)=0$，且 $F_t(x)$ 对 $x \in \boldsymbol{E}$ 是 c^{k+1} 可微的，对 x 的所有导数对 t 是连续的。假定线性半群 $DF_t(0)$：$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ 的谱是 $\exp(t(\sigma_1 \cup \sigma_2))$；对 $t>0$，$\exp(t\sigma_1)$ 在单位圆上（就是说 $Re(\sigma_1)=0$），$\exp(t\sigma_2)$ 在单位圆内，且距圆周有非零距离（就是说 $Re(\sigma_2)<0$）。令 Y 为对应于 $\exp(t\sigma_1)$ 的广义特征空间，且 $\dim Y = d < \infty$，则在 $\boldsymbol{E}$ 中存在 0 的一个邻域 u，和过 0 且切 Y 于 0 的一个 d 维 c^k 子流形 $\widetilde{M} \subset u$，使得：（a）若 $x \in \widetilde{M}$，$t>0$，且 $F_t(x) \in u$，则 $F_t(x) \in \widetilde{M}$（局部不变性）；（b）若 $t>0$，且对所有 t，$F_t(x)$ 在 u 中有定义；则 $F_t(x) \to \widetilde{M}$，当 $t \to \infty$（局部吸引性）。$\widetilde{M}$ 就称为中心（不变）流形。

二、翼板颤振的无限维非线性分析

设弹性翼板（如图 1）在 $Z=0$，1 简支（其它边界条件可类似进行计算），作“柱形”弯曲；在超音速气流下，运动方程（无量纲）为[3]

$$\ddot{v}+\sqrt{\rho}\,\delta\dot{v}+\rho v'+\alpha\dot{v}''''+v''''$$
$$=\left\{\Gamma+\kappa\int_0^1 (v'(Z))^2 dZ+\sigma\int_0^1 \dot{v}'(Z)v'(Z)dZ\right\}v'' \quad (1)$$

式中 $\cdot \equiv \partial/\partial t$；$' \equiv \partial/\partial z$；$\alpha$、$\sigma$ 为粘弹性结构阻尼系数；$\sqrt{\rho}\,\delta$ 为气动阻尼系数；κ 为薄膜刚度；ρ 为动压强；Γ 共面拉力；假定板的静压力差（常数）为零。α、σ、δ、κ 均 >0 的常数，控制参数 $\mu \in \{(\rho,\Gamma):\rho \geqslant 0\}$。$\mu=(\rho,\Gamma)-(\rho,\Gamma)_{cr}$，$cr$ 指临界值。

边界条件 $Z=0$，1，$v=(\dot{v}+\alpha v)''=0$

令 $u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \end{bmatrix} \in E = H_0^2([0,1]) \times L^2([0,1])$

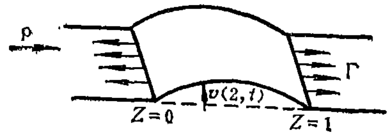

图 1　翼板在风洞中

这里 H_0^2 为二次可微函数 Соьолев 空间，L^2 为 Lebesgue 平方可积函数空间。取范数（L^2 范数 $1 \cdot 1^2$）

$$\|\{v,\dot{v}\}\|_E=(|\dot{v}|^2+|v''|^2)^{1/2}$$

则（1）式可写为 Banach 空间 $\boldsymbol{E}$ 中的演化方程

$$\dot{u}=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -Q_1 & -Q_2 \end{bmatrix}u+\begin{bmatrix} 0 \\ [\kappa\langle u_1',u_1'\rangle+\sigma\langle u_1',u_2'\rangle]u'' \end{bmatrix}$$
$$=A_\mu u+N_\mu(u) \quad (2)$$

其中

$$Q_1u_1=u_1''''-\Gamma u_1''+\rho u_1'$$
$$Q_2u_2=\alpha u_2''''+\sqrt{\rho}\,\delta u_2$$
$$f(u)=[\kappa\langle u_1',u_1'\rangle+\sigma\langle u_1',u_2'\rangle]u''$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 L^2 空间中内积。

边界条件 $Z=0$，1，$u_1=(u_2+\alpha u_1)''=0$

（1）运用Hopf分叉定理求发生颤振的分叉值

方程（2）存在唯一的光滑半流 F_t^{μ}[4]，其线性半流 $D_u F_t^{\mu}(0)$ 具有无限小生成元 A_μ。

求 A_μ 的特征值 λ：$(A_\mu - \lambda I)\tilde{x} = 0$

满足边界条件的特征矢量 $\tilde{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \sin n\pi z$，再以 $\sin n\pi z$ 乘上式，对 z 积分，得

$$\lambda^2 + \lambda(\alpha n^4\pi^4 + \sqrt{\rho}\,\delta) + (\Gamma n^2\pi^2 + n^4\pi^4) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

设发生分叉时，$n = m$，则

$$\alpha m^4\pi^4 + \sqrt{\rho_m}\,\delta = 0$$

这时，对于所有的 $1 \leqslant n < m$，$-\alpha n^4\pi^4 - \sqrt{\rho_m}\delta = (m^4 - n^4)\alpha\pi^4$，$\lambda$ 具有正实部。这不符合Hopf分叉定理的谱条件，故必须 $m = 1$，则

$$\sqrt{\rho_1} = -\alpha\pi^4/\delta$$

这时，$\lambda = \pm i\pi\sqrt{\Gamma_1 + \pi^2}$，故

$$\Gamma_1 > -\pi^2$$

还要满足 $n \geqslant 2$ 时，在分叉点 (ρ_1, Γ_1) 附近，其余的 λ 均负实部，则必须 $4(\Gamma n^2\pi^2 + n^4\pi^4) > 0$，这是满足的。故发生颤振时的分叉值

$$\rho_1 = \alpha^2\pi^8/\delta^2, \quad \Gamma_1 > -\pi^2$$

（2）应用中心流形定理并结合Hassard-Wan[5]方法，来讨论分叉周期解的稳定性

第一步先将方程（2）化为正则形式。

在分叉点 (ρ_1, Γ_1)，对应于 $A_{\mu=0}$：特征值 $\lambda_0 = i\omega_0 = i\pi\sqrt{\Gamma_1 + \pi^2}$，特征矢量 $q = \begin{bmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{bmatrix} \times \sin\pi Z$。

对应于 $A_{\mu=0}$ 的伴随算子 $A^* = \begin{bmatrix} 0 & -Q_1 \\ I & -Q_2 \end{bmatrix}$；特征值 $\bar{\lambda}_0 = -i\omega_0$，特征矢量 $q^* = \begin{bmatrix} 1 \\ i\omega_0/(\Gamma_1\pi^2 + \pi^4) \end{bmatrix} \sin\pi Z$。

令

$$u = yq + \bar{y}\bar{q} + w$$

其中　$y = \langle q^*, u\rangle \in C$

　　$w \in Y_s$ 局部稳定流形

　　$\{yq + \bar{y}\bar{q}\} = Y_c$ 中心流形，一个二维流形。

故

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= (y + \bar{y})\sin\pi z + w_1 \\ u_2 &= i\omega_0(y - \bar{y})\sin\pi z + w_2 \end{aligned}\right\}$$

代入方程（2），得正则形式

$$\left.\begin{aligned} \dot{y} &= i\omega_0 y + [q^*, N(yq + \bar{y}\bar{q} + w)] \\ \dot{w} &= A_{\mu=0}w + F(y, \bar{y}, w) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

其中
$$\langle q^*, N\rangle = -\frac{i\omega_0}{\Gamma_1^2\pi^2+\pi^4}\int_0^1 f\sin\pi z dz$$

$$F(y,\bar{y},w) = N - \langle q^*, N\rangle q - \langle \bar{q}^*, N\rangle \bar{q}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left(f - 2\sin\pi Z\int_0^1 f\sin\pi z dz\right)$$

中心流形方程为
$$w = \omega(y,\bar{y}) = \sum_{i+j=2}^{\infty} \frac{w_{ij}}{i!j!} y^i \bar{y}^j \tag{4}$$

中心流形上的微分方程为
$$\dot{y} = i\omega_0 y + \sum_{i+j=2}^{\infty} \frac{g_{ij}}{i!j!} y^i \bar{y}^j \tag{5}$$

为了确定式（4）、式（5）的系数 w_{ij} 和 g_{ij}，将式（3）中 $\langle q^*, N\rangle$ 和 F 按 y，$\bar{y}$ 展开，且 $\dot{w} = (\partial w/\partial y)dy/dt + (\partial w/\partial \bar{y})d\bar{y}/dt$。并假定 $\partial w/\partial y = 0(|y|^2)$。然后与式（4）、式（5）作比较，得
$$w = 0(|y|^3) \tag{6}$$
$$\dot{y} = i\omega_0 y + \sum_{2\leqslant i+j\leqslant 3} \frac{g_{ij}}{i!j!} y^i \bar{y}^j + 0(|y|^4) \tag{7}$$

其中　$g_{20} = 0$，$g_{11} = 0$，$g_{02} = 0$，

$g_{21} = (3i\omega_0\kappa\pi^4)/2(\Gamma_1^2\pi^2+\pi^4) - \sigma\pi^4/2$，（其余 g_{ij} 无用，不算了）。

最后将式（7）化为 Poincaré 范式：

令 $y = \xi + \chi(\xi,\bar{\xi}) = \xi + \sum_{2\leqslant i+j\leqslant 2n} \chi \frac{\xi^i \bar{\xi}^j}{i!j!}$

对 $i = j+1$，$\chi_{ij} \equiv 0$。代入式（7），得中心流形上微分方程的 Poincaré 范式
$$\dot{\xi} = i\omega_0\xi + \sum_{j=1}^{n} c_j \xi|\xi|^{2j} + 0(|\xi|^{2n+2}) \tag{8}$$

其中
$$c_1 = \frac{i}{2\omega_0}\left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2\right) + \frac{g_{21}}{2}$$

由 Poincare-Bendixson 定理

$Rec_1 < 0$，周期解为轨道渐近稳定

$Rec_1 > 0$，周期解不稳定

计算得
$$c_1 = 0 + \frac{g_{21}}{2} = \frac{3i\omega_0}{4(\Gamma_1^2\pi^2+\pi^4)}\kappa\pi^4 - \frac{1}{4}\sigma\pi^4$$

故　$Rec_1 < 0$，分叉周期解（颤振）轨道稳定。

参考文献

〔1〕郭乾荣。微分拓扑在非线性动力学中的应用。第一届全国《近代数学和力学》大会报告，1986

〔2〕Marsden J E McCracken. The Hopf Bifnrcation and its Applications, Appl. Math. Sci., Springer 1976; 19

〔3〕Dowell E H. Aeroelasticity of plates and shells. Noordhoff, Leyden 1975

〔4〕Holmes P J, Marsden J E. Bifurcation to Divergence and Flutter in Flow-induced Oscillations: An Infinite Dimensional Analysis. Automatica, 1978; 14: (4)367-387

〔5〕Hassard B D, Wan Y H. Bifurcation Formulae Derived from Center Manifold Theory. J. Math. Anal. Appl., 1978; 63: (1)297-332