文章编号：1001-506X(2011)08-1865-06

区间时滞相关不确定奇异系统的鲁棒稳定性和镇定性

张利军，赵杰梅

（哈尔滨工程大学自动化学院，黑龙江 哈尔滨 150001）

摘 要：研究区间时滞相关的不确定时变时滞奇异系统的鲁棒稳定性和镇定性问题，不确定参数假设是范数有界的。充分利用时滞的下界信息构造 Lyapunov 函数，用严格的矩阵不等式给出系统对所有的容许不确定满足正则、无脉冲、稳定的新判据。基于这个判据，设计状态反馈控制器使得系统鲁棒稳定。数值例子说明所得结果具有更小的保守性。

关键词：奇异系统；区间时滞相关；时变时滞；鲁棒镇定；线性矩阵不等式

中图分类号：TP 273；TP 13 **文献标志码**：A **DOI**：10.3969/j.issn.1001-506X.2011.08.35

Delay-range-dependent robust stability and stabilization for uncertain singular systems

ZHANG Li-jun, ZHAO Jie-mei

(*College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

Abstract: This paper deals with the problem of robust stability and robust stabilization for uncertain singular systems with time-varying delay in a range. The parametric uncertainty is assumed to be norm bounded. The information of the lower bound of delay is applied to construct Lyapunov functional. A new criterion for the uncertain singular system to be regular, impulse free and stable is proposed in terms of a strict linear matrix inequality for all admissible uncertainties. Based on this criterion, robust stabilization is solved via designing a state feedback control law. Numerical examples are proposed to illustrate that the obtained results have less conservatism.

Keywords: singular system; delay-range-dependent; time-varying delay; robust stabilization; linear matrix inequality (LMI)

0 引 言

近年来，奇异系统理论在电力系统、电路、神经网络、石油催化裂化等科学技术及大型工程的众多领域中得到广泛应用[1-2]。奇异系统又称为描述系统、广义系统、隐式系统及半状态系统[3-4]，它是具有比正常系统更广泛形式的一类动力系统。由于考虑奇异系统的稳定性的同时还需要考虑系统的正则性和无脉冲性，所以奇异系统的理论研究比正常系统更具有挑战性，成为系统理论研究的一个热点[6-22]。在这其中，研究时滞奇异系统的鲁棒稳定性问题更加受到学者们的关注。这里主要包含两方面的研究内容：一方面是时滞大小对系统稳定性的影响问题，即时滞无关稳定性和时滞相关稳定性问题；另一方面是在保证稳定性情况下的时滞最大化问题。本文属于后者。

研究时滞系统稳定性的关键是 Lyapunov 函数的构造，它将直接影响研究结果的优劣性。最近，一种自由权矩阵的方法在时滞相关系统的理论研究中被提出[6]，该方法通过增加矩阵不等式的参数来降低所构造 Lyapunov 函数带来的保守性。文献[7]把自由权矩阵方法应用到研究连续奇异时滞系统的正则性、无脉冲性和稳定性问题研究中，但所设时滞的下界是零。由于实际问题中时滞下界常常不是零，所以文献[8]提出区间时变时滞方法，此方法充分利用时滞下界的信息构造 Lyapunov 函数，所以保守性较小。这种区间时滞方法不仅在线性系统中，而且在奇异系统中得到了广泛的推广[9-13]。如文献[10]用三重积分构造 Lyapunov函数，研究区间时滞相关线性系统的稳定性；文献[11]考虑的是奇异时滞系统区间时滞相关的 H_∞ 控制问题；文献[12]用线性矩阵不等式给出了区间多时变时滞奇异系统是正则、无脉冲和稳定的充分条件，但矩阵不等式是不严格的，因此不容易用计算机实现。

收稿日期：2010-06-13；**修回日期**：2011-03-22。

基金项目：国家自然科学基金(G60704004)资助课题

作者简介：张利军(1973-)，男，教授，博士，主要研究方向为非线性系统控制、奇异系统理论研究。E-mail：zhanglj@hrbeu.edu.cn

本文研究了区间时滞相关的不确定时变时滞奇异系统鲁棒稳定性和镇定性问题，充分利用时滞的下界信息构造 Lyapunov 函数，结合自由权矩阵的思想，用严格的矩阵不等式给出奇异时滞系统正则、无脉冲和稳定的充分条件，并基于这个条件设计状态反馈控制律使得系统鲁棒稳定。数值例子说明，利用上述方法，不但能够保证系统的鲁棒稳定性，而且能够扩张系统的时滞空间。

在文中，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置；$\boldsymbol{P}>0(\boldsymbol{P}\geqslant 0)$ 表示 $\boldsymbol{P}$ 是正定(半正定)对称矩阵；$\mathbf{R}^{n\times n}$ 表示实数域上 $n\times n$ 矩阵空间；$\|\boldsymbol{x}\|$ 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的欧式范数，即 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$；$\begin{bmatrix}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y}\\ * & \boldsymbol{Z}\end{bmatrix}$ 表示 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Z}\end{bmatrix}$。

1 问题描述与预备知识

考虑如下形式的不确定奇异时滞系统：

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{A}_d+\Delta\boldsymbol{A}_d)\boldsymbol{x}(t-d(t))+(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}(t) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\varphi(t),\ t\in[-h_2,0] \tag{2}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 是状态向量；$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 是控制输入；$\boldsymbol{d}(t)$ 是时变时滞；$\boldsymbol{E}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是奇异矩阵且 rank $(\boldsymbol{E})=r<n$；$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}_d$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是适当维数的常数矩阵；$\varphi(t)$ 是连续的相容初始函数。

为了得到主要结论，本文有以下假设。

假设 1 时变时滞满足 $h_1\leqslant d(t)\leqslant h_2$，$0\leqslant h_1<h_2$，$0\leqslant \dot{d}(t)\leqslant\tau<1$，其中 h_1、h_2 和 τ 都是非负常数。

假设 2 参数不确定项 $\Delta\boldsymbol{A}$、$\Delta\boldsymbol{A}_d$ 和 $\Delta\boldsymbol{B}$ 有如下形式

$$[\Delta\boldsymbol{A}\quad \Delta\boldsymbol{A}_d\quad \Delta\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{M}\boldsymbol{F}(\sigma)[\boldsymbol{N}_a\quad \boldsymbol{N}_d\quad \boldsymbol{N}_b] \tag{3}$$

式中，$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}_a$、$\boldsymbol{N}_d$、$\boldsymbol{N}_b$ 是已知适当维数的常数矩阵；不确定矩阵 $\boldsymbol{F}(\sigma)$ 是满足

$$\boldsymbol{F}(\sigma)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\sigma)\leqslant\boldsymbol{I} \tag{4}$$

的未知矩阵函数，$\sigma\in\Sigma$，Σ 是一个紧集。如果式(3)和式(4)成立，称 $\Delta\boldsymbol{A}$、$\Delta\boldsymbol{A}_d$ 和 $\Delta\boldsymbol{B}$ 是容许的。

定义 1[3-4]

(1) 矩阵对 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$ 是正则的，如果存在常数 s 使得 det $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 不恒为零。

(2) 矩阵对 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$ 是无脉冲的，如果正则并且 deg (det $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$)= rank $(\boldsymbol{E})$。

(3) 矩阵对 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$ 是稳定的，如果正则并且 det $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ 的所有特征值具有负实部。

系统(1)的标称系统：

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-d(t)) \tag{5}$$

对于系统(5)，给出下面定义。

定义 2[15]

(1) 奇异系统(5)是正则、无脉冲的，如果矩阵对 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$ 是正则、无脉冲的。

(2) 奇异系统(5)是稳定的，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$ 使得对任意的相容初始条件 $\varphi(t)$ 满足 $\sup\limits_{-d(t)\leqslant t\leqslant 0}\|\varphi(t)\|\leqslant\delta(\varepsilon)$，系统(5)的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足对任意的 $t\geqslant 0$ 有 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\varepsilon$，即 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=0$。

本文中，对不确定奇异时滞系统(1)使用如下鲁棒稳定和鲁棒镇定的定义。

定义 3[15] 不确定奇异时滞系统(1)是鲁棒稳定的，如果 $\boldsymbol{u}(t)=0$ 时系统(1)对所有容许的不确定 $\Delta\boldsymbol{A}$ 和 $\Delta\boldsymbol{A}_d$ 是正则、无脉冲和稳定的。

定义 4[15] 不确定奇异时滞系统(1)是鲁棒镇定的，如果存在线性状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{K}\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 使得对应的闭环系统在定义 3 意义下是鲁棒稳定的。

引理 1[23] 给定适当维数的矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$、$\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{\Xi}$，其中 $\boldsymbol{\Omega}$ 是对称矩阵，则

$$\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{F}(\sigma)\boldsymbol{\Xi}+(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{F}(\sigma)\boldsymbol{\Xi})^{\mathrm{T}}<0$$

对所有的满足 $\boldsymbol{F}(\sigma)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\sigma)\leqslant\boldsymbol{I}$ 的矩阵 $\boldsymbol{F}(\sigma)$ 成立当且仅当存在一个常数 $\varepsilon>0$，使得

$$\boldsymbol{\Omega}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}<0$$

本文主要目的是找出时滞允许的最大上界 h_2，使得区间时滞相关不确定时变时滞奇异系统是鲁棒稳定的。

2 主要结果

下面讨论区间时滞相关时变时滞奇异系统(5)正则、无脉冲和稳定的充分条件。

定理 1 对于给定的数值 $0\leqslant h_1<h_2$，$0\leqslant\tau<1$，系统(5)是正则、无脉冲、稳定的，如果存在矩阵 $\boldsymbol{P}>0$，$\boldsymbol{Q}_1\geqslant 0$，$\boldsymbol{Q}_2\geqslant 0$，$\boldsymbol{Q}_3\geqslant 0$，$\boldsymbol{Z}_1>0$，$\boldsymbol{Z}_2>0$ 和矩阵 $\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{S}_d$、$\boldsymbol{S}_i$、$\boldsymbol{M}_i$、$\boldsymbol{N}_i$ $(i=1,2)$，使得

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma} & h_2 N & h_{12}\bar{\boldsymbol{S}} & h_{12}\boldsymbol{M} & \bar{\boldsymbol{A}}\\ * & -h_2\boldsymbol{Z}_1 & 0 & 0 & 0\\ * & * & -h_{12}(\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2) & 0 & 0\\ * & * & * & -h_{12}\boldsymbol{Z}_2 & 0\\ * & * & * & * & -\boldsymbol{U}\end{bmatrix}<0 \tag{6}$$

式中

$$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix}\Psi_{11} & \Psi_{12} & \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{E}\\ * & \Psi_{22} & \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{E}\\ * & * & -\boldsymbol{Q}_1 & 0\\ * & * & * & -\boldsymbol{Q}_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_1\\ \boldsymbol{N}_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{S}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_1\\ \boldsymbol{S}_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1\\ \boldsymbol{M}_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\Psi_{11}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2+\boldsymbol{Q}_3+\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}}$$

$$\Psi_{12}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}_d^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_d+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}-$$

$$N_1 E + S_1 E - M_1 E$$

$$\Psi_{22} = -(1-\tau)Q_3 + A_d^{\mathrm{T}} R S_d^{\mathrm{T}} + S_d R^{\mathrm{T}} A_d +$$

$$S_2 E + E^{\mathrm{T}} S_2^{\mathrm{T}} - N_2 E - E^{\mathrm{T}} N_2^{\mathrm{T}} - M_2 E - E^{\mathrm{T}} M_2^{\mathrm{T}}$$

$$U = h_2 Z_1 + h_{12} Z_2,\ h_{12} = h_2 - h_1$$

并且 R 是满足 $E^{\mathrm{T}}R=0$ 的任意列满秩矩阵。

证明 设 rank $(E)=r<n$,则一定存在非奇异矩阵 M 和 N 使得

$$\hat{E} = MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

则 $R=M^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 \\ \Theta \end{bmatrix}$,$\Theta\in\mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ 是任意非奇异矩阵。

令

$$\hat{A} = MAN = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$\hat{P} = M^{-\mathrm{T}} P M^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{13} & P_{14} \end{bmatrix},$$

$$\hat{N}_1 = M^{-\mathrm{T}} N_1 N = \begin{bmatrix} N_{1,11} & N_{1,12} \\ N_{1,21} & N_{1,22} \end{bmatrix},\ \hat{S} = N^{\mathrm{T}} S = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{bmatrix} \tag{8}$$

由于 $\Psi<0, Q_i\geqslant 0(i=1,2,3)$,所以

$$\Xi = E^{\mathrm{T}}PA + A^{\mathrm{T}}PE + SR^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}RS^{\mathrm{T}} +$$

$$N_1 E + E^{\mathrm{T}} N_1^{\mathrm{T}} < 0$$

把 Ξ 左乘矩阵 N^{T},右乘矩阵 N,并且把式(7)和式(8)代入

$$\hat{\Xi} = N^{\mathrm{T}} \Xi N =$$

$$\hat{E}^{\mathrm{T}}\hat{P}\hat{A} + \hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{P}\hat{E} + \hat{S}\hat{R}^{\mathrm{T}}\hat{A} + \hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{R}\hat{S}^{\mathrm{T}} + \hat{N}_1\hat{E} + \hat{E}_1^{\mathrm{T}}\hat{N}_1^{\mathrm{T}} =$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Xi}_{11} & \hat{\Xi}_{12} \\ \hat{\Xi}_{21} & A_{22}^{\mathrm{T}}\Theta S_{21}^{\mathrm{T}} + S_{21}\Theta^{\mathrm{T}}A_{22} \end{bmatrix} < 0$$

这里 $\hat{\Xi}_{11}$、$\hat{\Xi}_{12}$、$\hat{\Xi}_{21}$ 是与讨论无关的矩阵。则

$$A_{22}^{\mathrm{T}}\Theta S_{21}^{\mathrm{T}} + S_{21}\Theta^{\mathrm{T}}A_{22} < 0 \tag{9}$$

所以 A_{22} 可逆。若 A_{22} 不可逆,则一定存在非零向量 $\xi\in\mathbf{R}^{n-r}$,使得 $A_{22}\xi=0$。则 $\xi^{\mathrm{T}}(A_{22}^{\mathrm{T}}\Theta S_{21}^{\mathrm{T}}+S_{21}\Theta^{\mathrm{T}}A_{22})\xi=0$,与式(9)矛盾,所以 A_{22} 可逆,则矩阵对(E,A)正则、无脉冲。根据定义 2,则系统(5)正则、无脉冲。

下证系统(5)是稳定的。

构造如下 Lyapunov 函数:

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(x)$$

$$V_1(x) = x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}PEx(t)$$

$$V_2(x) = \sum_{i=1}^{2}\int_{t-h_i}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Q_i x(s)\mathrm{d}s + \int_{t-d(t)}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Q_3 x(s)\mathrm{d}s$$

$$V_3(x) = \int_{-h_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}Z_1 E\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta +$$

$$\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}Z_2 E\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$

则

$$\dot{V}_1(x) = 2[Ax(t) + A_d x(t-d(t))]^{\mathrm{T}} PEx(t) \tag{10}$$

$$\dot{V}_2(x) = x^{\mathrm{T}}(t)(Q_1+Q_2)x(t) - x^{\mathrm{T}}(t-h_1)Q_1 x(t-h_1) -$$

$$x^{\mathrm{T}}(t-h_2)Q_2 x(t-h_2) + x^{\mathrm{T}}(t)Q_3 x(t) -$$

$$(1-\dot{d}(t))x^{\mathrm{T}}(t-d(t))Q_3 x(t-d(t)) \tag{11}$$

$$\dot{V}_3(x) = \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}(h_2 Z_1 + h_{12}Z_2)E\dot{x}(t) + \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 \tag{12}$$

式中

$$\Omega_1 = -\int_{t-d(t)}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}Z_1 E\dot{x}(s)\mathrm{d}s,$$

$$\Omega_2 = -\int_{t-h_2}^{t-d(t)} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}(Z_1+Z_2)E\dot{x}(s)\mathrm{d}s,$$

$$\Omega_3 = -\int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}Z_2 E\dot{x}(s)\mathrm{d}s$$

根据 Newton-Leibniz 公式,有

$$\Omega_1 = -\int_{t-d(t)}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}Z_1 E\dot{x}(s)\mathrm{d}s +$$

$$2[x^{\mathrm{T}}(t)N_1 + x^{\mathrm{T}}(t-d(t))N_2]\times$$

$$[Ex(t) - Ex(t-d(t)) - \int_{t-d(t)}^{t} E\dot{x}(s)\mathrm{d}s] =$$

$$\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{\Omega}_1\xi(t) + \int_{t-d(t)}^{t}[\xi^{\mathrm{T}}(t)N + \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}Z_1]Z_1^{-1}\times$$

$$[\xi^{\mathrm{T}}(t)N + \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}Z_1]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s \leqslant \xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{\Omega}_1\xi(t) \tag{13}$$

式中

$$\bar{\Omega}_1 = h_2 N Z_1^{-1} N_2^{\mathrm{T}} - \int_{t-d(t)}^{t} NE\dot{x}(s)\mathrm{d}s$$

$$\Omega_2 = -\int_{t-h_2}^{t-d(t)} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}(Z_1+Z_2)E\dot{x}(s)\mathrm{d}s +$$

$$2[x^{\mathrm{T}}(t)S_1 + x^{\mathrm{T}}(t-d(t))S_2]\times$$

$$[Ex(t-d(t)) - Ex(t-h_2) - \int_{t-h_2}^{t-d(t)} E\dot{x}(s)\mathrm{d}s] =$$

$$\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{\Omega}_2\xi(t) - \int_{t-h_2}^{t-d(t)}[\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{S} + \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}(Z_1+Z_2)]\times$$

$$(Z_1+Z_2)^{-1}[\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{S} + \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}(Z_1+Z_2)]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{\Omega}_2\xi(t) \tag{14}$$

式中

$$\bar{\Omega}_2 = h_{12}\bar{S}(Z_1+Z_2)^{-1}\bar{S}^{\mathrm{T}} - \int_{t-h_2}^{t-d(t)} \bar{S}E\dot{x}(s)\mathrm{d}s$$

$$\Omega_3 = -\int_{t-d(t)}^{t-h_1} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}Z_2 E\dot{x}(s)\mathrm{d}s +$$

$$2[x^{\mathrm{T}}(t)M_1 + x^{\mathrm{T}}(t-d(t))M_2]\times$$

$$[Ex(t-h_1) - Ex(t-d(t)) - \int_{t-d(t)}^{t-h_1} E\dot{x}(s)\mathrm{d}s] =$$

$$\xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{\Omega}_3\xi(t) - \int_{t-d(t)}^{t-h_1}[\xi^{\mathrm{T}}(t)M + \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}Z_2]\times$$

$$Z_2^{-1}[\xi^{\mathrm{T}}(t)M + \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}Z_2]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s \leqslant \xi^{\mathrm{T}}(t)\bar{\Omega}_3\xi(t) \tag{15}$$

式中

$$\bar{\Omega}_3 = h_{12} M Z_2^{-1} M^{\mathrm{T}} - \int_{t-d(t)}^{t-h_1} ME\dot{x}(s)\mathrm{d}s$$

由于 $E^{\mathrm{T}}R=0$,所以存在矩阵 S 和 S_d 使得

$$0=2\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{S}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t-d(t))] \tag{16}$$

把式(10)～式(16)左右两端分别相加，则

$$\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x})\leqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{\Gamma}+\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\bar{\boldsymbol{A}}+h_2\boldsymbol{N}\boldsymbol{Z}_1^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}+$$
$$h_{12}\bar{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2)^{-1}\bar{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{T}}+h_{12}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Z}_2^{-1}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{\xi}(t)\leqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\xi}(t)$$

式中

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d(t))\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_1)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_2)]^{\mathrm{T}}$$

根据式(6)，可得 $\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x})<0$。

由于

$$\lambda_1\ \|\boldsymbol{x}(t)\|^2-\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(0))\leqslant$$
$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(0))\leqslant\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))-\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(0))=$$
$$\int_0^t\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s\leqslant-\lambda_2\int_0^t\|\boldsymbol{x}(s)\|^2\mathrm{d}s<0$$

即

$$\lambda_1\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+\lambda_2\int_0^t\|\boldsymbol{x}(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(0))$$

式中，$\lambda_1=\lambda_{\min}(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E})>0$，$\lambda_2=-\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Psi})>0$。

因此

$$0<\|\boldsymbol{x}(t)\|^2\leqslant\frac{1}{\lambda_1}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(0)),$$
$$0<\int_0^t\|\boldsymbol{x}(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{\lambda_2}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(0))$$

即 $\|\boldsymbol{x}(t)\|$ 和 $\int_0^t\|\boldsymbol{x}(s)\|^2\mathrm{d}s$ 都有界。同理可得 $\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|$ 有界。则 $\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|^2$ 一致连续，根据 Barbalat 引理，得 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=0$。由定义 2，奇异时滞系统(5)是稳定的。 证毕

注 1 定理 1 中，若 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{I}$，能得到文献[8]的定理 1。

注 2 文献[12]的推论 6 中，当 $\alpha\to0^+$ 时，用 LMI 给出系统(5)正则、无脉冲和稳定的充分条件，但是 LMI 不是严格的，本文定理 1 用一个严格 LMI 给出系统(5)正则、无脉冲、稳定的充分条件，易于用计算机实现。

注 3 定理 1 中，令 $\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{M}_2=\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{S}_2=0$，$h_1=0$，$\tau=0$，$\boldsymbol{Q}_1=\varepsilon_1\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{Q}_2=\varepsilon_2\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{Z}_2=\varepsilon_3\boldsymbol{I}$，$\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$ 和 ε_3 是充分小的正数，可得文献[16]中的定理 1。

当 $\Delta\boldsymbol{A},\Delta\boldsymbol{B},\Delta\boldsymbol{A}_d=0$ 时，不确定奇异时变时滞系统(1)在控制律 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$ 的作用下的闭环系统为

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-d(t)) \tag{17}$$

对这个系统有下面的定理。

定理 2 对于给定的数值 $0\leqslant h_1<h_2$，$0\leqslant\tau<1$，奇异时变时滞系统(11)是鲁棒镇定的，如果存在矩阵 $\boldsymbol{P}>0$，$\boldsymbol{Q}_1\geqslant0$，$\boldsymbol{Q}_2\geqslant0$，$\boldsymbol{Q}_3\geqslant0$，$\boldsymbol{Z}_1>0$，$\boldsymbol{Z}_2>0$ 和矩阵 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{S},\boldsymbol{L},\boldsymbol{S}_i,\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{N}_i(i=1,2)$ 使得如下的不等式成立：

$$\boldsymbol{\Upsilon}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Upsilon}_{11} & \boldsymbol{\Upsilon}_{12} & \boldsymbol{\Upsilon}_{13} & \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{E} & h_2\boldsymbol{N}_1 & h_{12}\boldsymbol{S}_1 & h_{12}\boldsymbol{M}_1 & 0\\ * & \boldsymbol{\Upsilon}_{22} & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{U}\\ * & * & \boldsymbol{\Upsilon}_{33} & \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{E} & h_2\boldsymbol{N}_2 & h_{12}\boldsymbol{S}_2 & h_{12}\boldsymbol{M}_2 & 0\\ * & * & * & -\boldsymbol{Q}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -\boldsymbol{Q}_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -h_2\boldsymbol{Z}_1 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -h_{12}(\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2) & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -h_{12}\boldsymbol{Z}_2 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{U}\end{bmatrix}<0 \tag{18}$$

式中

$$\boldsymbol{\Upsilon}_{11}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2+$$
$$\boldsymbol{Q}_3+\boldsymbol{E}\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\Upsilon}_{12}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{L},$$
$$\boldsymbol{\Upsilon}_{22}=-\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\Upsilon}_{13}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\Upsilon}_{33}=-(1-\tau)\boldsymbol{Q}_3+\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-$$
$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E}\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{U}$ 和 h_{12} 是定理 1 中定义的，并且 $\boldsymbol{R}$ 是任意列满秩矩阵，满足 $\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}=0$，状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$。

证明 系统(17)可以表示成如下形式：

$$\bar{\boldsymbol{E}}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\bar{\boldsymbol{A}}_d\bar{\boldsymbol{x}}(t-d(t)) \tag{19}$$

式中

$$\bar{\boldsymbol{E}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{A}}_d=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \boldsymbol{A}_d & 0\end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{bmatrix}$$

根据定理 1 的结果，如果式(6)中用 $\bar{\boldsymbol{E}},\bar{\boldsymbol{A}},\bar{\boldsymbol{A}}_d,\bar{\boldsymbol{P}},\bar{\boldsymbol{Q}}_1,\bar{\boldsymbol{Q}}_2,\bar{\boldsymbol{Q}}_3,\tilde{\boldsymbol{S}},\bar{\boldsymbol{S}}_d,\bar{\boldsymbol{Z}}_i,\bar{\boldsymbol{N}}_i,\bar{\boldsymbol{M}}_i,\bar{\boldsymbol{S}}_i(i=1,2)$ 代替 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_d,\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{Q}_3,\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}_d,\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{N}_i,\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{S}_i(i=1,2)$，则系统(19)是鲁棒稳定的，其中

$$\bar{\boldsymbol{P}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & 0\\ 0 & \alpha\boldsymbol{I}\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{R}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & 0\\ 0 & \boldsymbol{X}\end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{S}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S} & \boldsymbol{I}\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{Q}}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_1 & 0\\ 0 & \alpha\boldsymbol{I}\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{Q}}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_2 & 0\\ 0 & \alpha\boldsymbol{I}\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{Q}}_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_3 & 0\\ 0 & \alpha\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{Z}}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_i & 0\\ 0 & \alpha\boldsymbol{I}\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{M}}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_i & 0\\ 0 & \alpha\boldsymbol{I}\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{S}}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_i & 0\\ 0 & \alpha\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{N}}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_i & 0\\ 0 & \alpha\boldsymbol{I}\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{S}}_d=0,\ i=1,2,\ \bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{R}}=0$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 是可逆矩阵。则根据 Schur 补，令 $\alpha\to0$，有

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_{11} & \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_{12} & \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_{13} & \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{E} & h_2\boldsymbol{N}_1 & h_{12}\boldsymbol{S}_1 & h_{12}\boldsymbol{M}_1 & 0 \\ * & \boldsymbol{\Upsilon}_{22} & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{U} \\ * & * & \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_{33} & \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{E} & h_2\boldsymbol{N}_2 & h_{12}\boldsymbol{S}_2 & h_{12}\boldsymbol{M}_2 & 0 \\ * & * & * & -\boldsymbol{Q}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\boldsymbol{Q}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -h_2\boldsymbol{Z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -h_{12}(\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2) & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -h_{12}\boldsymbol{Z}_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{U} \end{bmatrix} < 0 \tag{20}$$

$$\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_{11} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}) + \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2 + \boldsymbol{Q}_3 + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{E}$$

$$\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_{12} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{SR}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} + (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$$

$$\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_{13} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{E} + \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{E} - \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{E}$$

$$\bar{\boldsymbol{\Lambda}}_{33} = -(1-\tau)\boldsymbol{Q}_3 + \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{N}_2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}$$

考虑下面的奇异时变时滞系统：

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}(t-d(t)) \tag{21}$$

式中，$\boldsymbol{\eta}(t)\in\mathbf{R}^n$ 是状态向量。

系统(21)正则、无脉冲、稳定的充分必要条件是系统(17)正则、无脉冲、稳定，所以以下考虑系统(21)。把式(20)中的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}$、$\boldsymbol{A}_d$ 用 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}$、$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}$ 代替并且在控制律 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{LX}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ 作用下，满足式(18)的系统(17)是鲁棒镇定的。　　证毕

注 4　在定理 2 中，令 $\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{M}_2=\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{S}_2=0, h_1=0, \tau=0, \boldsymbol{Q}_1=\varepsilon_1\boldsymbol{I}, \boldsymbol{Q}_2=\varepsilon_2\boldsymbol{I}, \boldsymbol{Z}_2=\varepsilon_3\boldsymbol{I}, \varepsilon_i(i=1,2,3)$ 是充分小的正数，可得到文献[16]中的定理 2。

下面给出不确定时变时滞奇异系统(1)鲁棒镇定的充分条件。

定理 3　考虑不确定时变时滞奇异系统(1)，对于给定的数值 $0\leqslant h_1<h_2$，$0\leqslant\tau<1$，如果存在矩阵 $\boldsymbol{P}>0, \boldsymbol{Q}_1\geqslant 0, \boldsymbol{Q}_2\geqslant 0, \boldsymbol{Q}_3\geqslant 0, \boldsymbol{Z}_1>0, \boldsymbol{Z}_2>0$，矩阵 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{S}_i, \boldsymbol{M}_i, \boldsymbol{N}_i(i=1,2)$ 和常数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2>0$ 使得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Upsilon} & \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{\Gamma}_2 & \varepsilon_1\boldsymbol{\Xi}_1^{\mathrm{T}} & \varepsilon_2\boldsymbol{\Xi}_2^{\mathrm{T}} \\ * & -\varepsilon_1\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_2\boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2\boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{22}$$

式中，$\boldsymbol{U}$ 和 h_{12} 是定理 1 中定义的，$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{\Upsilon}_{12}$、$\boldsymbol{\Upsilon}_{13}$、$\boldsymbol{\Upsilon}_{21}$ 和 $\boldsymbol{\Upsilon}_{22}$ 分别是定理 2 中定义的。则在控制律 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{LX}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ 作用下，对所有容许的不确定闭环系统是鲁棒稳定的。

证明　式(18)中分别用 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{MF}(\sigma)\boldsymbol{N}_a$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{MF}(\sigma)\boldsymbol{N}_d$，$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{MF}(\sigma)\boldsymbol{N}_b$ 代替 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}_d$、$\boldsymbol{B}$。应用 Schur 补，等价于

$$\boldsymbol{\Upsilon} + \boldsymbol{\Gamma}_1\boldsymbol{F}(\sigma)\boldsymbol{\Xi}_1 + (\boldsymbol{\Gamma}_1\boldsymbol{F}(\sigma)\boldsymbol{\Xi}_1)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Gamma}_2\boldsymbol{F}(\sigma)\boldsymbol{\Xi}_2 + (\boldsymbol{\Gamma}_2\boldsymbol{F}(\sigma)\boldsymbol{\Xi}_2)^{\mathrm{T}} < 0$$

式中

$$\boldsymbol{\Gamma}_1 = [\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Xi}_1 = [\boldsymbol{N}_a\boldsymbol{X}+\boldsymbol{N}_b\boldsymbol{L}\ \ \ \boldsymbol{N}_a\boldsymbol{X}+\boldsymbol{N}_b\boldsymbol{L}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0],$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_2 = [0\ \ 0\ \ \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Xi}_2 = [\boldsymbol{N}_d\boldsymbol{X}\ \ \ \boldsymbol{N}_d\boldsymbol{X}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$$

根据引理 1，对任意的 $\boldsymbol{F}(\sigma)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\sigma)\leqslant\boldsymbol{I}$，存在常数 ε_1，$\varepsilon_2>0$ 使得

$$\boldsymbol{\Upsilon} + \varepsilon_1^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_1\boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathrm{T}} + \varepsilon_1\boldsymbol{\Xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_1 + \varepsilon_2^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_2\boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{T}} + \varepsilon_2\boldsymbol{\Xi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}_2 < 0 \tag{23}$$

成立，根据 Schur 补引理，式(23)等价于式(22)成立。　证毕

3　数值例子

为说明上述结论的有效性和小的保守性，讨论以下两个实例。

例 1　考虑如下的奇异时滞系统[16]

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_d = \begin{bmatrix} -1.1 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

选择 $\boldsymbol{R}=[0\ \ 1]^{\mathrm{T}}$，根据定理 1，表 1 和表 2 分别给出了 $\tau=0$，$\tau\neq 0$ 时，h_2 允许的最大值。通过比较可以看出本文的方法降低了保守性。

表 1　$h_1=0, \tau=0$ 时，h_2 允许的最大值

方法	[17]	[13]	[18]	[16,19]	定理 1
h_2	0.5 567	0.9 860	1.0 423	1.0 660	1.0 660

表 2　对不同的 τ，给定 h_1 时，h_2 允许的最大值

τ	0.3	0.5
文献[16]h_2	1. 013	0.9 816
$h_1=0$，最大的 h_2	1.0 263	1.0 204
$h_1=1$，最大的 h_2	1.0 621	1.0 621

例 2　考虑不确定时变时滞奇异系统

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_d = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$N_b = 0.2,\ N_a = [0.2 \quad 0.4 \quad 0.5]$$
$$N_d = [0.3 \quad 0.1 \quad 0.5]$$

在这个例子中，选择 $R=[0 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$，根据定理 3，表 3 给出了在不同的反馈增益 K 下时滞允许的 h_2 的最大值，相应的给出了状态反馈增益 K。

表 3　对于不同的 τ，系统(1)满足鲁棒镇定 h_2 允许的最大值和状态反馈增益 K

τ	0	0.3	0.5
$h_1=0$，最大的 h_2	1.362 5	1.303 6	1.259 2
K	K_1	K_2	K_3
$h_1=1$，最大的 h_2	1.362 5	1.309 4	1.304 5
K	K_4	K_5	K_6

其中

$$K_1 = [-15.061\,9 \quad -8.567\,7 \quad -16.091\,5],$$
$$K_2 = [-13.732\,7 \quad -8.937\,4 \quad -15.177\,9],$$
$$K_3 = [-12.972\,3 \quad -9.048\,5 \quad -14.057\,7],$$
$$K_4 = [-15.064\,7 \quad -8.569\,5 \quad -16.095\,1],$$
$$K_5 = [-13.782\,5 \quad -8.831\,0 \quad -15.188\,0],$$
$$K_6 = [-13.577\,5 \quad -8.518\,5 \quad -14.754\,4]$$

4　结束语

本文研究了区间时滞相关不确定时变时滞奇异系统的鲁棒稳定性和镇定性，充分利用时滞的下界信息构造 Lyapunov 函数，用线性矩阵不等式给出了系统对所有的容许不确定都是正则、无脉冲、稳定的新判据，并且线性矩阵不等式是严格的。然后，基于此判据设计了状态反馈控制器使系统鲁棒稳定。最后，数值例子充分说明了新判据降低了保守性。

参考文献：

[1] Rosenbrock H H. Structural properties of linear dynamic systems[J]. *International Journal Control*, 1974, 20(2): 191-202.

[2] 刘永清，谢湘生. 大型动力系统的理论与应用-卷 8：滞后广义系统的稳定镇定与控制[M]. 广州：华南理工大学出版社，1998. (Liu Y Q, Xie X S. *Theory and application of large-scale dynamic systems (8): stability stabilization and control for singular large-scale systems with delay*[M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1998.)

[3] Lewis F L. A survey of linear singular systems [J]. *Circuits Systems and Signal Processing*, 1986, 5(1): 3-36.

[4] Dai L. *Singular control systems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[5] 张永强，马传贵，刘粉林. 一类时滞奇异系统的 H_∞ 鲁棒控制[J]. 控制与决策，2004, 19(3): 342-345. (Zhang Y Q, Ma C G, Liu F L. H_∞ robust control for a class of singular systems with time delay[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(3): 342-345.)

[6] Wu M, He Y, She J H, et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems[J]. *Automatica*, 2004, 40(8): 1435-1439.

[7] Zhu S Q, Zhang C H, Cheng Z L, et al. Delay-dependent robust stability criteria for two classes of uncertain singular time-delay systems[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2007, 52(5): 880-885.

[8] He Y, Wang Q G, Lin C, et al. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay[J]. *Automatica*, 2007, 43(2): 371-376.

[9] 陈杰，史忠科，唐炜. 不确定时滞系统的区间时滞相关鲁棒镇定[J]. 系统工程与电子技术，2008, 30(12): 2451-2454. (Chen J, Shi Z K, Tang W. Delay-range-dependent stabilization for uncertainty systems with time delay[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2008, 30(12): 2451-2454.)

[10] Sun J, Liu G P, Chen J, et al. Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays[J]. *Automatica*, 2010, 46(2): 466-470.

[11] Wu Z G, Su H Y, Chu J. Improved results on delay-dependen H_∞ control for singular time-delay systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2009, 35(8): 1101-1106.

[12] Haidar A, Boukas E K. Exponential stability of singular systems with multiple time-varying delays[J]. *Automatica*, 2009, 45(1): 539-545.

[13] Fridman E, Shaked U. H_∞ control of linear state-delay descriptor systems: an LMI approach[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2002, 351(1): 271-302.

[14] 舒伟仁，张庆灵. 不确定时滞广义系统的鲁棒非脆弱 H_∞ 控制[J]. 控制与决策，2005, 20(2): 629-633. (Shu W R, Zhang Q L. Robust and non-fragile H_∞ control for uncertain singular systems with time-delay in state[J]. *Control and Decision*, 2005, 20(2): 629-633.)

[15] Xu S Y, Van D P, Stefan R, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1122-1128.

[16] Wang H J, Xue A K, Lu R Q, et al. Delay-dependent robust stability and stabilization for uncertain singular system with time-varying delay[C]// *Proc. of the American Control Conference*, 2008: 3626-3631.

[17] Zhong R X, Yang Z. Delay-dependent robust control of descriptor systems with time delay[J]. *Asian Journal of Control*, 2006, 8(1): 36-44.

[18] Yang F, Zhang Q L. Delay-dependent H_∞ control for linear descriptor systems with delay in state[J]. *Journal of Control Theory and Application*, 2005, 3(1): 76-84.

[19] Wu Z G, Zhou W N. Delay-dependent robust stabilization for uncertain singular systems with state delay[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(7): 714-718.

[20] 樊仲光，梁家荣，肖剑. 不确定奇异系统的 Terminal 滑模控制[J]. 系统工程与电子技术，2010, 32(1): 158-161. (Fan Z G, Liang J R, Xiao J. Terminal sliding mode control for uncertain singular systems[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(1): 158-161.)

[21] Xia Y Q, Zhang J H, Boukas E. Control for discrete singular hybrid systems[J]. *Automatica*, 2008, 44(10): 2635-2641.

[22] Xia Y Q, Boukas E, Shi P, et al. Stability and stabilization of continuous singular hybrid systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(6): 1504-1509.

[23] Petersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems[J]. *System and Control Letters*, 1987, 8(4): 351-357.