

# 张量正交局部敏感判别式分析及其 在人脸识别中的应用

金 一 王移芝 阮秋琦

(北京交通大学 计算机与信息技术学院, 北京, 100044)

**摘要:** 针对人脸识别的特征提取问题, 本文提出了一种张量正交局部敏感判别分析 (Tensor-based Orthogonal Locality Sensitive Discriminant Analysis, Tensor-OLSDA) 的人脸识别算法。张量正交局部敏感判别分析在保持了流形的局部几何结构的同时加强了全局判别结构, 并克服了局部敏感判别分析算法中非正交性带来的度量失真和维数估计困难等问题, 从而增强了数据的可分性, 提高了识别效果。张量正交局部敏感判别分析首先将人脸数据表示成高阶张量形式, 在进行特征提取时将高阶张量数据沿不同阶展开, 再利用特征根之间的正交性约束条件, 求解正交局部敏感判别式分析特征子空间, 最后将高阶人脸数据投影于这个特征子空间, 进行识别。在 AT&T 和 YaleB 人脸库上的实验结果表明, Tensor-OLSDA 具有良好的分类性能, 能获得较为理想的识别结果。

**关键词:** 人脸识别; 特征提取; 流形学习; 张量分析

**中图分类号:** TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-0530(2011)06-0820-08

## Tensor-based Orthogonal Locality Sensitive Discriminant Analysis and its Application on Face Recognition

JIN Yi WANG Yi-zhi RUAN Qiu-qi

(School of Computer & Information Technology, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, P. R. China)

**Abstract:** In this paper, a novel appearance-based feature extraction method called Tensor-based Orthogonal Locality Sensitive Discriminant Analysis (Tensor-OLSDA) is presented for feature extraction problem in face recognition. Tensor-OLSDA preserves the intrinsic local manifold structure and the geometrical information as well as strengthens the discriminant power. And it also overcomes the Metric distortion due to the non-orthogonality, which distorts the local geometrical structure of the data sub-manifold, and reduces the difficulty for dimension estimation, therefore, improves the separability of face data and gives a better recognition result. With high-order tensor representation of the face data, the extraction is made along each order of the unfold data and the feature subspace is obtained by OLSDA with orthogonal constraints. At last, the original face data is projected onto this feature subspace for recognition. Experiments based on the AT&T and YaleB face database show the impressive classification capability of the proposed method. Experimental results show Tensor-OLSDA achieves the top average recognition rate in the several compared methods which also confirms that the locality preserving ability is enforced by computing the mutually orthogonal basis functions iteratively with tensor data representation.

**Key words:** face recognition; feature extraction; manifold learning; tensor analysis

### 1 引言

基于流形学习的特征提取和降维方法, 如等距映射方法 (ISOMAP), 局部线性嵌入 (LLE), Laplacian 特征映射及其线性化算法: 近邻保持嵌入 (NPE)<sup>[1]</sup>、局部

保持投影 (LPP)<sup>[2]</sup>、邻域保持投影 (NPP)<sup>[3]</sup>、线性谱图嵌入及其延伸算法 (LGE)<sup>[4]</sup> 成为人脸识别中的热点问题, 其主要想法是保留数据点的结构特征。但是这些算法往往只能处理向量形式的样本数据, 当处理图像等二维矩阵数据或者更高维数据时, 这些算法往往需

收稿日期: 2011 年 3 月 3 日; 修回日期: 2011 年 4 月 15 日

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 60973060); 教育部博士点基金资助项目 (No. 200800040008); 北京市教委资助项目 (No. YB20081000401); 中国博士后基金资助项目 (No. 20100470197); 中央高校基本科研业务费专项资金资助 (No. 2011JBM022)

要将矩阵展开为向量形式,之后才能将高维向量空间的图像投影到低维向量空间,以完成数据降维。然而图像或图像序列实际上是以张量形式存在的,它自身所包含的行与列之间的信息不是一维向量可以完全代替的。

自 Vasilescu 等提出的 Tensorfaces<sup>[5]</sup>将奇异值分解在张量空间中扩展,从而实现真正意义上高阶张量数据处理后,张量表达模式作为向量表达模式的扩展和补充,近年来已经在模式识别、机器学习等领域引起了研究人员的广泛关注<sup>[5]-[8]</sup>。Li 等人提出了基于高阶张量的 DLLE 算法<sup>[6]</sup>,Feiping Nie 等人提出局部张量判别分析算法(LTDA)<sup>[7]</sup>,Yang Liu 等提出了基于张量距离的多尺度局部保持最大信息嵌入(TD-MLPMIE)<sup>[8]</sup>,Hadis Mohseni 等提出基于张量的多线性子空间分析算法<sup>[9]</sup>并用于人脸识别,Zheng 等提出了张量局部保持投影<sup>[10]</sup>。基于张量分析的人脸识别算法是将整个数据集看做一个高阶张量来处理,把高阶张量表示的人脸图像按照不同维的方向分解为光线,表情,姿态等因素,将样本数据从一维扩展到高阶张量。

这些流形学习的识别方法虽然能很好的提取样本数据的局部几何结构信息,但他们在本质上仍然是非监督模式下的,不能够有效的发现样本数据中的判别结构信息。局部敏感判别分析(Locality Sensitive Discriminative Analysis, LSDA)作为一种基于流形学习的线性降维方法,它的提出使得提取数据的判别信息和几何结构信息同时得以实现。然而,LSDA 算法处理的数据同样是向量形式。

本文提出了一种张量正交局部敏感判别分析算法(Tensor-based Orthogonal Locality Sensitive Discriminative Analysis, Tensor-OLSDA)。Tensor LSDA 不但继承了流形学习算法保持局部流形几何结构的特性,而且注重保持局部近邻的判别信息,特别是加入了正交基函数的强制约束,从而提高了数据重建的能力,并且改进了识别效率。本文主要讨论了基于图像的二阶张量的表达模式,该算法可以推广到高阶张量。

## 2 局部敏感判别式分析(LSDA)

### 2.1 局部敏感判别式分析(LSDA)算法描述

对于存在于子流形  $M$  中的  $m$  个数据点  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ , LSDA 算法<sup>[11]</sup>同时构建类内最近邻图  $G_w$  及类间最近邻图  $G_b$  来保存数据流形中的结构信息及判别信息。LSDA 算法定义了两个目标函数,即在一定约束条件下,最小化类内距离目标函数及最大化类间距离目标函数:

$$\min \sum_{ij} (y_i - y_j)^2 S_{w,ij} \quad (1)$$

$$\max \sum_{ij} (y_i - y_j)^2 S_{b,ij} \quad (2)$$

其中,加权矩阵  $S_w$  和  $S_b$  定义如下:

$$S_{w,ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } x_i \in N_w(x_j) \text{ or } x_j \in N_w(x_i) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$S_{b,ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } x_i \in N_b(x_j) \text{ or } x_j \in N_b(x_i) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

最终,目标函数可以合并转化成求解附加约束条件下的如下方程:

$$w = \arg \max_w w^T X H X^T w \quad \text{s.t. } w^T X D_w X^T w = 1 \quad (4)$$

其中,  $H = \alpha L_b + (1 - \alpha) S_w$ , 参数  $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ 。其中  $L_b = D_b - S_b$  称为  $G_b$  的拉普拉斯矩阵。 $D_w$  和  $D_b$  是对角矩阵,  $D_{w,ij} = \sum_j S_{w,ij}$ ,  $D_{b,ij} = \sum_j S_{b,ij}$ 。这样,求解最大化目标函数获得变换矩阵  $w$  转化为求解  $X H X^T w = \lambda X D_w X^T w$  的最大广义特征值问题。

通过计算式(4)的最大特征值所对应的最大特征向量得到投影矩阵  $W = [w_1, w_2, \dots, w_k]$ , 其中  $w_1, w_2, \dots, w_k$  是前  $k$  个最大特征值所对应的特征向量, LSDA 的线性映射可以通过下式得到:

$$x_i \rightarrow y_i = W^T x_i, W = [w_1, w_2, \dots, w_k] \quad (5)$$

### 2.2 局部敏感判别分析优缺点分析

基于流形学习思想的局部敏感判别分析(LSDA)与人脸识别中的经典算法如特征脸(Eigenfaces),费舍尔脸(Fisherfaces),拉普拉斯特征脸(Laplacianfaces)算法相比,具有两大突出优势:首先,LSDA 继承流形学习的基本思想,即使用近邻图来模拟数据局部几何结构。LSDA 通过特征映射,使得原始空间中距离很近的数据点在特征空间中仍然很近,从而保持了人脸图像的局部几何结构;其次,LSDA 属于有监督的特征提取算法,它加入了类的信息,使得投影后的特征空间中,并通过调整敏感因子  $\alpha$  使得最近邻的同类样本与不同类样本集合之间的距离差值最大。

LSDA 算法也有其自身不可避免的缺陷。由公式(3)可知,加权矩阵  $S_w$  和  $S_b$  中,只有近邻点间的权重为正值,如果一个数据点不能从其近邻点由给定的权重重构,将引起很大的误差。因此,最小化的目标函数是在降维过程中尽量保持局部线性重构关系。由 LSDA 的特征方程  $X H X^T w = \lambda X D_w X^T w$  可知,LSDA 算法的基础目标函数转换为直接求解矩阵  $(X D_w X^T)^{-1} X H X^T$  的最大特征值所对应的特征函数问题。但是由于  $(X D_w X^T)^{-1} X H X^T$  本身是非称矩阵,LSDA 算法求解的特征向量集在本质上是非正交向量的。在得到特征向量

集后,变换矩阵可表示为:  $W=[w_1, w_2, \dots, w_k]$ 。降维后低维空间中两个样本点间的欧式距离为:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) &= \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\| = \|W^T(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\| \\ &= \sqrt{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T W W^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} \end{aligned} \quad (6)$$

如果变换矩阵  $W$  是正交矩阵,  $W W^T = I$ , 则高维空间的量度结构得到保留。实际上, 由于约束条件  $w^T X D_w X^T w = I$  的存在, LSDA 对于矩阵  $X D_w X^T$  正交的, 此称之为  $X D_w X^T$  正交。

由于这些原因导致人脸数据重建困难, Cai 等提出了正交拉普拉斯脸算法 (Orthogonal Laplacianfaces)<sup>[12]</sup>, Liu 等提出了正交近邻关系保持嵌入 (Orthogonal Neighborhood Preserving Embedding, ONPE)<sup>[13]</sup>。本文在克服其非正交特性的基础上进一步将其发展到张量空间, 提出了基于张量空间的正交局部敏感判别分析 (Tensor-based Orthogonal Locality Sensitive Discriminant Analysis, Tensor-OLSDA)。

### 3 张量正交局部敏感判别分析 (Tensor-based Orthogonal Locality Sensitive Discriminant Analysis, Tensor-OLSDA)

#### 3.1 Tensor-OLSDA 核心算法描述

对于一张大小为  $m \times n$  的人脸图像, 通常是用向量空间  $\mathbb{R}^{m \times n}$  中的一个  $m \times n$  维的向量表示, 但实际上图像是以二阶张量即矩阵形式存在在  $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n$  的张量空间中, 这里  $\mathbb{R}^m$  和  $\mathbb{R}^n$  分别代表  $m$  维和  $n$  维的向量空间。接下来我们给出以可推广的高阶张量表达模式的 OLSDA 算法。

对于给定  $N$  阶张量数据  $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2 \times \dots \times M_N}$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ ,  $M$  代表高维空间的维数。用  $\mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^{L_1 \times L_2 \times \dots \times L_N}$ , 代表经过变换后的低秩张量数据集,  $L_N$  代表低维空间的维数。则原始张量数据集  $\mathbf{X}$  经过多投影矩阵  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{M_N \times L_N}$ ,  $L_N < M_N$  的变换定义为:

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i \times_1 \mathbf{P}_1 \times_2 \mathbf{P}_2 \times \dots \times_N \mathbf{P}_N \quad (7)$$

基于张量模式的算法旨在对该数据集  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2 \times \dots \times M_N}$  求低维张量  $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{L_1 \times L_2 \times \dots \times L_N}$ ,  $L_N \leq M_N$  满足重建误差最小化:

$$\min_{\tilde{\mathbf{X}}} \|\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}\|^2 = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y} \times_1 \mathbf{U}^1 \times \dots \times_N \mathbf{U}^N\|^2 \quad (8)$$

定义  $N(\mathbf{X}_i)$  表示人脸样本点  $\mathbf{X}_i$  的近邻集, 每个  $\mathbf{X}_i$  对应一类  $c$ ,  $c=1, 2, \dots, C$ ,  $n_i$  代表第  $i$  类人脸样本包含的样本数。  $S_w$  表示类内图上的权重矩阵,  $S_b$  表示类间图上的权重矩阵,  $T_{\max}$  代表求取正交基的最大迭代次数。则 Tensor-OLSDA 算法的流程如下:

#### 1. 数据集初始化:

令初始值  $U_0^1 = I_{M_1}, U_0^2 = I_{M_2}, \dots, U_0^N = I_{M_N}$  为任意的列正交矩阵。

#### 2. 构造相似度矩阵及近邻图:

将每幅图片看做一个二阶张量, 定义为类内最近邻图  $G_w$  及类间最近邻图  $G_b$ 。相应的, 包含  $n$  个最近邻的子集也分为两个, 即类内  $n$  近邻子集  $N_w(\mathbf{X}_i)$  与类间  $k$  近邻子集  $N_b(\mathbf{X}_i)$ 。  $\mathbf{X}_i$  表示第  $i$  个人脸所对应的数据。若  $\mathbf{X}_i$  属于  $\mathbf{X}_j$  的  $n$  个最近邻或者  $\mathbf{X}_j$  属于  $\mathbf{X}_i$  的  $n$  个最近邻, 则表示  $i$  与  $j$  之间的关系互为  $n$  最近邻。  $S_w$  和  $S_b$  分别是描述类内最近邻图  $G_w$  及类间最近邻图  $G_b$  的相似度矩阵。它们定义如下:

$$\begin{aligned} S_{w,ij} &= \begin{cases} \exp(-\|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|^2 / t), & \text{if } \mathbf{X}_i \in N_w(\mathbf{X}_j) \text{ or } \mathbf{X}_j \in N_w(\mathbf{X}_i) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ S_{b,ij} &= \begin{cases} \exp(-\|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|^2 / t), & \text{if } \mathbf{X}_i \in N_b(\mathbf{X}_j) \text{ or } \mathbf{X}_j \in N_b(\mathbf{X}_i) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

#### 3. 计算 Tensor-OLSDA 的正交基构成的投影矩阵

令  $t=1, 2, \dots, T_{\max}$ , 将人脸数据沿不同阶展开:

当  $k$  取  $1, 2, \dots, N$  模式的时候,

##### ①. 计算:

$$\mathbf{X}_i^k: \mathbf{X}_i^k = \mathbf{X}_i \times_1 \mathbf{P}^1 \times \dots \times_{k-1} \mathbf{P}^{k-1} \times_{k+1} \mathbf{P}^{k+1} \times \dots \times_N \mathbf{P}^N$$

$$\text{②. } {}_k \mathbf{X}_i^k \text{ 的沿 } k \text{ 模式展开 } \mathbf{X}_i^k \leftarrow {}_k \mathbf{X}_i^k$$

##### ③. 定义张量模式下的:

$$\boldsymbol{\mu}_{(d-1)}^k = [\boldsymbol{\mu}_{(d-1)}^k, \dots, \boldsymbol{\mu}_{(d-1)}^k]^T, \boldsymbol{\Psi}_{(d-1)}^k = [\mathbf{p}_{(d-1)}^k, \mathbf{p}_{(d-1)}^k, \dots, \mathbf{p}_{(d-1)}^k]$$

$$\mathbf{Q}_{(d-1)}^k = [\mathbf{Q}_{ij(d-1)}^k] = [\boldsymbol{\Psi}_{(d-1)}^k]^T ({}_k \mathbf{D}_w^k)^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{(d-1)}^k$$

##### ④. 计算正交集函数构成的特征向量:

i. 根据特征方程  ${}_k \mathbf{H}^k \mathbf{p}^k = \lambda_k {}_k \mathbf{D}_w^k \mathbf{p}^k$  的最大特征值计算  $k$  模式下的特征向量:  $\mathbf{p}_1^k$

ii. 根据特征方程:

$${}_k \mathbf{R}^k = \{ I - ({}_k \mathbf{D}_w^k)^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{(d-1)}^k [ \mathbf{Q}_{(d-1)}^k ]^{-1} [ \boldsymbol{\Psi}_{(d-1)}^k ]^T \} \cdot ({}_k \mathbf{D}_w^k)^{-1} {}_k \mathbf{H}^k$$

的最大特征值, 计算  $k$  模式下的第  $d$  个正交特征向量:  $\mathbf{p}_d^k$ 。 此处,  ${}_k \mathbf{H}^k = \alpha {}_k \mathbf{L}_b^k + (1-\alpha) {}_k \mathbf{S}_w^k$  并且参数  $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$  通过交叉验证取合适值。

#### 4. 输出投影矩阵

$$\mathbf{P}^k = \mathbf{P}_t^k, k=1, 2, \dots, N \quad (10)$$

#### 3.2 Tensor-OLSDA 理论分析

Tensor-OLSDA 旨在对该数据集  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2 \times \dots \times M_N}$  求低维张量  $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{L_1 \times L_2 \times \dots \times L_N}$ ,  $L_N \leq M_N$  使得重建误差最小, 则根据 LSDA 的重建误差最小准则式 (1) 及 (2), Tensor-OLSDA 的目标函数转化为:

$$\arg \min_{f(\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^N)} \sum_{i \neq j} \left\| (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j) \times_1 \mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N \right\|_{\mathbf{S}_w, ij}^2 \quad (11)$$

$$\arg \max_{f(\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^N)} \sum_{i \neq j} \left\| (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j) \times_1 \mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N \right\|_{\mathbf{S}_b, ij}^2 \quad (12)$$

$\mathbf{S}_w$  和  $\mathbf{S}_b$  分别是描述类内最近邻图  $G_w$  及类间最近邻图  $G_b$  的相似度矩阵, 定义如式 (10)。经过代数变换, (11), (12) 又可以转化为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{ij} (\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_j)^2 \mathbf{S}_{w, ij} &= \sum_i (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N)^T \mathbf{X}_i \mathbf{D}_w \mathbf{X}_i^T \\ &\quad (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N) - \sum_i (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N)^T \mathbf{X}_i \mathbf{S}_{w, ij} \mathbf{X}_j^T (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N) \\ &= (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N)^T \mathbf{X} \mathbf{D}_w \mathbf{X}^T (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N) - (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N)^T \mathbf{X} \mathbf{S}_w \mathbf{X}^T (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N) \\ &= (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N)^T \mathbf{X} \mathbf{L}_w \mathbf{X}^T (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N) \quad (13) \end{aligned}$$

以及,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{ij} (\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_j)^2 \mathbf{S}_{b, ij} &= \sum_i (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N)^T \mathbf{X}_i \mathbf{D}_b \mathbf{X}_i^T \\ &\quad (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N) - \sum_i (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N)^T \mathbf{X}_i \mathbf{S}_{b, ij} \mathbf{X}_j^T (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N) \\ &= (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N)^T \mathbf{X} \mathbf{D}_b \mathbf{X}^T (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N) - (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N)^T \mathbf{X} \mathbf{S}_b \mathbf{X}^T (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N) \\ &= (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N)^T \mathbf{X} \mathbf{L}_b \mathbf{X}^T (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N) \quad (14) \end{aligned}$$

对角矩阵  $\mathbf{D}_{w, ij}$  并非越大越好, 为了方便计算, 附加约束:

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{D}_w \mathbf{Y} = 1 \Rightarrow (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N)^T \mathbf{X} \mathbf{D}_w \mathbf{X}^T (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N) = 1 \quad (15)$$

则目标函数转化为求:

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \dots, \mathbf{P}^N) &= \arg \max_{f(\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^N)} \sum_{i \neq j} \left\| (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j) \times_1 \mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N \right\|_{\mathbf{H}}^2 \\ &= \arg \max_{f(\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^N)} [ (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N)^T \mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{X}^T (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N) ] \\ \text{s.t. } & (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N)^T \mathbf{X} \mathbf{D}_w \mathbf{X}^T (\mathbf{P}^1 \times_2 \mathbf{P}^2 \times \dots \times_N \mathbf{P}^N) = 1 \quad (16) \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{H} = \alpha \mathbf{L}_b + (1 - \alpha) \mathbf{S}_w$ , 参数  $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$  通过交叉验证得到。

首先, 定义  $\mathbf{X}_i^{k^k}$  是第  $k$  个模式下  $\mathbf{X}_i$  的展开式,  $\mathbf{X}_i^{k^k}$  定义为:

$$\mathbf{X}_i^{k^k} = \mathbf{X}_i \times_1 \mathbf{P}^1 \dots \times_{k-1} \mathbf{P}^{k-1} \times_{k+1} \mathbf{P}^{k+1} \times \dots \times_N \mathbf{P}^N \quad (17)$$

我们通过除  $\mathbf{P}^k$  外的其他投影矩阵  $\mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^{k-1}, \mathbf{P}^{k+1}, \dots, \mathbf{P}^N$  交替求解第  $k$  个模式下的最优投影矩阵  $\mathbf{P}^k$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^k &= \arg \max_{\mathbf{P}^k} \sum_{i \neq j} \left\| (\mathbf{X}_i^{k^k} - \mathbf{X}_j^{k^k}) \times_k \mathbf{P}^k \right\|_{\mathbf{H}}^2 \\ &= \arg \max_{(\mathbf{P}^k \mathbf{X}^k)^T \mathbf{D}_w (\mathbf{P}^k \mathbf{X}^k) = 1} \{ (\mathbf{P}^k)^T \sum_{i, j} [ (\mathbf{X}_i^{k^k} - \mathbf{X}_j^{k^k}) \mathbf{H}_{i, j} (\mathbf{X}_i^{k^k} - \mathbf{X}_j^{k^k})^T ] (\mathbf{P}^k) \} \\ &= \arg \max_{(\mathbf{P}^k \mathbf{X}^k)^T \mathbf{D}_w (\mathbf{P}^k \mathbf{X}^k) = 1} (\mathbf{P}^k \mathbf{X}^k)^T \mathbf{H} \mathbf{P}^k \mathbf{X}^k \\ &= \arg \max_{\mathbf{P}^k} \text{Tr} [ ((\mathbf{P}^k)^T)_k \mathbf{D}_w (\mathbf{P}^k)_k^{-1} (\mathbf{P}^k)^T_k \mathbf{H}^k (\mathbf{P}^k)_k ] \quad (18) \end{aligned}$$

此时, 定义  $\mathbf{H}^k = \sum_{i, j} [ (\mathbf{X}_i^{k^k} - \mathbf{X}_j^{k^k}) \mathbf{H}_{i, j} (\mathbf{X}_i^{k^k} - \mathbf{X}_j^{k^k})^T ]$ ,  $\mathbf{X}_i^{k^k}$  为  $k$  模式下  $\mathbf{X}_i$  的展开式矩阵。因此, 投影矩阵  $\mathbf{p}$  可以通过交替计算广义特征方程:

$$\mathbf{H}^k \mathbf{p}^k = \lambda_k \mathbf{D}_w^k \mathbf{p}^k \quad (19)$$

的最大值对应的特征向量求得。

然而矩阵  $\mathbf{H}^k$ ,  $\mathbf{D}_w^k$  并不是固定不变的, 而是依赖于除投影矩阵  $\mathbf{P}^k$  外的  $(N-1)$  个投影矩阵的, 它只能通过循环交替求解各个不同的投影矩阵得到。特征矩阵  $\mathbf{P}^k$  的非独立性也导致它不能很好的恢复原始数据空间的某些结构特性<sup>[24]</sup>, 因此, 我们附加约束条件, 令  $(\mathbf{P}^k)^T (\mathbf{P}^k) = \mathbf{I}$ , 使得  $\mathbf{P}^k$  之间保持正交关系, 即相互独立。那么在降维后的数据空间, 两点之间的距离度量可以表示为:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) &= \left\| \mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_j \right\| = \left\| (\mathbf{X}_i^{k^k} - \mathbf{X}_j^{k^k}) \times_k \mathbf{P}^k \right\| \\ &= \sqrt{(\mathbf{X}_i^{k^k} - \mathbf{X}_j^{k^k})^T (\mathbf{P}^k)^T (\mathbf{P}^k) (\mathbf{X}_i^{k^k} - \mathbf{X}_j^{k^k})} \quad (20) \end{aligned}$$

有了约束条件  $(\mathbf{P}^k)^T (\mathbf{P}^k) = \mathbf{I}$ , 我们可以看到原始数据空间的度量结构就能被完整的保留下来了。

假设  $\mathbf{p}^k_1, \dots, \mathbf{p}^k_d$  是最优化准则下  $f(\mathbf{p}^k)$  的前  $d$  组特征向量, 附加约束条件  $(\mathbf{P}^k)^T (\mathbf{P}^k) = \mathbf{I}$  使得  $(\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{p}^k_1 = (\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{p}^k_2 = \dots = (\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{p}^k_{d-1} = 0$ 。根据前一节工作的延续, Tensor OLSDA 的目标函数转化成:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^k_1 &= \arg \max_{\mathbf{p}^k} \frac{(\mathbf{p}^k)^T_k \mathbf{H}^k (\mathbf{p}^k)_k}{(\mathbf{p}^k)^T_k \mathbf{D}_w^k (\mathbf{p}^k)_k} \\ \dots \\ \mathbf{p}^k_d &= \arg \max_{\mathbf{p}^k} \frac{(\mathbf{p}^k)^T_k \mathbf{H}^k (\mathbf{p}^k)_k}{(\mathbf{p}^k)^T_k \mathbf{D}_w^k (\mathbf{p}^k)_k} \end{aligned}$$

附件约束条件为:  $(\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{p}^k_1 = (\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{p}^k_2 = \dots = (\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{p}^k_{d-1} = 0$ 。

明显地,  $\mathbf{p}^k_1$  可以通过求解广义特征方程  $\mathbf{H}^k \mathbf{p}^k = \lambda_k \mathbf{D}_w^k \mathbf{p}^k$  的最大特征值对应的特征向量求得。余下的第  $d$  个特征向量则通过最大化的目标函数:

$$\mathbf{p}^k_d = \arg \max_{\mathbf{p}^k_d} \frac{(\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{H}^k (\mathbf{p}^k_d)}{(\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{D}_w^k (\mathbf{p}^k_d)}$$

$$\text{s.t. } (\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{p}^k_1 = (\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{p}^k_2 = \dots = (\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{p}^k_{d-1} = 0,$$

$$(\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{D}_w^k (\mathbf{p}^k_d) = 1 \quad (21)$$

根据拉格朗日定理可知:

$$\mathbf{P}_{(d)}^k = (\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{H}^k \mathbf{p}^k_d - \lambda ((\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{D}_w^k \mathbf{p}^k_d - 1) -$$

$$\mu (\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{p}^k_1 - \dots - \mu_{k-1} (\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{p}^k_{d-1} \quad (22)$$

对  $\mathbf{P}^k$  求偏微分,并令其为零可得如下方程:

$$\frac{\partial \mathbf{P}_{(d)}^k}{\partial \mathbf{p}^k_d} = 0 \Rightarrow 2_k \mathbf{H}^k \mathbf{p}^k_d - 2\lambda_k \mathbf{D}_w^k \mathbf{p}^k_d - \mu_1 \mathbf{p}^k_1 - \dots - \mu_{d-1} \mathbf{p}^k_{d-1} = 0 \quad (23)$$

由  $(\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{p}^k_1 = (\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{p}^k_2 = \dots = (\mathbf{p}^k_d)^T \mathbf{p}^k_{d-1} = 0$ , 式(23)两边左乘  $\mathbf{p}^k_d$  可得:

$$2_k \mathbf{H}^k \mathbf{p}^k_d - 2\lambda_k \mathbf{D}_w^k \mathbf{p}^k_d = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\mathbf{H}^k \mathbf{p}^k_d}{\mathbf{D}_w^k \mathbf{p}^k_d} \quad (24)$$

再令式(23)两边同时左乘  $(\mathbf{p}^k_1)^T (\mathbf{D}_w^k)^{-1}, \dots, (\mathbf{p}^k_{d-1})^T (\mathbf{D}_w^k)^{-1}$ , 可得到如下一系列方程:

$$\mu_1 (\mathbf{p}^k_1)^T (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{p}^k_1 + \dots + \mu_{k-1} (\mathbf{p}^k_1)^T (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{p}^k_{d-1}$$

$$= 2 (\mathbf{p}^k_1)^T (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{H}^k \mathbf{p}^k_d$$

$$\mu_1 (\mathbf{p}^k_2)^T (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{p}^k_1 + \dots + \mu_{k-1} (\mathbf{p}^k_2)^T (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{p}^k_{d-1}$$

$$= 2 (\mathbf{p}^k_2)^T (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{H}^k \mathbf{p}^k_d$$

$$\dots$$

$$\mu_1 (\mathbf{p}^k_{d-1})^T (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{p}^k_1 + \dots + \mu_{k-1} (\mathbf{p}^k_{d-1})^T (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{p}^k_{d-1}$$

$$= 2 (\mathbf{p}^k_{d-1})^T (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{H}^k \mathbf{p}^k_d \quad (25)$$

定义:

$$\boldsymbol{\mu}_{(d-1)}^k = [\mu^k_1, \dots, \mu^k_{d-1}]^T,$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{(d-1)}^k = [\mathbf{p}^k_1, \mathbf{p}^k_2, \dots, \mathbf{p}^k_{d-1}]$$

$$\mathbf{Q}_{(d-1)}^k = [\mathbf{Q}_{ij(d-1)}^k] = [\boldsymbol{\Psi}_{(d-1)}^k]^T (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{(d-1)}^k,$$

$$\mathbf{Q}_{ij(d-1)}^k = (\mathbf{p}^k_i)^T (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{p}^k_j \quad (26)$$

综上,上述系列方程(25)可以表示成矩阵间乘积形式:

$$\mathbf{Q}_{(d-1)}^k \boldsymbol{\mu}_{(d-1)}^k = 2 [\boldsymbol{\Psi}_{(d-1)}^k]^T (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{H}^k \mathbf{p}^k_d \quad (27)$$

于是,  $\boldsymbol{\mu}_{(d-1)}^k$  可以通过下式求得:

$$\boldsymbol{\mu}_{(d-1)}^k = 2 [\mathbf{Q}_{(d-1)}^k]^{-1} [\boldsymbol{\Psi}_{(d-1)}^k]^T (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{H}^k \mathbf{p}^k_d \quad (28)$$

再另,式(23)两边同时左乘  $(\mathbf{D}_w^k)^{-1}$  可得:

$$\Rightarrow 2 (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{H}^k \mathbf{p}^k_d - 2\lambda \mathbf{p}^k_d - \mu_1 (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{p}^k_1 - \dots -$$

$$- \mu_{k-1} (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{p}^k_{d-1} = 0$$

根据定义(26), 上用矩阵乘积的形式可以表示为:

$$2 (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{H}^k \mathbf{p}^k_d - 2\lambda \mathbf{p}^k_d - (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{(d-1)}^k \boldsymbol{\mu}_{(d-1)}^k = 0 \quad (29)$$

联合式(27)可得:

$$\{ \mathbf{I} - (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{(d-1)}^k [\mathbf{Q}_{(d-1)}^k]^{-1} [\boldsymbol{\Psi}_{(d-1)}^k]^T \} \cdot (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{H}^k \mathbf{p}^k_d = \lambda \mathbf{p}^k_d \quad (30)$$

则  $\lambda$  即为需要最大化的目标函数的特征值,  $\mathbf{p}^k_d$  即为前

$d$  个最大  $\lambda$  所对应的特征向量:

$${}_k \mathbf{R}^k = \{ \mathbf{I} - (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{(d-1)}^k [\mathbf{Q}_{(d-1)}^k]^{-1} [\boldsymbol{\Psi}_{(d-1)}^k]^T \} \cdot (\mathbf{D}_w^k)^{-1} \mathbf{H}^k \quad (31)$$

此处,  ${}_k \mathbf{H}^k = \alpha {}_k \mathbf{L}^k_b + (1-\alpha) {}_k \mathbf{S}^k_w$ , 参数  $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$  通过交叉验证可得。

综上所述, Tensor-OLSDA 算法的正交特征向量集可以通过计算特征方程  ${}_k \mathbf{R}^k \mathbf{p}^k_d = \lambda \mathbf{p}^k_d$  的最大特征值所对应的特征向量得到。即为本文所提出的张量正交局部敏感判别式分析。它是基于向量的 OLSDA 的张量模式的高阶扩展, 而基于向量的 OLSDA 是本文提出的 Tensor OLSDA 在  $N=1$  时候的特例(即 1 阶张量模式), Tensor OLSDA 的  $N$  个特征矩阵是通过交替最小二乘算法迭代求解的。而早期提出的二维矩阵的方法, 例如 2DPCA, 2DLDA, 2DLPP 等, 实际上也是高阶张量算法在  $N=2$  时的特例, 即针对矩阵数据  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  寻求行或者列方向上的单模投影矩阵  $U^1$  或  $U^2$ , 而双方向的图像矩阵运算算法相当于对矩阵数据做了双模投影, 因此通常能获得较单模投影算法更好的数据降维效果。本文提出的 Tensor-OLSDA 算法在实验过程中, 将人脸图像表示为一个二阶张量, 经过矩阵投影后得到单模投影矩阵  $U^1$  及  $U^2$ , 张量降维通过映射:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}_1^T \mathbf{X} \mathbf{U}_2 \quad (32)$$

得以实现。

## 4 实验结果与分析

本文使用了 AT&T, YaleB 两大人脸库来测试 Tensor-OLSDA 算法的性能。本文实验所用的人脸图像经过根据眼睛的位置配准, 统一剪裁大小为  $32 \times 32$ , 灰度值 0-255。

### 4.1 AT&T 人脸库上的实验

第一组实验使用的英国剑桥大学 AT&T 人脸库, 其中包括 40 人, 每人 10 幅照片, 包括表情变化, 微小姿态变化, 20% 以内的尺度变化, 戴眼镜与不戴眼镜的变化。对于每个人, 随机的选择 3 幅和 5 幅人脸图像作训练样本, 剩余的为测试样本, 记为:  $n_p = 3, 5$ , 循环 20 次, 取平均正确识别率。为在同一实验条件下比较不同算法的识别性能, 本文统一使用最近邻分类器, 距离度量为欧式距离。

在 Tensor-OLSDA 算法中有三个重要参数,  $\mathbf{H}$  矩阵系数  $\alpha$ , 最近邻数  $n$  及投影矩阵的特征维数  $k$ 。由于这三个参数的选择十分复杂, 本文采取交叉验证, 循环寻优的策略, 在 AT&T 上的实验, 当每人随机选择 3 幅和 5 幅人脸图像做训练样本时, 通过交叉验证发现, 当  $\alpha$  取 0.4 及 0.6 达较为理想的识别效果。本组实验使用的属于有监督算法, 因此不考虑最近邻数  $n$  的取值。

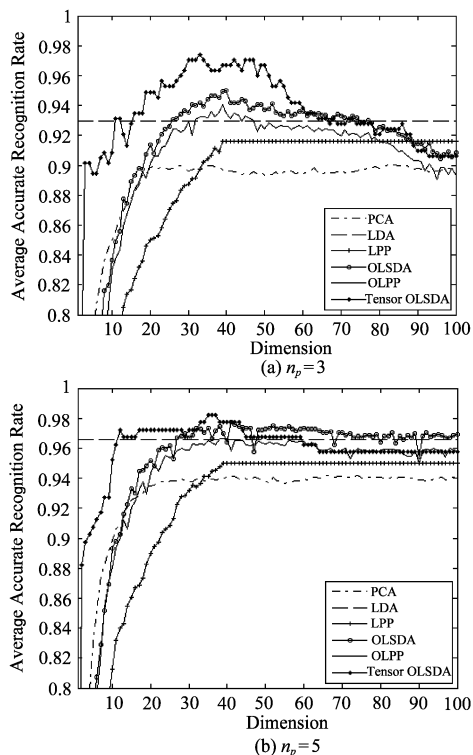


图1 基于 AT&T 人脸库的六种算法 (PCA, LDA, LPP, OLSDA, OLPP, Tensor-OLSDA) 平均正确识别率随特征维数变化曲线

Fig.1 Comparison of average recognition rates with five different algorithm (PCA, LDA, LPP, OLPP, OLSDA, Tensor-OLSDA) under different dimension on the AT&T database

第一组实验将 OLSDA 算法与流形的主成分分析 (PCA), 判别式分析算法 (LDA), 局部保留投影算法 (LPP), 正交局部投影算法 (OLPP) 及正交局部敏感判别式分析 (OLSDA) 进行比较。图 1 显示了每人随机取 3 幅和 5 幅图像做训练样本时, 循环采样 20 次后的平均正确随特征维数变化的曲线。如图 1 所示, 六种算法中, 通过 Tensor-OLSDA 算法获得的平均正确识别率明显高于其他三种算法。结果显示, Tensor-OLSDA 在同等条件下与几种算法相比较, 正确识别率最高, 其次是 OLSDA 算法及 OLPP 算法, PCA 算法效果最差, 同时也说明了正交基约束条件的有效性。

另外一组实验比较了几种流形的张量算法在不同维数下的正确识别率, 其中个张量算法沿行与列方向上的单模投影矩阵  $U^1$  及  $U^2$  的维数使用交叉验证已确定, 图标上的平均正确识别率是在已得到的张量子空间的维数下进行的比较。如图 2 显示了 Tensor LPP, Tensor LGE, Tensor MFA<sup>[19]</sup>, Tensor OLPP 及 Tensor OLSDA 五种算法的平均正确识别率随特征维数变化。

从图 2 可以看出, Tensor OLSDA 数据维数  $d$  上的达到的最佳平均正确识别率均优于其他方法, 而且使用 Tensor OLSDA 平均正确识别率高于 Tensor OLPP 算法, 而 Tensor OLPP 获得平均正确识别率又高于其非正交的 Tensor LPP 算法。这也在一定程度上说明了正交基函数约束条件下的算法所具有的一定优势。

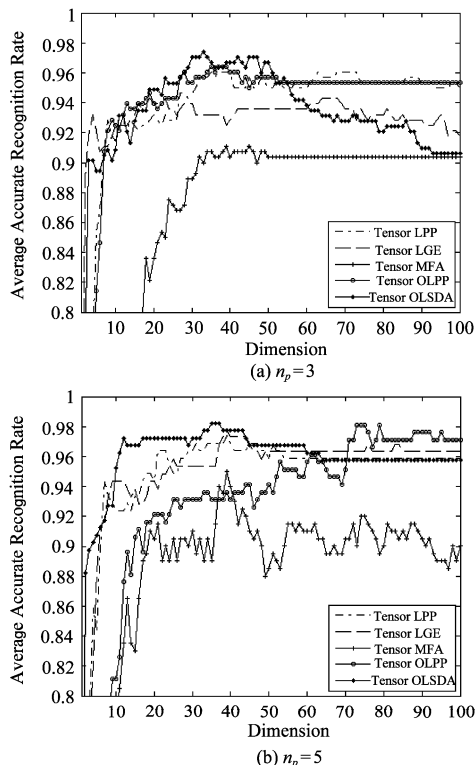


图2 基于 AT&T 人脸库的五种算法 (Tensor LPP, Tensor LGE, Tensor MFA, Tensor OLPP 及 Tensor OLSDA) 平均正确识别率随特征维数变化曲线

Fig.2 Comparison of average recognition rates with four different algorithm (Tensor LPP, Tensor LGE, Tensor MFA, Tensor OLPP, Tensor OLSDA) under different dimension on the AT&T database

表 1 显示了详细的实验结果, 其中  $\text{dim}1, \text{dim}2$  分别代表获得的单模投影矩阵  $U^1$  及  $U^2$  的最高识别率维数,  $d$  代表取的张量特征空间的维数。基于向量的 PCA, LDA, LPP 等算法  $\text{dim}1, \text{dim}2$  不存在, 只取其得到的特征子空间的维数  $d$ 。表 1 直观的显示, 基于张量的算法优于其对应的基于向量的算法, 如 Tensor LPP 和 LPP, Tensor OLPP 和 OLPP, Tensor OLSDA 和 OLSDA。对于保持局部结构的张量算法, 除了 Tensor MFA 略低外, 其余识别性能基本相当。对于加正交基约束条件的 Tensor OLPP 与 Tensor-OLSDA, 识别效果差别较小。兼顾保持局部结构和判别信息并且在正交基约束条件下的 Tensor-OLSDA, 识别效果最好。

表1 正交局部敏感判别式分析算法与其他几种方法的最优识别率比较

Tab.1 Comparison of recognition rates with different algorithm on the AT&amp;T database

Method	(a) $n_p = 3$		(b) $n_p = 5$	
	Average	Dimension	Average	Dimension
	Recognition Rate	(dim1, dim2, d)	Recognition Rate	(dim1, dim2, d)
PCA	90.05%	82	94.18%	66
LDA	92.98%	39	96.60%	39
LPP	91.61%	39	94.97%	39
OLPP	94.09%	39	96.65%	38
OLSDA	94.98%	40	97.72%	39
Tensor MFA	91.07%	(9, 11, 45)	95.01%	(10, 13, 40)
Tensor LGE	94.34%	(9, 8, 64)	97.83%	(8, 7, 39)
Tensor LPP	96.07%	(10, 13, 66)	97.39%	(11, 10, 39)
Tensor OLPP	96.43%	(12, 9, 39)	98.12%	(10, 12, 72)
Tensor OLSDA	<b>97.36%</b>	<b>(15, 13, 33)</b>	<b>98.24%</b>	<b>(13, 12, 35)</b>

#### 4.2 Yale B 人脸库上的实验

本实验使用的 Yale B 人脸库中包含 38 人的 2414 个正面不同光照样本。对于库中的每个对象,随机的选择 10 幅和 20 幅人脸图像作训练样本,剩余为测试样本,记为:  $n_p = 10, 20$ , 循环 20 次,取平均正确识别率。 $\alpha$  的确定仍然使用交叉验证的方法,最后确定取 0.35 及 0.8,初步的实验结果显示,只取前 100 维难以获得最佳识别效果,因此本组实验统一将特征维数从第一维取到第四百维。在计算 Tensor 子空间的时候,也统一将单模投影矩阵  $U^1$  及  $U^2$  的维数取为  $20 \times 20$ , 使用其前 400 维特征进行识别验证。

表2 正交局部敏感判别式分析算法与其他几种方法的最优识别率比较

Tab.2 Comparison of recognition rates with different algorithm on the YaleB database

Method	(a) $n_p = 10$		(b) $n_p = 20$	
	Average	Dimension	Average	Dimension
	Recognition Rate	(d)	Recognition Rate	(d)
PCA	73.92%	371	78.64%	373
LDA	78.53%	37	83.27%	37
LPP	81.02%	36	84.40%	46
OLPP	83.46%	120	90.87%	196
OLSDA	83.50%	94	91.11%	99
Tensor MFA	82.89%	369	86.82%	204
Tensor LGE	83.87%	315	88.64%	305
Tensor LPP	85.59%	163	91.60%	316
Tensor OLPP	86.29%	305	92.69%	348
Tensor OLSDA	<b>86.64%</b>	<b>268</b>	<b>93.57%</b>	<b>376</b>

表2 显示基于张量的算法与几组流形学习算法的识别结果比较。实验结果同样证实了,在一定规模的不同光照变化的人脸数据库上, Tensor-OLSDA 算法仍然能达到较稳定的识别效果。实验结果显示,本文所提出的正交局部敏感判别式分析算法(OLSDA)在每类样本随机取 10 幅和 20 幅训练的时候,循环 20 次后平均正确识别率分别达到 86.64% 和 93.57%, 均高于同等条件下的其他几种算法。

#### 4.3 实验结果数据分析

通过在两大人脸库上的实验测试,观察数据结构,有以下几点结论:

1. 基于张量空间的正交局部敏感判别式分析(Tensor-OLSDA)算法,将人脸样本看作由高维张量张成的空间,旨在更好的发掘人脸数据的内在结构和人脸图像作为二阶张量本身的信息,这在很大程度上归因于 Tensor-OLSDA 算法使用了正交基函数作为约束条件,在继承了局部特征保持能力的同时,增加了特征的可分性。实验结果同样很好的证明了它在人脸识别方面的良好性能。

2. 附加正交的约束条件的算法比不能保证向量间相互正交的算法获得更好的平均正确识别率,这在正交局部敏感判别式分析(OLSDA)<sup>[14]</sup>算法中也有着良好的体现,说明了使用正交基函数作为约束条件的有效性,也在一定程度上克服了人脸光照,表情,姿态等变化。

3. 实验结果显示,若每次训练样本含  $c$  类,若样本数目较少时(从 AT&T 人脸库上的实验来看), Tensor OLSDA 的人脸识别算法的最高正确率出现的特征维数与  $c$  关系较为密切。而当样本数目较大时(从 YaleB 人脸库上的实验来看), Tensor OLSDA 算法获得最佳识别率的特征维数与类别信息相关性小,而与张量单模投影矩阵  $U^1$  及  $U^2$  的维数关系更为密切。

## 5 结论

本文提出了一种基于张量子空间的人脸识别算法 Tensor-OLSDA,它将人脸图像视为二阶张量,在保持了流形的局部几何结构的同时加强了全局判别结构,并将该方法推广到高阶张量,将最优的张量子空间的求解归结为迭代求解广义特征向量问题,并实验验证了算法的有效性。Tensor-OLSDA 在保持流形局部几何结构的基础上,划分了类别信息,使其对流形的描述更加细致,识别效果上优于只单一目的的张量学习算法。在这一新的算法中,由于正交基函数作为约束条件使得该算法的局部结构保持和判别能力被进一步加强,并且 Tensor-OLSDA 同时保存了与距离有关的结构信

息,因此也使的它在分类和聚类的任务要求中表现更为出色。在两大标准人脸库上的试验也证明了基于 Tensor-OLSDA 的人脸识别算法的有效性,并且获得了较为理想的识别效果,比其他几种当前流形的人脸识别算法更具优势。

### 参考文献

- [1] He X. F., Cai D., Yan S., Zhang H. J., Neighborhood Preserving Embedding [C], in Proceedings of the Tenth Intel. Conf. Computer Vision (ICCV'10), 2005, vol. 2, pp. 1208-1213.
- [2] He X. F., Yan S., Hu Y., Niyogi, P., Zhang L. J., Face Recognition Using Laplacianfaces [J], IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, Mar. 2005, vol. 27, no. 3, pp. 328-340.
- [3] Pang Y. W., Zhang L., Liu Z. K., Yu N. H., Li H. Q., Neighborhood Preserving Projections (NPP): A Novel Linear Dimension Reduction Method [J], In Advances in Intelligent Computing, Lecture Notes in Computer Science, 2005, Volume 3644, pp. 117-125.
- [4] Yan S., Xu D., Zhang H. J., Yang Q., Lin S., Graph Embedding and Extension: A General Framework for Dimensionality Reduction [J], IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, Jan. 2007, Vol. 29, No. 1, pp. 40-51.
- [5] Vasilescu M. A. O., Terzopoulos D., Multilinear analysis of image ensembles: Tensorfaces [C], Proceedings of 7th European Conference on Computer Vision, 2002, pp. 447-460.
- [6] Li X., Lin S., Yan S., Xu D., Discriminant Locally Linear Embedding With High-Order Tensor data [J], IEEE Trans. Sys., Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2008, Vol. 38, No. 2, pp. 342-352.
- [7] Nie Feiping, Xiang Shiming, Song Yangqiu and Zhang Changshui, Extracting the optimal dimensionality for local tensor discriminant analysis [J], Pattern Recognition, Jan. 2009, Vol. 42, Issue 1, pp. 105-114.
- [8] Liu Y., Liu Y., Chan, K. C. C., Tensor Distance Based Multilinear Locality-Preserved Maximum Information Embedding [J], IEEE Transactions on Neural Networks, Nov. 2010, Vol. 21, Issue 11, pp. 1848-1854.
- [9] Mohseni H., Kasaei S., Tensor-based face representation and recognition using multi-linear subspace analysis [C],

14th International CSI Computer Conference (CSICC 2009), Oct. 2009, pp. 658-663.

- [10] Dazhao Zheng; Xiufeng Du; Limin Cui, Tensor locality preserving projections for face recognition [C], 2010 IEEE International Conference on Systems Man and Cybernetics (SMC), Oct. 2010, pp. 2347-2350.
- [11] Cai D., He X. F., Zhou Kun, Han Jiawei and Bao H. J., Locality Sensitive Discriminant Analysis [C], In proceedings of 2007 International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2007), 2007, pp. 708-713.
- [12] Cai D., He X. F., Han L. W., Zhang H. J., Orthogonal Laplacianfaces for Face Recognition [J], IEEE Transaction Image Processing, Nov. 2006, Vol. 15, Issue 11, pp. 3608-3614.
- [13] Liu X. M., Yin J. W., Feng Z. L., Dong J. X., Lu W., Orthogonal Neighborhood Preserving Embedding for Face Recognition [C], 14th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP 2007), 2007, vol. 1, pp. I-133-I-136.
- [14] Jin Y., Ruan Q. Q., Orthogonal Locality Sensitive Discriminant Analysis for Face Recognition [J], Journal of Information Science and Engineering, 2009, Vol. 25, No. 2, pp. 419-433.

### 作者简介



金一等(1982-),女,北京交通大学计算机与信息学院博士后,主要从事模式识别,人脸识别方向的研究。  
E-mail: yjin@bjtu.edu.cn



王移芝(1953-),女,北京交通大学计算机与信息学院,教授,硕士生导师,研究方向为计算机应用技术,数据库与网络应用技术。E-mail: yzwang@bjtu.edu.cn



阮秋琦(1944-),男,北京交通大学信息科学研究所,教授,博士生导师,研究方向为图像处理,计算机视觉,模式识别,虚拟现实。  
E-mail: qqruan@center.njtu.edu.cn