

# 托普利兹矩阵在压缩多径信道估计中的应用

孙晶明 王 殊 董 燕

(华中科技大学电子与信息工程系, 湖北武汉 430074)

**摘 要:** 可靠的无线通信需要准确地知道下层信道的信息, 因此需要进行信道估计。而许多真实信道表现为仅有一些相对较少的非零信道系数的稀疏多径信道。对于稀疏多径信道的估计, 传统方法例如最小二乘法, 没有利用稀疏信道本身的低维度特性, 所需训练序列的长度较长, 因此估计代价较大。基于压缩感知的信道估计方法, 利用稀疏先验信息, 能较大地缩短所需训练序列的长度, 获得较好的估计效果。该文结合压缩感知观测矩阵的特点, 证明了当训练序列的长度不长于信道冲激响应的长度, 且托普利兹观测矩阵的行数小于于列数时, 观测矩阵仍然满足有限等距性质; 明确提出了稀疏多径信道估计中所使用的观测矩阵的构造条件。实验结果验证了这种优化了的托普利兹观测矩阵的可行性和实用性。

**关键词:** 信道估计; 稀疏多径信道; 压缩感知; 观测矩阵; 托普利兹矩阵; 有限等距性质

**中图分类号:** TN911.7    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1003-0530(2012)06-0879-07

## Toeplitz Matrix for Compressed Multipath Channel Sensing

SUN Jing-ming WANG Shu DONG Yan

(Department of Electronics and Information Engineering, Huazhong University  
of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** Reliable wireless communication often requires accurate knowledge of the underlying channel, so the channel estimation is needed. Many real-world channels tend to exhibit sparse multipath channels characterized by a relatively small number of nonzero channel coefficients. For sparse multipath channel estimation, conventional methods, such as the least squares, do not use the inherent low-dimension characteristics of these sparse channels, and the required length of the training sequence is comparatively long, so their estimation cost is comparatively large. The channel estimation method based on compressed sensing is able to take full advantage of the prior information of sparsity to obtain a better estimate with greatly reduced length of the training sequence. Combining the characteristics of the compressed sensing measurement matrix, it proves that when the length of the training sequence is not longer than the length of the channel impulse response and the number of rows is smaller than the number of columns in the Toeplitz measurement matrix, the measurement matrix still satisfies the restricted isometry property; and it proposes specific requirements of the matrix structure for the measurement matrix used in sparse multipath channel estimation. Simulation results verify the feasibility and practicality of the optimized measurement matrix.

**Key words:** channel estimation; sparse multipath channel; compressed sensing; measurement matrix; Toeplitz matrix; restricted isometry property

## 1 引言

信道估计,简单说来,就是求出一个信道的近似冲激响应,使之尽可能地接近于真实的信道冲激响应,以便在接收端进行信道补偿,从而提高整个系统的性能。在一些特殊的场合,如水下信道模型<sup>[1]</sup>、高解析电视传播信道<sup>[2]</sup>、超宽带信道<sup>[3]</sup>,信道会有很长的时延扩展,但是信号却只经过少数几条路径,对于这类用有限冲激响应(Finite Impulse Response,简称 FIR)模型建模的信道,只有少数抽头系数为非零值,称这种信道为稀疏多径信道。对于稀疏多径信道的估计,传统方法例如最小二乘法(Least Squares,简称 LS),没有利用稀疏信道本身的低维度特性,所需训练序列的长度较长,因此估计代价较大。本文介绍的基于压缩感知(Compressed Sensing,简称 CS)的方法,利用稀疏先验信息,能较大地缩短所需训练序列的长度,获得较好的估计效果。文献[4]阐述了压缩感知理论的三个要素,即信号的稀疏变换、稀疏信号的非相关测量以及稀疏信号的重建算法。将压缩感知理论应用于稀疏多径信道估计,其关键是找到与实际系统中的已知信息相对应的观测矩阵,且它满足有限等距性质(Restricted Isometry Property,简称 RIP)<sup>[5]</sup>。文献[6]给出了一种证明随机矩阵满足 RIP 条件的方法。

压缩感知理论的应用前提是研究对象的稀疏性。近年来,由于对一些多径信道的实际测量的实验数据显示出其稀疏性的特点,因此在将压缩感知理论应用于稀疏多径信道估计这一领域出现了一些研究文献,其中 W. U. Bajwa 等人的研究成果很有启发意义。文献[7]较早地将压缩感知理论应用于稀疏多径信道估计,并分析了这种方法的可行性。文献[8]针对观测矩阵理论在稀疏多径信道估计这一应用背景下做了相应的研究,指出了研究托普利兹矩阵的重要性。文献[9]提出了证明观测矩阵满足 RIP 条件的方法;证明了当训练序列的长度长于信道冲激响应的长度时,在一定参数限制条件下,托普利兹观测矩阵满足 RIP 条件;还证明了不受训练序列的长度约束的托普利兹观测矩阵在一定参数限制条件下也满足 RIP 条件,但矩阵的行数要大于列数,这不同于一般的压缩感知观测矩阵的特点,因此估计代价仍然较大。

## 2 问题模型

### 2.1 压缩感知理论

压缩感知理论的简单描述:只要信号在某个正交空间具有稀疏性,就能以相对较低的频率( $m \ll n$ )采样信号,而且可以以高概率重构该信号。

压缩感知理论的主要内容:(1)信号的稀疏变换:任意  $n$  采样的信号  $\mathbf{x}(n \times 1)$  在某一正交基或紧框架  $\Psi(n \times n)$  上是稀疏的,即该信号的稀疏表示中含有  $K$  个非零值;(2)稀疏信号的非相关测量:通过观测矩阵  $\Phi(m \times n)$  实现信号从多维空间到低维空间的线性投影,得到观测值向量  $\mathbf{y}(m \times 1)$ ;(3)稀疏信号的重建算法:利用优化求解方法从  $\mathbf{y}$  中精确或高概率地重构信号  $\mathbf{x}$ 。对应公式表示如下<sup>[10]</sup>:

$$\mathbf{x} = \Psi \boldsymbol{\alpha} \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \Phi \Psi \boldsymbol{\alpha} = \Theta \boldsymbol{\alpha} \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min \|\Psi^T \mathbf{x}'\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \Phi \mathbf{x}' = \mathbf{y} \quad (3)$$

其中  $\boldsymbol{\alpha}$  是稀疏系数向量,且含有  $K$  个非零值,  $\Psi^T$  是  $\Psi$  的转置矩阵,  $\hat{\mathbf{x}}$  是重构的信号。

### 2.2 多径信道模型

如果发射一个单脉冲,那么它通过多径信道后,接收到的信号将是一个脉冲序列。这个脉冲序列的时延扩展等于最先到达信号分量和最后到达信号分量之间的时间延迟。

假设等效基带发送信号为  $s(t)$ ,相应的等效基带接收信号为  $r(t)$ ,等效基带信道冲激响应为  $h(\tau, t)$ ,时延扩展为  $T_m$ ,则有

$$r(t) = \int_0^{T_m} h(\tau, t) s(t - \tau) d\tau \quad (4)$$

这里忽略噪声的影响。

对于频率选择性衰落信道,假设发射机、接收机和反射体在所分析的时间内都是静止的或缓慢移动的(准静止态),且反射体的数量、位置和特性也是固定的,那么多个信号路径的特性就是固定的。等效基带信道冲激响应在所分析的时间内保持为常数,即  $h(\tau, t) \approx h(\tau, 0) = h(\tau)$ ,则  $h(\tau)$  可离散表示为直射路径分量及所有可分辨多径分量之和:

$$h(\tau) = \sum_{i=0}^{N_{path}} \alpha_i \delta(\tau - \tau_i) \quad (5)$$

其中  $i=0$  对应直射路径,  $N_{path}$  表示可分辨多径的数目,  $\tau_i$  表示各径的时延 ( $\tau_i \in [0, T_m]$ ),  $\alpha_i$  表示各径的幅度

增益( $\alpha_i \in \mathbf{R}, \mathbf{R}$  为实数集)。此信道模型即对应一个通常所描述的线性非时变系统。

相应的等效基带接收信号可离散表示为

$$r(t) = \sum_{i=0}^{N_{\text{path}}} \alpha_i s(t - \tau_i) \quad (6)$$

现在简化一下模型以利于分析。令  $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$  ( $\mathbf{R}^n$  为  $n$  维实数向量空间),  $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^p$ , 则由卷积关系  $\mathbf{r} = \mathbf{s} * \mathbf{h}$  可知  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{n+p-1}$ 。为了应用压缩感知理论, 将(6)式表示成矩阵与向量乘积的形式如下

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n+p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & s_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_{n-2} & \cdots & 0 \\ s_n & s_{n-1} & \cdots & s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_p & s_{p-1} & \cdots & s_{p-n+1} \\ 0 & s_p & \cdots & s_{p-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中  $p > n$ 。若令  $p = n + m - 1, m > 1$ , 则(7)式即为

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{2n+m-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & s_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_{n-2} & \cdots & 0 \\ s_n & s_{n-1} & \cdots & s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n+m-1} & s_{n+m-2} & \cdots & s_m \\ 0 & s_{n+m-1} & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n+m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

由此已将  $\mathbf{r} = \mathbf{s} * \mathbf{h}$  化为  $\mathbf{r} = \mathbf{S}\mathbf{h}$  的形式。这里的矩阵  $\mathbf{S}$  是一个托普利兹结构(除第一行和第一列外, 其他每个元素都与其左上角的元素相同)的  $(n+p-1) \times n$  阶卷积矩阵<sup>[9]</sup>。

那么, 确定一个频率选择性衰落信道的问题就转化为: 如何设计由离散输入序列  $\mathbf{s}$  所构成的卷积矩阵  $\mathbf{S}$ , 并从离散输出序列  $\mathbf{r}$  估计出信道冲激响应序列  $\mathbf{h}$ 。

### 2.3 稀疏多径信道估计的压缩感知方法

信道测量的结果指出, 多径分量在信道时延扩展上是簇分布的而不是均匀分布的<sup>[11]</sup>, 在这种情况下, 不是每一个时延宽度为  $\Delta\tau = 1/W$  ( $W$  为通信带宽) 的区域内都包含一个多径分量。特别地, 稀疏频率选择性衰落信道在任一固定的但足够大的带宽内只有远少

于  $n$  的非零信道系数。

定义 1 (稀疏多径信道)<sup>[7]</sup>: 令  $W$  为通信带宽, 则  $n = \lceil T_m W \rceil + 1$  为在信道时延扩展  $T_m$  上信道系数的个数, 我们称一个满足  $\|\mathbf{h}\|_0 = K < n$  的多径信道是  $K$ -稀疏的。

对于这种稀疏多径信道, 我们可用压缩感知的方法来进行信道估计。令训练序列为  $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^{n+m-1}, m > 1$ , 则相应的卷积矩阵  $\mathbf{S}$  如(8)式中所示。由于该矩阵的前  $(n-1)$  行和后  $(n-1)$  行都含有 0 元素, 根据压缩感知理论, 它们对于信道估计作用不大, 为可压缩的部分, 只需要该矩阵中间的不含 0 元素的  $m$  行所构成的子矩阵即可完成信道估计。

现在我们的信道估计问题就转化为如何根据  $\mathbf{r}' = \mathbf{S}'\mathbf{h}$  重构  $\mathbf{h}$ , 其中已知  $\mathbf{r}' = [r_n, r_{n+1}, \dots, r_{n+m-1}] \in \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{h}$  是时域稀疏的, 观测矩阵为

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} s_n & s_{n-1} & \cdots & s_1 \\ s_{n+1} & s_n & \cdots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n+m-1} & s_{n+m-2} & \cdots & s_m \end{bmatrix} \quad (9)$$

且  $\mathbf{S}'$  仍然是托普利兹结构的矩阵。这时可以理解为, 发送端在持续发送信号, 而接收端的响应观测时间固定在  $[n, n+m-1]$  内。文献[8]已经证明, 在一定条件下,  $\mathbf{S}'$  是满足 RIP 条件的。因此, 我们的问题已经具备了应用压缩感知方法的所有条件。

### 3 优化的托普利兹观测矩阵

在(7)式中, 只考虑了  $p > n$  的情况, 即训练序列的长度长于信道冲激响应的长度, 这使得估计代价较大。因此, 为了减小代价, 需要分析当  $p \leq n$ , 即训练序列的长度不长于信道冲激响应的长度时的情况。又由文献[9]知, 只需考虑  $m < n$  的情形。此时, 卷积矩阵为

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 & \cdots & 0 \\ s_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & s_1 \\ s_p & \ddots & s_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_p \end{bmatrix} \quad (10)$$

我们需要构造一个新的  $m \times n$  阶观测矩阵  $\mathbf{X}$ , 使之满足如下条件: (1)  $\mathbf{X}$  作为  $\mathbf{S}$  的一个子矩阵, 是由  $\mathbf{S}$  中的连续  $m$  行构成的, 即  $\mathbf{X}$  具有托普利兹结构, 且  $\mathbf{X}$  的每一列至少有一个非零元素, 以保证观测过程不会丢失原始信号的信息; (2)  $\mathbf{X}$  需满足 RIP 条件; (3)  $m < n$ 。

这三个条件称为优化的托普利兹观测矩阵的构造条件。

为了方便后面定理的描述,这里先给出 RIP 的定义以及三个在定理的证明中要用到的引理。

定义 2 (Restricted Isometry Property)<sup>[12]</sup>: 设  $\mathbf{X}$  是一个  $m \times n$  阶矩阵。如果对于所有的含有不超过  $K$  个非零元素的  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ,  $(1-\delta_K)\|\mathbf{z}\|_2 \leq \|\mathbf{Xz}\|_2 \leq (1+\delta_K)\|\mathbf{z}\|_2$  都成立,我们就称观测矩阵  $\mathbf{X}$  以参数  $\delta_K \in (0,1)$  满足  $K \in \mathbb{N}$  ( $\mathbb{N}$  为自然数集) 阶的有限等距性质,即  $\mathbf{X}$  满足  $\text{RIP}(K, \delta_K)$ 。定义 2 简称为 RIP 条件。

引理 1<sup>[13]</sup>: 令  $\{x_i\}_{i=1}^{k_0}$  为一个独立同分布的高斯随机序列,其均值为 0,方差为  $\sigma^2$ 。设  $0 \leq t \leq 1$ ,那么  $x_i$  的平方和满足  $\Pr\left(\left|\sum_{i=1}^{k_0} x_i^2 - k_0\sigma^2\right| \geq 4\sigma^2\sqrt{k_0 t}\right) \leq 2\exp(-t)$ 。

引理 2<sup>[9]</sup>: 令  $\{x_i\}_{i=1}^{k_0}$  和  $\{y_i\}_{i=1}^{k_0}$  均为独立同分布的高斯随机序列,且均值为 0,方差为  $\sigma^2$ 。那么,  $\Pr\left(\left|\sum_{i=1}^{k_0} x_i y_i\right| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{4\sigma^2(k_0\sigma^2 + t/2)}\right)$ 。

引理 3<sup>[9]</sup> (关于 Geršgorin 引理的讨论): 设  $\delta_d, \delta_o, \delta_K \in (0,1)$ , 且  $\delta_K = \delta_d + \delta_o$ , 若矩阵  $\mathbf{A}$  的格拉姆矩阵  $\mathbf{G} = \mathbf{A}'\mathbf{A}$  ( $\mathbf{A}'$  是  $\mathbf{A}$  的共轭转置矩阵) 的每个对角元素满足  $|G_{i,i} - 1| < \delta_d$ , 而每个非对角元素满足  $|G_{i,j}| < \frac{\delta_o}{K}$  ( $i \neq j$ ), 则  $\mathbf{A}$  满足  $\text{RIP}(K, \delta_K)$ 。

不失一般性,对于序列  $\{x_i\}_{i=1}^p$ , 以  $p = n - m + 1$  ( $m < n$ ) 为例,给出以下定理及其证明。

定理: 令  $\{x_i\}_{i=1}^{n-m+1}$  为一个独立同分布的高斯随机序列,  $m < n$  ( $n \geq 3$ ), 其均值为 0, 方差为  $1/m$ 。由此序列生成的  $m \times n$  阶托普利兹矩阵  $\mathbf{X}$  为

$$\begin{bmatrix} x_{n-m+1} & x_{n-m} & \cdots & x_{n-2m+3} & x_{n-2m+2} & \cdots & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{n-m+1} & \cdots & x_{n-2m+4} & x_{n-2m+3} & \cdots & x_2 & x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-m+1} & \cdots & x_m & x_{m-1} & \cdots & x_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

那么,对于任意的  $\delta_K \in (0,1)$ , 存在仅依赖于  $\delta_K$  和  $K$  的常数  $c_1$  和  $c_2$ , 只要  $m \geq c_2 \ln n$ ,  $\mathbf{X}$  就以超过  $1 - \exp(-c_1 m)$  的概率满足  $\text{RIP}(K, \delta_K)$ 。

证明: 我们需证明, 存在仅依赖于  $\delta_K$  和  $K$  的常数  $c_1$  和  $c_2$ , 只要  $m \geq c_2 \ln n$ , 就有

$\Pr(\mathbf{X}$  does not satisfy  $\text{RIP}(K, \delta_K)) \leq \exp(-c_1 m)$   
 设  $\delta_d, \delta_o, \delta_K \in (0,1)$ , 且  $\delta_K = \delta_d + \delta_o$ 。

我们首先建立关于  $\mathbf{X}$  的格拉姆矩阵  $\mathbf{G} = \mathbf{X}'\mathbf{X}$  ( $\mathbf{X}'$  是  $\mathbf{X}$  的共轭转置矩阵) 的对角和非对角元素满足的条件。

设  $1 \leq a < b \leq n - m + 1, a, b \in \mathbb{N}$ , 且  $b - a + 1 \leq m$ ,  $\mathbf{G}$  的每个对角元素为  $G_{i,i} = \sum_{j=a}^b x_j^2$ 。在引理 1 中, 令  $\sigma^2 = \frac{1}{m}, k_0 = b - a + 1, t = \frac{m^2 t_{b-a+1}^2}{16(b-a+1)}$ , 可得

$$\Pr\left(\left|G_{i,i} - \frac{b-a+1}{m}\right| \geq t_{b-a+1}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{m^2 t_{b-a+1}^2}{16(b-a+1)}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{m t_{b-a+1}^2}{16}\right) \quad (12)$$

又令  $0 < t_{b-a+1} \leq \frac{b-a+1}{m} - 1 + \delta_d$ , 则  $0 < t_{b-a+1} \leq \delta_d$ , 所以  $1 - \delta_d \leq \frac{b-a+1}{m} - t_{b-a+1} < \frac{b-a+1}{m} + t_{b-a+1} \leq 1 + \delta_d$ 。

设  $0 < t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{m-1} \leq t_m = \delta_d < 1$ 。由于  $t_1 \leq t_{b-a+1} \leq t_m$ , 于是,

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^n \left\{|G_{i,i-1}| \geq \delta_d\right\}\right) \leq \Pr\left(\bigcup_{i=1}^n \left\{\left|G_{i,i} - \frac{b-a+1}{m}\right| \geq t_{b-a+1}\right\}\right) \leq 2n \exp\left(-\frac{m t_{b-a+1}^2}{16}\right) \leq 2n \exp\left(-\frac{m t_1^2}{16}\right) \quad (13)$$

这样我们就建立了关于  $\mathbf{X}$  的格拉姆矩阵的对角元素满足的条件。

下面考虑非对角元素。注意到  $G_{i,j}$  ( $i \neq j$ ) 是矩阵  $\mathbf{X}$  的第  $i$  列和第  $j$  列的内积, 即  $G_{i,j} = \sum_l x_e x_f$  ( $1 \leq e < f \leq n - m + 1, l$  为项数, 且  $1 \leq l \leq m$ )。  $G_{i,j}$  中的每一项至多与另外两项有相同的因子, 例如

$$G_{m,m+1} = x_{n-2m+1}x_{n-2m+2} + x_{n-2m+2}x_{n-2m+3} + x_{n-2m+3}x_{n-2m+4} + \cdots + x_{n-m-1}x_{n-m} + x_{n-m}x_{n-m+1}$$

其中第 1 项和第 2 项中都有  $x_{n-2m+2}$ , 第 2 项和第 3 项中都有  $x_{n-2m+3}, \dots$ , 第  $m-1$  项和第  $m$  项中都有  $x_{n-m}$ 。所以, 可以将  $G_{i,j}$  分成两部分的和, 即  $G_{i,j} = G_{i,j}^1 + G_{i,j}^2$ , 且  $G_{i,j}^\lambda$  ( $\lambda = 1, 2$ ) 中的任意两项都不含有相同的因子。两部分的项数  $l_1$  和  $l_2$  或者相等 ( $l$  为偶数) 或者相差 1 ( $l$  为奇数), 其中  $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq m$ 。例如将  $G_{m,m+1}$  分成奇数

项之和与偶数项之和两部分,即

$$G_{m,m+1}^1 = x_{n-2m+1}x_{n-2m+2} + x_{n-2m+3}x_{n-2m+4} + x_{n-2m+5}x_{n-2m+6} + \dots$$

$$G_{m,m+1}^2 = x_{n-2m+2}x_{n-2m+3} + x_{n-2m+4}x_{n-2m+5} + x_{n-2m+6}x_{n-2m+7} + \dots$$

设  $0 < t'_1 \leq t'_2 \leq \dots \leq t'_{m-1} \leq t'_m = \frac{\delta_o}{K} < 1$ , 则  $t'_1 \leq t'_i \leq t'_m$ , 在引

理 2 中, 令  $t = \frac{t'_i}{2}, \sigma^2 = \frac{1}{m}$ , 分别取  $k_0 = l_1, k_0 = l_2$ , 则 Pr

$$\left( \left| G_{i,j}^1 \right| \geq \frac{t'_i}{2} \right) \leq 2 \exp \left( -\frac{mt_i'^2}{16(l_1/m+t_i'/4)} \right), \Pr \left( \left| G_{i,j}^2 \right| \geq \frac{t'_i}{2} \right)$$

$$\leq 2 \exp \left( -\frac{mt_i'^2}{16(l_2/m+t_i'/4)} \right), \text{ 于是可得}$$

$$\Pr \left( \left| G_{i,j} \right| \geq t'_i \right)$$

$$\leq \Pr \left\{ \left| G_{i,j}^1 \right| \geq \frac{t'_i}{2} \right\} \text{ or } \left\{ \left| G_{i,j}^2 \right| \geq \frac{t'_i}{2} \right\}$$

$$\leq 2 \max \left\{ \Pr \left( \left| G_{i,j}^1 \right| \geq \frac{t'_i}{2} \right), \Pr \left( \left| G_{i,j}^2 \right| \geq \frac{t'_i}{2} \right) \right\}$$

$$\leq 2 \max \left\{ 2 \exp \left( -\frac{mt_i'^2}{16(l_1/m+t_i'/4)} \right), \right.$$

$$\left. 2 \exp \left( -\frac{mt_i'^2}{16(l_2/m+t_i'/4)} \right) \right\} \quad (14)$$

于是,

$$\Pr \left( \left| G_{i,j} \right| \geq \frac{\delta_o}{K} \right) \leq \Pr \left( \left| G_{i,j} \right| \geq t'_i \right)$$

$$\leq 4 \exp \left( -\frac{mt_i'^2}{16(1+t_i'/4)} \right)$$

$$\leq 4 \exp \left( -\frac{mt_i'^2}{16(1+t_i'/4)} \right) \quad (15)$$

又由对称性可知  $G_{i,j} = G_{j,i}$ , 所以

$$\Pr \left( \left| G_{i,j} \right| \geq \frac{\delta_o}{K} \right) = \Pr \left( \left| G_{j,i} \right| \geq \frac{\delta_o}{K} \right),$$

且不相同的非对角元素  $G_{i,j}$  的总数为  $\frac{n^2-n}{2} < \frac{n^2}{2}$ , 那么就有

$$\Pr \left( \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left\{ \left| G_{i,j} \right| \geq \frac{\delta_o}{K} \right\} \right) \leq 2n^2 \exp \left( -\frac{mt_i'^2}{16(1+t_i'/4)} \right)$$

$$\leq 2n^2 \exp \left( -\frac{mt_i'^2}{20} \right) \quad (16)$$

这样我们就建立了关于  $\mathbf{X}$  的格拉姆矩阵的非对角元素满足的条件。

令  $\frac{t'_1}{t_1} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 并由 (13) 式和 (16) 式, 且  $n \geq 3$ , 由引理 3, 可以得到

$$\Pr(\mathbf{X} \text{ does not satisfy RIP}(K, \delta_K))$$

$$\leq \Pr \left( \bigcup_{i=1}^n \left\{ \left| G_{i,i-1} \right| \geq \delta_d \right\} \right) + \Pr \left( \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left\{ \left| G_{i,j} \right| \geq \frac{\delta_o}{K} \right\} \right)$$

$$\leq 2n \exp \left( -\frac{mt_1^2}{16} \right) + 2n^2 \exp \left( -\frac{mt_1'^2}{20} \right) \quad (17)$$

$$\leq 2n \exp \left( -\frac{mt_1'^2}{20} \right) + 2n^2 \exp \left( -\frac{mt_1'^2}{20} \right)$$

$$\leq n^3 \exp \left( -\frac{mt_1'^2}{20} \right)$$

令  $\delta_d = \delta_o = \frac{\delta_K}{2}$ , 则  $t'_1 \leq \frac{\delta_o}{K} = \frac{\delta_K}{2K}$ , 于是再令  $c_1 < \frac{t_1'^2}{20}$ , 则有

$$c_1 < \frac{\delta_K^2}{80K^2} \quad (18)$$

从而要使

$$\Pr(\mathbf{X} \text{ does not satisfy RIP}(K, \delta_K)) \leq \exp(-c_1 m) \quad (19)$$

成立, 只要  $n^3 \exp \left( -\frac{mt_1'^2}{20} \right) \leq \exp(-c_1 m)$ , 只要

$$m \geq \frac{60}{t_1'^2 - 20c_1} \ln n \quad (20)$$

又令  $c_2 \geq \frac{60}{t_1'^2 - 20c_1}$ , 即只要

$$m \geq c_2 \ln n \quad (21)$$

由于  $t_1'^2 \leq \frac{\delta_K^2}{4K^2}$ , 所以  $\frac{60}{t_1'^2 - 20c_1} \geq \frac{240K^2}{\delta_K^2 - 80c_1 K^2}$ , 从而

$$c_2 \geq \frac{240K^2}{\delta_K^2 - 80c_1 K^2} \quad (22)$$

由 (18) 式和 (22) 式可知, 存在满足条件的常数  $c_1$  和  $c_2$ , 再由 (19) 式和 (21) 式可知, 定理的结论成立。

必须指出的是, 对于定理中的序列  $\{x_i\}_{i=1}^n$ , 其长度为  $p = n - m + 1$ , 显然有  $p \leq n$ , 即训练序列的长度不长于信道冲激响应的长度。另外, 由  $\{x_i\}_{i=1}^n$  生成的  $m \times n$  阶托普利兹矩阵  $\mathbf{X}$ , 其行数小于列数, 即  $m < n$ 。

#### 4 仿真实验结果

假设信道冲激响应  $\mathbf{h}$  是一个长度为  $n = 128$  的序

列,且该信道仅有  $K=10$  个非零信道系数。根据压缩感知理论,所需的压缩感知观测矩阵的行数至少约为  $m \approx 4K=40$ 。现在发送一个长度为  $p=n-m+1=89$  的高斯随机序列  $\mathbf{s}$  作为训练序列,且该序列的均值为 0,方差为  $1/40$ 。在不考虑噪声影响的情况下,根据由训练序列产生的  $40 \times 128$  阶托普利兹观测矩阵和由此观测矩阵获得的观测值向量,分别对信道进行 CS 估计和 LS 估计,所获得的两种信道估计结果如图 1 所示,其中 CS 估计使用正交匹配追踪 (Orthogonal Matching Pursuit, 简称 OMP) 重构算法。

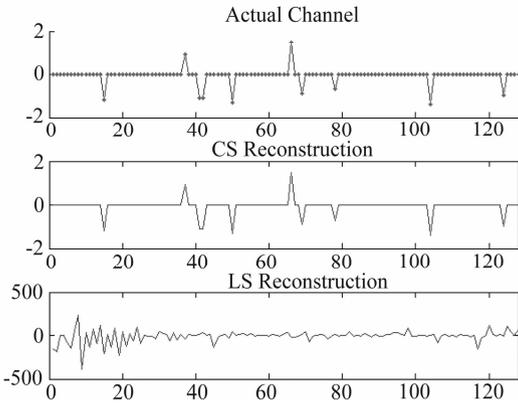


图 1 实际信道、CS 重构的信道、LS 重构的信道 ( $40 \times 128$  阶观测矩阵)

Fig.1 Actual channel, CS reconstruction, LS reconstruction ( $40 \times 128$  measurement matrix)

从图 1 中可以明显看出,虽然训练序列的长度不长于信道冲激响应的长度,但是 CS 估计能够正确确定所有的非零信道系数,准确重构实际信道冲激响应,估计效果较好,而 LS 估计结果与实际信道有很大差别,估计效果较差。这里所采用的观测矩阵是  $40 \times 128$  阶的,而 LS 估计若要达到较好的估计效果,所需要的观测矩阵至少应该是  $128 \times 128$  阶的。因此,在获得较好的估计效果的情况下,CS 估计比 LS 估计所需要的观测值个数少,二者的观测值个数之比大约为  $1/3.2$ 。CS 估计的算法执行时间大约是  $8ms$ ,LS 估计的算法执行时间大约是  $3ms$ ,二者的运行效率都较快,算法复杂度不高。CS 估计的重构算法的复杂度有所增加,是由于文中采用的 OMP 算法并未进行任何优化,若经过优化可大大降低算法复杂度,减少算法执行时间。

图 2 比较了 CS 估计和 LS 估计的均方误差 (Mean Square Error, 简称 MSE)。这里沿用图 1 的仿真实验条件,不改变信道参数,只改变观测值个数  $m$ ,对于每个  $m$ ,两种估计方法分别重复实验 100 次后取 MSE 的平均值。

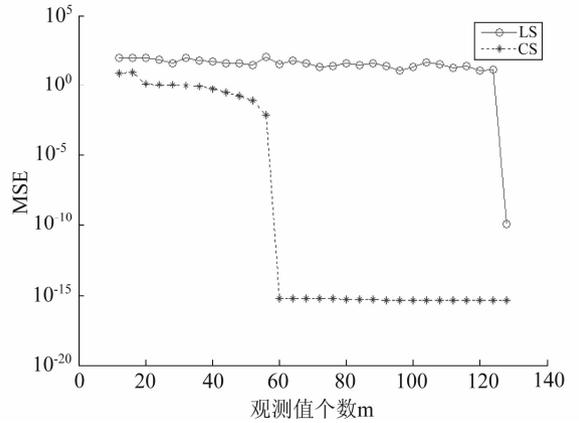


图 2 CS 和 LS 的 MSE  
Fig.2 MSE of CS and LS

从图 2 中可以明显看出,CS 估计的 MSE 性能优于 LS 估计的 MSE 性能。当  $60 \leq m < 128$  时,CS 估计效果较好,而 LS 估计效果较差;当  $m=128$  时,LS 估计才能达到与 CS 估计接近的估计效果。由于 CS 估计是一种高概率估计方法,所以为了从平均意义上保证达到较好的估计效果,这里 CS 估计所需的观测值个数比图 1 的多。在达到较高的估计精度的前提下,CS 估计的采样率  $m/n$  比 LS 估计的采样率至少能降低 50% 以上。

下面仍然假设信道冲激响应  $\mathbf{h}$  是一个长度为  $n=128$  的序列,但是该信道的非零信道系数由  $K=10$  逐步增加到  $K=60$ 。在确定的观测值个数条件下,对两种估计方法 CS 和 LS 分别重复实验 10 次,如果每次实验都成功,即  $\hat{\mathbf{h}}=\mathbf{h}$ ,就认为此观测值个数是合适的,并记录所需最小的观测值个数  $m$ ,如图 3 所示。

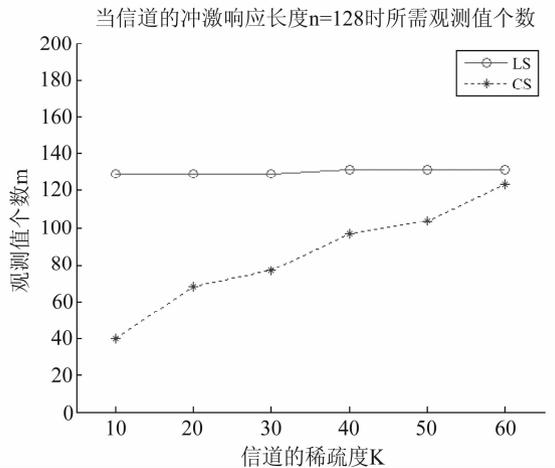


图 3 CS 和 LS 各自所需的观测值个数  $m$  与信道的稀疏度  $K$  的关系  
Fig.3 The relation between the number of measurements ( $m$ ) and the sparsity of channel ( $K$ ) for CS and LS

从图3中可以明显看出,CS估计比LS估计所需的观测值个数少,且在信道的稀疏度较低时能较大地缩小所需观测矩阵的规模。

从以上仿真实验结果可见,CS信道估计方法在某些典型的多径衰落信道环境中能够较好地实现对信道的估计,得到可靠的信道估计结果。CS信道估计方法能够利用稀疏先验信息,只需要用相对较少的观测值个数进行估计,就可以获得很好的估计效果,因此是一种比LS方法更优越的信道估计方法。

## 5 结束语

信道估计是无线通信系统中的一个关键问题。本文介绍了基于压缩感知的稀疏多径信道估计方法;证明了当训练序列的长度不长于信道冲激响应的长度,且托普利兹观测矩阵的行数小于列数时,观测矩阵仍满足RIP条件;明确提出了稀疏多径信道估计中所使用的观测矩阵的构造条件。实验结果验证了这种优化了的托普利兹观测矩阵的可行性和实用性。

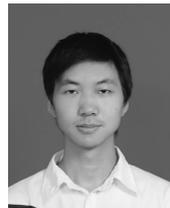
## 参考文献

- [1] M. Kocic, D. Brady, and M. Stojanovic. Sparse equalization for real-time digital underwater acoustic communications [C]. Proc. OCEANS '95, Oct. 1995, 3:1417-1422.
- [2] W. F. Schreiber. Advanced television systems for terrestrial broadcasting: Some problems and some proposed solutions [C]. Proc. IEEE, Jun. 1995, 83(6):958-981.
- [3] A. F. Molisch. Ultrawideband propagation channels-theory, measurement, and modeling [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, Sep. 2005, 54(5):1528-1545.
- [4] D. L. Donoho. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, Apr. 2006, 52(4):1289-1306.
- [5] E. J. Candès. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing [J]. C. R. Acad. Sci. Paris, Mar. 2008, Ser. I 346:589-592.
- [6] R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, and M. Wakin. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices [J]. Constructive Approximation, 2008, 28:253-263.
- [7] W. U. Bajwa, J. Haupt, G. Raz, and R. Nowak. Compressed channel sensing [C]. Proc. 42nd Annu. Conf. Information Sciences and Systems, Princeton, NJ, Mar.

2008;5-10.

- [8] W. U. Bajwa, J. Haupt, G. Raz, S. Wright, and R. Nowak. Toeplitz-structured compressed sensing matrices [C]. Proc. 14th IEEE/SP Workshop on Statistical Signal Processing, Madison, WI, Aug. 2007:294-298.
- [9] J. Haupt, W. U. Bajwa, G. Raz, and R. Nowak. Toeplitz compressed sensing matrices with applications to sparse channel estimation [J]. IEEE Transactions on Information Theory, Nov. 2010, 56(11):5862-5875.
- [10] E. J. Candès and M. B. Wakin. An introduction to compressive sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, Mar. 2008, 25(2):21-30.
- [11] L. Vuokko, V. M. Kolmonen, J. Salo, and P. Vainikainen. Measurement of large-scale cluster power characteristics for geometric channel models [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Nov. 2007, 55(11):3361-3365.
- [12] E. J. Candès and T. Tao. Decoding by linear programming [J]. IEEE Transactions on Information Theory, Dec. 2005, 51(12):4203-4215.
- [13] B. Laurent and P. Massart. Adaptive estimation of a quadratic functional by model selection [J]. The Annals of Statistics, Oct. 2000, 28(5):1302-1338.

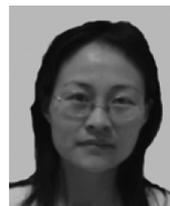
## 作者简介



孙晶明(1984-),男,湖北天门人,华中科技大学电子与信息工程系博士生,主要研究方向为无线通信、信道估计、压缩感知。E-mail:sjm@mail.hust.edu.cn



王 殊(1956-),男,河南南阳人,华中科技大学电子与信息工程系教授,博士生导师,主要研究方向为智能信号处理、无线传感器网络、嵌入式及DSP技术。E-mail:shuwang@mail.hust.edu.cn



董 燕(1972-),女,河南新乡人,华中科技大学电子与信息工程系副教授,主要研究方向为无线通信系统、空间通信网络、自然计算理论和应用。E-mail:dongyan@mail.hust.edu.cn