

# 求解稀疏最小二乘问题的新型 Bregman 迭代正则化算法

李 娟 李维国 郑昭静

(中国石油大学(华东)理学院, 山东 青岛 266580)

**摘 要:** 由于允许从少量数据中恢复原始图像或信号的压缩感知原理的引入, 基于  $\ell_1$  范数正则化的最优化方法近来越来越受到重视。利用最小二乘问题的一种等价形式和 Bregman 迭代方法的一些技巧, 本文给出了已有  $A^+$  线性 Bregman 迭代方法的一种推导过程。进一步结合不动点连续迭代方法和非满值最小二乘问题的等价形式, 获得了一种求解带有约束的  $\ell_1$  范数最小优化问题的新型算法, 并给出了新型算法与  $A^+$  线性 Bregman 迭代算法之间的联系, 同时证明了新算法所获得的解是所求问题的一个最优解。新算法与已有  $A^+$  算法类似, 仅仅需要矩阵向量乘法和压缩算子的计算, 从而使得新算法很容易实现, 且运算速度明显快于已有算法。最后, 通过数值实验表明, 新方法对于稀疏信号的恢复问题与原方法相比具有速度快、可有效减少停滞现象等优点。

**关键词:** 最小二乘问题; Bregman 迭代正则化; Moore—Penrose 逆; 正交投影

**中图分类号:** TP391, TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-0530(2012)08-1164-07

## A New Bregman Iterative Regularization Algorithm for Sparse Least Squares Problems

LI Juan LI Wei-guo ZHENG Zhao-jing

(College of Science, China University of Petroleum, Qingdao 266580, Shandong Province China)

**Abstract:** The class of  $\ell_1$  norm regularization problems has received much attention recently because of the introduction of “compressed sensing” which allows images and signals to be reconstructed from small amounts of data. With an equivalent form of least squares problem and some techniques of Bregman iterative methods, we give out a derivation of  $A^+$  linear Bregman iteration method that has already existed. Furthermore, combining with the continuous fixed-point iteration method and the new form of the non-surjective least square problem, a new method for solving the constrained  $\ell_1$  norm optimization problem is obtained. Simultaneously, the relationship between the  $A^+$  linear Bregman iteration and the new iterative method is given. The solution obtained by the new method is proved to be the optimal solution of the constrained  $\ell_1$  norm optimization problem that we considered. Similar to  $A^+$  linear Bregman iteration method that has exists, the new method needs only matrix-vector operation and shrinkage operator that is easy to implement in our considered problems. Finally, numerical results show that, for sparse signal recovery problem, the new method is faster, efficient and simple than  $A^+$  Bregman iterative methods that have been existed. At the same time, the new method reduced the stagnation of iterative procedure.

**Key words:** Least squares problem; Bregman iterative regularization; Moore-Penrose inverse; Orthogonal projection

## 1 引言

1998 年,Donoho<sup>[1]</sup>在研究信号稀疏处理问题时提出了一种新的原理——基追踪原理。设  $A \in R^{m \times n}$  ( $m < n$ ),  $u \in R^n$ ,  $g \in R^m$ , 基追踪的目的就是寻找下面最小优化问题的解:

$$\min_{u \in R^n} J(u), \quad s.t. \quad Au = g \quad (1)$$

其中  $J(u) = \|u\|_1 = \sum_{k=1}^n |u_k|$ 。

该模型通过求解带约束的  $\ell_1$  范数最小优化问题从而获得线性系统  $Au = g$  的稀疏解,是求解信号稀疏问题的一种有效工具。基追踪问题本身来源于压缩感知<sup>[2,3]</sup>的应用,其在图像压缩、图像修复和丢失数据恢复、图像分解和计算机视觉任务、MRI 和 CT、多感网络和分布感知、模拟以及信息的转化、生物传感器、芯片处理<sup>[4,5,6,7]</sup>等领域有广泛的应用,因此对于(1)的求解问题也随之引发了广泛的关注。

当  $A$  非满秩时,线性系统  $Au = g$  不一定存在解,一般情况下,我们会考虑通过最小二乘解,即

$$u = \arg \min_{u \in R^n} \|Au - g\|^2 \quad (2)$$

来代替线性系统  $Au = g$  的求解。除非特别说明,文中  $\|\cdot\|$  表示  $\ell_2$  范数。一般说来,(2)的解并不唯一,  $u^* := A^+g$  是其所有解中使得  $\ell_2$  范数最小的解,但其一般并不是稀疏的。注意  $A^+$  是  $A$  的 Moore—Penrose 逆,不一定是  $A^T(AA^T)^{-1}$ , 因为  $(AA^T)^{-1}$  不一定存在。

在图像去模糊,稀疏信号的恢复等一些实际问题中,我们希望找到(2)的一个稀疏解,由于  $\ell_1$  范数所具有的稀疏性,从而引发了人们对  $\ell_1$  范数最小优化问题的关注,即通过求解

$$\min_{u \in R^n} \{ \|u\|_1 : u = \arg \min_{u \in R^n} \|Au - g\|^2 \} \quad (3)$$

来获得(2)的一个稀疏解。注意当  $A$  满秩时(3)等价于(1)。

在求解方面,一般情况下,问题(1)的解可以通过解一个无约束最优化问题

$$\min_{u \in R^n} \{ \lambda J(u) + \frac{1}{2} \|Au - g\|^2 \} \quad (4)$$

来获得,其中  $\lambda > 0$  为正则化参数。事实上,(4)和(1)并不等价,除非存在零解。但是与求解(1)相比,问题(4)的求解更易于实现。

到目前为止,(4)的求解方法很多,给予关注最多

的是不动点连续迭代方法<sup>[4]</sup>和基于 Bregman 距离<sup>[6]</sup>的一些迭代方法,如 Bregman 迭代<sup>[5]</sup>,  $A^+$  线性 Bregman 迭代<sup>[8]</sup>和  $A^T$  线性 Bregman 迭代<sup>[8]</sup>,它们被认为是求解  $\ell_1$  范数最优化方法问题非常有效的方法,并且这些方法的适应范围也非常广泛。

本文通过研究获得了(3)的一种等价形式,利用该等价形式并结合不动点连续迭代方法<sup>[4]</sup>和 Bregman 迭代方法<sup>[5]</sup>的一些技巧从而推导出了  $A^+$  线性 Bregman 迭代<sup>[8]</sup>,进一步还获得了一种求解问题(3)的新方法,并给出了新方法与  $A^+$  线性 Bregman 迭代之间的联系,最后对新方法进行数值实验模拟。

## 2 基本知识

### 2.1 Moore—Penrose 广义逆

首先介绍矩阵 Moore—Penrose 广义逆的定义及其与本文有关的一些性质。

**定义 2.1**<sup>[9]</sup> 任意矩阵  $A \in R^{m \times n}$ , 矩阵  $B \in R^{n \times m}$  称为  $A$  的 Moore—Penrose 逆,记为  $A^+$ , 如果  $B$  满足下面条件

$$(1) \quad ABA = A \quad (2) \quad BAB = B \quad (3) \quad (AB)^T = AB \\ (4) \quad (BA)^T = BA$$

$A \{1, 3\}$  表示满足上述(1)和(3)的矩阵  $B \in R^{n \times m}$  的集合。一个矩阵  $B \in A \{1, 3\}$  称为  $A$  的  $\{1, 3\}$  一逆,也可以表示为  $A^{(1,3)}$ 。

**定理 2.1**<sup>[9]</sup> 设  $A \in R^{m \times n}$ ,  $r = \text{rank}(A)$ , 若存在两个正交阵  $P \in R^{m \times m}$  和  $Q \in R^{n \times n}$  使得

$$A = P \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} Q^T,$$

则

$$A^+ = Q \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times m} P^T.$$

其中  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ,  $\sigma_i > 0, i = 1, \dots, r$  为矩阵  $A$  的奇异值。

**引理 2.1** 对任意矩阵  $A \in R^{m \times n}$ ,  $A^+ = A^T(AA^T)^+$ 。

利用定理 2.1, 这个引理可以直接地证明。

**引理 2.2** 对任意矩阵  $A \in R^{m \times n}$ ,  $AA^+$  和  $A^+A$  都是对称半正定矩阵。

该引理根据定义 2.1 和定理 2.1 很容易证明。

**定理 2.2**<sup>[9]</sup> 设  $A \in R^{m \times n}$ ,  $u \in R^n$ ,  $g \in R^m$ , 则  $u = A^{(1,3)}g$  时,  $\|Au - g\|$  最小。对于线性系统  $Au = g$ , 向量

$u$  是一个最小二乘解当且仅当

$$Au = AA^{(1,3)}g$$

从而, 广义最小二乘解是

$$u = A^{(1,3)}g + (I_n - A^{(1,3)}A)z \quad (5)$$

对任意  $z \in R^n$ . 特别地, 我们可以选择  $A^+$  作为一个  $A^{(1,3)}$ .

## 2.2 Bregman 距离和线性 Bregman 迭代

**定义 2.2**<sup>[6]</sup> 设  $J$  为凸函数, 则  $u, v$  两点的关于  $J$  的 Bregman 距离定义为

$$D_J^p(u, v) = J(u) - J(v) - \langle p, u - v \rangle$$

其中向量  $p \in \partial J(v)$  为  $J$  在  $v$  处的次微分中的一个次梯度。

注意  $D_J^p(u, v)$  并不是一般意义上的距离, 因为  $D_J^p(u, v) \neq D_J^p(v, u)$ , 但  $D_J^p(u, v) \geq 0$  且  $D_J^p(u, v) \geq D_J^p(w, v)$  对位于连接  $u, v$  的线段上所有的点  $w$  都成立, 可见它是对  $u, v$  远近程度的一种度量。

求解问题(1)的 Bregman 迭代<sup>[5]</sup>为

$$\begin{cases} u^{k+1} \leftarrow \arg \min_{u \in R^n} \{ \mu D_J^p(u, u^k) + \frac{1}{2} \| Au - g \|^2 \} \\ p^{k+1} \leftarrow p^k - A^T(Au^{k+1} - g) \end{cases} \quad (6)$$

其中  $p^0 = u^0 = 0, \mu$  为参数。

针对  $J(u) = \|u\|_1$  的情形, 文献[10]给出了一种线性 Bregman 迭代

$$\begin{cases} v^{k+1} = v^k + (g - Av^k) \\ u^{k+1} = \delta T_\mu(A^T v^{k+1}) \end{cases} \quad (7)$$

其中  $u^0 = v^0 = 0, \mu$  和  $\delta$  为参数,  $T_\lambda(w) := [t_\lambda(w(1)), t_\lambda(w(2)), \dots, t_\lambda(w(n))]^T$

$$t_\lambda(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\xi| \leq \lambda \\ \text{sgn}(\xi)(|\xi| - \lambda), & \text{if } |\xi| > \lambda \end{cases} \quad (8)$$

称为软阈值算子<sup>[11]</sup>。

特别, 当  $AA^T$  正定时, 文献[7]还给出了一种被文献[8]称为  $A^+$  线性 Bregman 迭代的修正线性 Bregman 迭代方法, 其迭代公式如下

$$\begin{cases} v^{k+1} = v^k + (g - Av^k) \\ u^{k+1} = \delta T_\mu(A^+ v^{k+1}) \end{cases} \quad (9)$$

其中  $u^0 = v^0 = 0, \mu$  和  $\delta$  为参数。

## 3 稀疏最小二乘问题的 Bregman 迭代方法

对于  $u = \arg \min_{u \in R^n} \|Au - g\|^2$ , 由定理 2.2 知其通解可

表示为

$$u = A^+g + (I - A^+A)z, \quad \forall z \in R^n \quad (10)$$

**引理 3.1** 表达式(10)等价于

$$A^+Au = A^+g \quad (11)$$

证明. 如果  $u = A^+g + (I - A^+A)z$ , 则

$$A^+Au = A^+A(A^+g + (I - A^+A)z) = A^+g$$

相反地, 如果  $A^+Au = A^+g$ , 则

$$u = u - A^+Au + A^+g = A^+g + (I - A^+A)u \quad \square$$

由引理 3.1 及方程(11)表示的超平面可以看成是超平面  $Au = g$  的正交投影, 因此我们可以用下面的正交投影问题等价(3)

$$\min_{u \in R^n} \{ \|u\|_1 : A^+Au = A^+g \} \quad (12)$$

进而可将其转化为下面的无约束极小化问题

$$\min_{u \in R^n} \{ \mu \|u\|_1 + \frac{1}{2} \|A^+Au - A^+g\|^2 \} \quad (13)$$

根据引理 2.2, 矩阵  $A^+A$  的条件数是  $\|A^+A\| \cdot \|(A^+A)^+\| = 1$ , 所以用(13)的另一个重要原因是(11)在某种意义上可以看成是对线性系统  $Au = g$  的预优。文献[6]表明收敛率依赖于系数矩阵的条件数, 因此当  $A$  的条件数比较大时可以应用这种方法。

**定义 3.1** 如果  $a \in R^n$ , 矩阵  $P \in R^{n \times n}$  是对称半正定的, 则可定义如下加权半范数

$$\|a\|_p = \sqrt{a^T P a} \quad (14)$$

很容易证明其满足(1)  $\|a\|_p \geq 0$ ; (2)  $\|\lambda a\|_p = |\lambda| \|a\|_p$ ; (3)  $\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$ 。

又因为  $\arg \min_{u \in R^n} \|A^+Au - A^+g\|^2$  等价于  $\arg \min_{u \in R^n} \|u - A^+g\|_{A^+A}^2$ , 从而问题(13)可以变为

$$\min_{u \in R^n} \{ \mu \|u\|_1 + \frac{1}{2} \|u - A^+g\|_{A^+A}^2 \} \quad (15)$$

这里  $\|a\|_{A^+A} = \sqrt{a^T A^+A a}$  是向量  $a$  关于对称半正定矩阵  $A^+A$  的加权半范数。

### 3.1 $A^+$ 线性 Bregman 迭代的推导

对于任意矩阵  $A$ , 我们可以很容易地由(15)和线性 Bregman 迭代方法获得  $A^+$  线性 Bregman 迭代。

首先为了求解(15), 我们对(13)应用 Bregman 方法(6):

$$u^{k+1} \leftarrow \min_{u \in R^n} \{ \mu D_J^p(u, u^k) + \frac{1}{2} \|A^+Au - A^+g\|^2 \} \quad (16)$$

其中  $k=0, 1, \dots, u^0=0, v^0=0$ 。其次线性化(16)的最后一项为  $\frac{1}{2} \|A^+Au - A^+g\|^2 + \langle A^+(Au - g), u - u^k \rangle$  并增加近似项  $\frac{1}{2\delta} \|u - u^k\|^2$ , 于是可以得到下面的迭代格式

$$u^{k+1} \leftarrow \min_{u \in R^n} \{ \mu D_f^k(u, u^k) + \langle A^+(Au^k - g), u \rangle + \frac{1}{2\delta} \|u - u^k\|^2 \} \quad (17)$$

根据 Bregman 距离的定义及(17)的最优性条件可得

$$p^{k+1} \leftarrow p^k - A^+(Au^k - g) - \frac{1}{\delta}(u^{k+1} - u^k) \quad (18)$$

其中  $p^{k+1} \in \partial \mu J(u^{k+1})$ 。

下面对(17)和(18)进行简化。

首先,由(18)可得

$$\begin{aligned} p^{k+1} &= p^k - A^+(Au^k - g) - \frac{1}{\delta}(u^{k+1} - u^k) \\ &= \dots = \sum_{i=0}^k A^+(g - Au^i) - \frac{u^{k+1}}{\delta} \end{aligned} \quad (19)$$

于是(17)可以简化为

$$\begin{aligned} u^{k+1} \leftarrow \arg \min_{u \in R^n} \{ \mu J(u) - \langle p^k, u \rangle + \langle A^+(Au^k - g), u \rangle + \frac{1}{2\delta} \|u - u^k\|^2 \} \\ \leftarrow \arg \min_{u \in R^n} \{ \mu J(u) + \frac{1}{2\delta} \|u - \delta(p^k - A^+(Au^k - g) + \frac{u^k}{\delta})\|^2 \} \end{aligned}$$

$$\leftarrow \arg \min_{u \in R^n} \{ \mu J(u) + \frac{1}{2\delta} \|u - \delta v^k\|^2 \} \quad (20)$$

针对  $J(u) = \|u\|_1$ , (20) 的解为  $\delta T_\mu(v^k)$ , 因此由(19)和(20)可以获得下面的迭代公式即  $A^+$  线性 Bregman 迭代

$$\begin{cases} u^{k+1} \leftarrow \delta T_\mu(v^k) \\ v^{k+1} \leftarrow v^k + A^+(g - Au^{k+1}) \end{cases} \quad (21)$$

### 3.2 基于正交投影的 Bregman 正则化迭代

对于正交投影问题(15),我们从文献[4]中的迭代方案得到启示,希望设计一种收敛更快的迭代算法,使其具有下面的形式

$$u^{k+1} \leftarrow \arg \min_{u \in R^n} \{ \mu D_f^k(u, u^k) + \frac{1}{2\delta} \|u - A^+g\|_{A^+A}^2 \} \quad (22)$$

其中  $k=0, 1, \dots, p^0 = u^0 = 0, \delta$  是一个正参数并且  $J(u) = \mu \|u\|_1$ 。

如果令  $f(u) = -\langle p^k, u - u^k \rangle + \frac{1}{2\delta} \|u - A^+g\|_{A^+A}^2$ , 则

(22) 可以写成

$$u^{k+1} \leftarrow \arg \min_{u \in R^n} \{ \mu \|u\|_1 + f(u) \} \quad (23)$$

进一步运用连续框架下的不动点连续迭代[3]来近似求解,即

$$u^{k,j+1} := \text{sgn}(u^{k,j} - \tau \nabla f(u^{k,j})) \odot \max \{ \|u^{k,j} - \tau \nabla f(u^{k,j}) - \mu \tau, 0 \} \quad (24)$$

其中  $\nabla f(u)$  是  $f(u)$  的梯度,  $\tau$  是一个参数,  $\odot$  表示按分量相乘即  $(x \odot y)_i = x_i y_i$  对  $x, y \in R^n$ 。一般选择  $u^{k,0} = u^k, u^{k+1} = u^{k, M_k}$ , 其中  $M_k$  是一个有限常数。

根据软阈值算子(8)的定义, (24) 也可以等价的表示为

$$u^{k,j+1} = T_{\mu\tau}(u^{k,j} - \tau \nabla f(u^{k,j})) \quad (25)$$

为了简化, 对所有的  $k$ , 令  $M_k \equiv 1, v^{k+1} = u^k - \tau \nabla f(u^k), \tau = \delta$ , 于是有

$$\begin{aligned} v^{k+1} &= u^k - \delta \nabla f(u^k) \\ &= u^k + \delta p^k + A^+A(A^+g - u^k) \\ &= u^k + \delta p^k - A^+Au^{k+1} + A^+Au^{k+1} + A^+g - A^+Au^k \\ &= u^k + \delta p^{k+1} + A^+Au^{k+1} - A^+Au^k \\ &= (I - A^+A)u^k + \delta p^{k+1} + A^+Au^{k+1} \end{aligned} \quad (26)$$

令  $c^{k+1} = p^{k+1} + \frac{1}{\delta}A^+Au^{k+1}$ , 由(26)的最后等式和(23)的最优性条件:  $p^{k+1} = p^k - \frac{1}{\delta}A^+A(u^{k+1} - A^+g)$ , 对任意  $k$  我们可得

$$\begin{aligned} c^{k+1} &= p^{k+1} + \frac{1}{\delta}A^+Au^{k+1} = p^k + \frac{1}{\delta}A^+g \\ &= c^k + \frac{1}{\delta}A^+A(A^+g - u^{k+1}) = c^k + \frac{1}{\delta}A^+(g - Au^{k+1}) \end{aligned}$$

此外,我们引入

$$\begin{aligned} v^{k+1} &= (I - A^+A)u^k + \delta c^{k+1} \\ &= (I - A^+A)u^k + \delta c^k + A^+(g - Au^k) \\ &= (I - A^+A)u^{k-1} - (I - A^+A)u^{k-1} + (I - A^+A)u^k + \delta c^k + A^+(g - Au^k) \\ &= v^k + (I - A^+A)(u^k - u^{k-1}) + A^+(g - Au^k) \end{aligned}$$

因此,由(25)可以得到下面迭代

$$\begin{cases} v^{k+1} = v^k + (I - A^+A)(u^k - u^{k-1}) + A^+(g - Au^k) \\ u^{k+1} = \delta T_\mu(v^{k+1}) \end{cases} \quad (27)$$

其中  $u^{-1} = u^0 = 0, v^0 = 0, k=0, 1, \dots, \delta$  是一个正参数。

为了避免过度地计算矩阵和矩阵相乘,提高计算效率,我们令  $y^k = (I - A^+A)(u^k - u^{k-1}), r^k = b - Au^k$ , 则

$$\begin{aligned} y^k &= (I - A^+A)(u^k - u^{k-1}) \\ &= (u^k - u^{k-1}) + A^+(Au^{k-1} - g + g - Au^k) \\ &= (u^k - u^{k-1}) + A^+(r^k - r^{k-1}) \end{aligned}$$

同时,令 $z^k = A^+ r^k$ ,从而可得 $y^k = (u^k - u^{k-1}) + (z^k - z^{k-1})$ 。

综上所述,令 $u^0 = 0, v^0 = 0, y^0 = 0, z^0 = 0$ ,由(27)我们便可得到一种新的迭代方法——基于正交投影的 Bregman 迭代正则化方法

$$\begin{cases} v^{k+1} = v^k + y^k + z^k \\ u^{k+1} = \delta T_\mu(v^{k+1}) \\ r^{k+1} = g - Au^{k+1} \\ z^{k+1} = A^+ r^{k+1} \\ y^{k+1} = (u^{k+1} - u^k) + (z^{k+1} - z^k) \end{cases} \quad (28)$$

与 $A^+$ 线性 Bregman 迭代算法相比较,该迭代也仅仅涉及到矩阵向量乘 $Au^{k+1}$ , $A^+ r^{k+1}$ 和压缩算子 $\delta T_\mu(v^{k+1})$ ,从而在数值试验方面很容易实现。尽管这种新型迭代方法每步迭代的计算量近似等价于 $A^+$ 线性 Bregman 迭代(两次矩阵向量乘积和一次收缩运算),但是由于 $A^+$ 线性 Bregman 迭代算法在某一迭代过程中 $u_k$ 几乎保持不变,使得迭代过程出现了停滞现象,从而使得算法收敛十分缓慢(详见[10])。而在新的迭代过程中,由于其综合了前一步迭代的更多信息,从而有可能避免这一现象,使得迭代步数减少,进而极大地提高了计算效率。事实上, $A^+$ 线性 Bregman 迭代是 Bregman 迭代正则化在正交投影下的一种特殊情况。

**命题 3.1:** 当矩阵 $A$ 是满秩时,正交投影的 Bregman 迭代正则化方法(27)可以转化为(9)。

证明. 令 $v^{k+1} = A^+ z^{k+1}$ ,由(27)可以得到下面等式

$$A^+ z^{k+1} = A^+ z^k + (I - A^+ A)(u^k - u^{k-1}) + A^+(g - Au^k) \quad (29)$$

在上述等式两边同乘以 $A$ ,并且由 $AA^+ = A(A^T(AA^T))^{-1}$   
 $= I$ 很容易得到

$$z^{k+1} = z^k + (g - Au^k) \quad (30)$$

所以由(27)便有

$$\begin{cases} z^{k+1} = z^k + (g - Au^k) \\ u^{k+1} = \delta T_\mu(A^+ z^{k+1}) \end{cases} \quad (31)$$

即为 $A^+$ 线性 Bregman 迭代(9)。 □

下面我们将证明由算法 2 得到的解序列 $\{u^k\}$ 为极小化问题(3)的一个最优解,证明类似于文[4]。

**定理 3.1:** 设 $u$ 是满足 $u \in \arg \min_{u \in R^n} \|Au - g\|^2$ 的任意 $u, u^k$ 是满足算法 2 中 $A^+ Au^k = A^+ g$ 的任意 $u^k$ ,则 $u^k$ 是极小化问题(3)的一个最优解。

证明. 首先,如果 $u \in \arg \min_{u \in R^n} \|Au - g\|^2$ ,则 $A^+ Au = A^+ g$ ,结合 $A^+ Au^k = A^+ g$ 得 $A^+ Au - A^+ Au^k = 0$ 。

其次,由(23)的最优性条件, $p^{k+1} = p^k - \frac{1}{\delta} A^+ A(u^{k+1} - A^+ g)$ 及 $p^0 = 0, u^0 = 0$ ,得

$$p^1 = -\frac{1}{\delta} A^+ A(u^1 - A^+ g) \quad p^2 = -\frac{1}{\delta} A^+ A(u^2 + u^1 - 2A^+ g) \dots$$

由数学归纳法得

$$p^k = -\frac{1}{\delta} A^+ A\left(\sum_{i=1}^k u^i - kA^+ g\right)$$

对任意 $u$ ,由 Bregman 距离的非负性有

$$\begin{aligned} J(u^k) &\leq J(u) - \langle u - u^k, p^k \rangle \\ &= J(u) + \langle u - u^k, \frac{1}{\delta} A^+ A\left(\sum_{i=1}^k u^i - kA^+ g\right) \rangle \\ &= J(u) + \langle u - u^k, \frac{1}{\delta} A^T(AA^T)^+ A\left(\sum_{i=1}^k u^i - kA^+ g\right) \rangle \\ &= J(u) + \langle u - u^k, \frac{1}{\delta} A^T(A^T)^+ A^+ A\left(\sum_{i=1}^k u^i - kA^+ g\right) \rangle \\ &= J(u) + \langle A^+ Au - A^+ Au^k, \frac{1}{\delta} A^+ A\left(\sum_{i=1}^k u^i - kA^+ g\right) \rangle \\ &= J(u) \end{aligned}$$

其中第二个等式应用到了引理 2.1。

因此,对于满足 $u \in \arg \min_{u \in R^n} \|Au - g\|^2$ 的任意 $u$ 和满足 $A^+ Au^k = A^+ g$ 的任意 $u^k$ ,有 $J(u^k) \leq J(u)$ 。故 $u^k$ 是(12)的一个最优解。再根据(3)与(12)的等价性,从而 $u^k$ 也是极小化问题(3)的一个最优解。 □

### 4 数值结果

本节,我们利用数值软件 MATLAB 7.9.0(R2009b)对稀疏信号进行恢复来验证本文所提新方法的可行性和有效性,并将其与 $A^+$ 线性 Bregman 迭代作比较。

首先,针对 $J(u) = \|u\|_1$ ,我们给出 $A^+$ 线性 Bregman 迭代算法和新算法的具体方案。(见表 1)

测量矩阵 $A \in R^{m \times n}, rank(A) = r < m$ 是由函数 $randn(\cdot)$ 生成的随机矩阵, $n$ 维稀疏信号 $u$ 是由 $randperm(\cdot)$ 和 $randn(\cdot)$ 生成的,观察数据 $g$ 可由 $g = Au$ 得到。此外, $A^+$ 用 $pinv(\cdot)$ 来计算, $k$ 代表稀疏信号的非零个数。为了实现的方便,在数值试验中我们令 $k = 30$ (也可选其他值),停止准则为 $\|Au^k - g\| / \|g\| \leq 10e-7$ ,最大迭代次数 $K_{max} = 1000$ 。因为算法的迭代次数和运行时间基本是依赖于 $\mu$ 和 $\delta$ 的,因此 $\mu$ 和 $\delta$ 的选择对数值

试验是非常重要的。通过反复的数值试验,我们发现对  $A^+$  线性 Bregman 迭代算法来说  $\delta=1, \mu_1=5$  时试验效果是比较好的,对于基于正交投影的 Bregman 迭代正则化算法来说  $\delta=1, \mu_2=0.01$  时实验效果比较好。为

了更具有比较性,我们将两种算法的最佳效果进行对比,为此我们将固定  $\delta=1$ ,而对两种算法分别选择  $\mu_1=5, \mu_2=0.01$ 。此外利用相对误差  $\|u^k - u\| / \|u\|$  作为重构质量的标准。

表 1  $A^+$  线性 Bregman 迭代算法和新算法

Tab.1  $A^+$  linear Bregman iteration algorithm and the new algorithm

| 算法 1 $A^+$ 线性 Bregman 迭代算法    | 算法 2 新算法                                 |
|-------------------------------|--|
| Step1:初始化 $u^0=0, v^0=0$ ;    | Step1:初始化 $u^0=0, v^0=0, y^0=0, z^0=0$ ; |
| Step2:while “not converge” do | Step2:while “not converge” do            |
| 利用公式(9)                       | 利用公式(28)                                 |
| $k \leftarrow k+1$ ;          | $k \leftarrow k+1$ ;                     |
| end while                     | end while                                |

表 2 两种算法效果比较

Tab.2 Comparison of two algorithms

| (m, n, r)          | 算法   | 迭代次数 | 时间(不含 $A^+$ 的计算时间) | 相对误差          |
|--------------------|------|------|--------------------|---------------|
| (250, 500, 200)    | 算法 1 | 943  | 0.693              | $9.6460e-007$ |
|                    | 算法 2 | 65   | 0.041              | $4.0587e-007$ |
| (500, 1000, 300)   | 算法 1 | 500  | 1.691              | $1.2020e-006$ |
|                    | 算法 2 | 58   | 0.192              | $9.8310e-007$ |
| (1000, 2000, 600)  | 算法 1 | 822  | 10.395             | $1.0969e-006$ |
|                    | 算法 2 | 48   | 0.635              | $5.7746e-007$ |
| (2000, 4000, 1200) | 算法 1 | 967  | 53.170             | $8.6159e-007$ |
|                    | 算法 2 | 45   | 4.204              | $2.6530e-007$ |

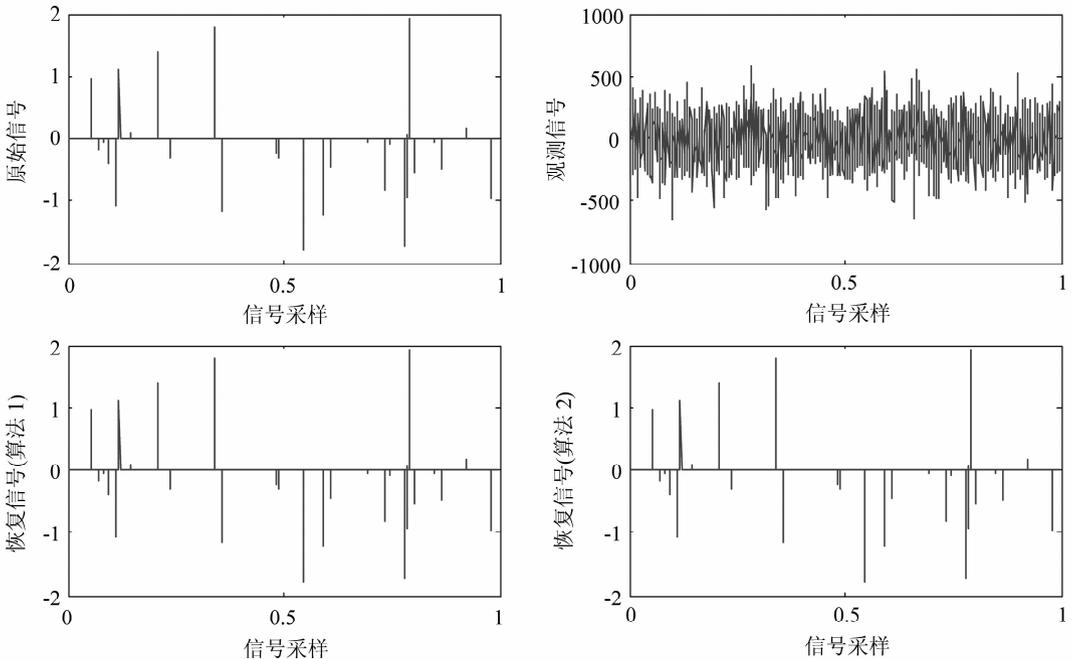


图 1 原始信号,噪声信号和恢复信号 ( $m=2000, n=4000, r=1200$ )

Fig.1 The original signals, noisy signals and recovered signals( $m=2000, n=4000, r=1200$ )

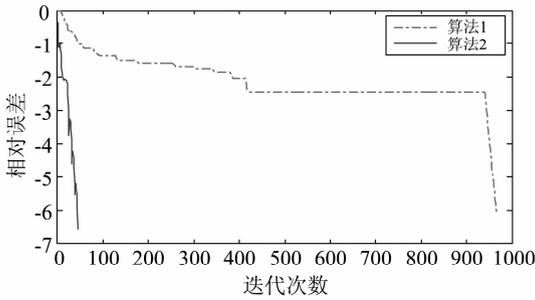


图2 两种算法相对误差衰减( $m=2000, n=4000, r=1200$ )

Fig.2 Relative error decay of two algorithms  
( $m=2000, n=4000, r=1200$ )

通过表2、图1、图2,我们可以直观清晰地看出新算法不仅加快了收敛速度,还有效的避免了停滞现象。

## 5 结束语

本文提出一种求解稀疏最小二乘问题的新 Bregman 迭代正则化方法,因为它仅仅需要矩阵向量乘和压缩算子的计算,从而使得新的算法很容易实现。同时文中还给出了新方法与  $A^+$  线性 Bregman 迭代的关系。数值试验表明本文所提出的新算法可以成功地应用于压缩感知问题和高精度低时耗的信号恢复等问题。下一步,我们将会进一步给出该新算法的收敛性,并希望能将这种方法应用到图像分割、图像去噪等其他方面。

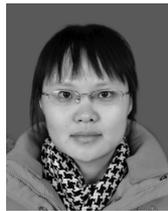
## 参考文献

- [1] Chen S. S., Donoho D. L., et al. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. SIAM J. Sci. Comput, 1998, 20: 33-61.
- [2] Candes E., Romberg J. and Tao T.. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2006, 52: 489-509.
- [3] Donoho D. L.. Compressed Sensing [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2006, 52: 1289-1306.
- [4] Hale E., Yin W. and Zhang Y.. A Fixed-Point Continuation Method for  $L_1$ -Regularization with Application to Compressed Sensing [R]. CAAM Technical report tr07-07, Rice University, Houston, TX, 2007.
- [5] Yin W., Osher S., et al. Bregman iterative algorithms for  $\ell_1$ -

Regularization with Application to Compressed Sensing [J]. SIAM J. Imaging Sciences, 2008, 1: 143-168.

- [6] Cai J. F., Chan R. H., et al. Linearized Bregman iterations for compressed sensing [J]. Math. Comp., 2009, 78 (267): 1515-1536.
- [7] Cai J. F., Osher S., et al. Linearized Bregman Iteration for Frame-Based Image Deblurring [J]. SIAM J. Imaging Sciences, 2009, 2(1): 226-252.
- [8] 张慧, 成礼智.  $A^+$  线性 Bregman 迭代算法 [J]. 计算数学, 2010, 32(1): 97-104.  
Zhang Hui, Cheng Lizhi.  $A^+$  linearized Bregman iteration algorithm [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2010, 32 (1): 97-104. (in Chinese)
- [9] Ben-Israel A. and Greville T. N. E.. Generalized inverses: Theory and Applications (M). 2nd ed. New York, NY: Springer, 2003: 35-130.
- [10] Osher S., Mao Y., et al. Fast Linearized Bregman Iteration for Compressed Sensing and Sparse Denoising [R]. Report 08-37, UCLA; CAM, 2008: 1-18.
- [11] Donoho D. L.. Denoising by soft-thresholding [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1995, 3: 613-627.

## 作者简介



李娟(1985-),女,山东费县人,中国石油大学(华东)计算数学专业研究生,主要研究方向为信号与图像处理、数值代数与数值计算。  
E-mail: lijjuan0120@163.com



李维国(1964-),男,山东费县人,1998年获得南京大学计算数学博士学位,现为中国石油大学(华东)理学院教授,主要研究方向为信号与图像处理、数值代数与数值软件。E-mail: liwg@upc.edu.cn



郑昭静(1986-),女,山东莱芜人,中国石油大学(华东)计算数学专业研究生,主要研究方向为信号与图像处理、数值代数与数值计算。  
E-mail: zhengzhaojing26@126.com