考虑载机位置误差的CLS多机无源定位算法

曲长文[1,2] 王昌海[2] 徐 征[2]
(1. 航空电子系统综合技术重点实验室，上海 200233；
2. 海军航空工程学院电子信息工程系，山东 烟台 264001)

摘 要：多机无源定位中存在载机位置误差却不予考虑时必然会降低目标的定位跟踪精度。为了解决存在载机位置误差情况下的定位问题，提出了一种考虑载机位置误差的约束最小二乘(CLS)多机无源定位算法。该算法对伪线性观测方程中由于测量误差和载机位置误差而导致的增广系数矩阵的误差协方差阵进行约束，并对伪线性观测方程的误差进行约束最小二乘处理，最终转化为对一组矩阵束的广义特征分解问题。仿真结果表明，相对于最小二乘(LS)算法和扩展卡尔曼滤波(EKF)算法，该算法具有更快的收敛速度和较高的定位精度，并且受载机位置误差影响小，在观测噪声比较大时仍能保持良好的定位性能。

关键词：多机无源定位；位置误差；约束最小二乘；特征分解
中图分类号：TN958.97 **文献标识码：**A **文章编号：**1003-0530(2012)07-0980-08

CLS Algorithm for Multi-plane Passive Location in the Presence of Observer Position Errors

QU Chang-wen[1,2] WANG Chang-hai[2] XU Zheng[2]
(1. Science and Technology on Avionics Integration Laboratory, Shanghai 200233, China; 2. Department of Electronic and Information Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China)

Abstract: Source location accuracy would inevitably deteriorate in the presence of observer position errors without taking them into account in multi-plane passive location system. An algorithm for multi-plane passive location that takes the observer position errors into account is proposed in order to solve the location problem in the presence of observer position errors. The proposed algorithm introduces the error correlation matrix of the argumented coefficient matrix in the observation equations caused by the measurement errors and observer position errors into the constraint, and uses the constrained least squares minimization on the errors of pseudo linear observation equations, which turns out to be equal to the generalized eigen-decomposition to a pair of matrix pencil. Simulation result indicates that the proposed algorithm achieves higher speed of convergence and high location precision, weakly affected by the observer position errors, and keeps good performance even in the condition of large measurement errors when compared with LS algorithm and EKF algorithm.

Key words: multi-plane passive location; position errors; constrained least-squares; eigen-decomposition

1 引言

在无源定位中，当观测站自身存在定位误差时，目标辐射源的定位跟踪精度势必受到影响，因此在定位算法中考虑观测站自身位置误差对于提高定位精度是必要的[1-4]。文献[1,3]分析了存在观测站位置误差却不予考虑时的MSE(均方误差)相对于考虑观测站位置误差时的CRLB(克拉美罗限)的恶化程度，并比较了存在观测站位置误差与不存在观测站位置误差的CRLB。文献[2]采用泰勒一阶近似将角度观测方程线性化，并通过高斯—牛顿迭代法对目标位置参量和观测站位置进行联合估计。这种方法在高斯噪声背景下与极大似然法等价，因此能够达到CRLB，但却需要初始估计，存在发散问题，并且可能无法达到全局最

收稿日期：2011-12-28；修回日期：2012-05-13
基金项目：航空科学基金(20105584004)

优解。文献[3,4]针对观测量为 TDOA(时差)和 FDOA(频差)的情况采用了两步最小二乘的方法将观测站自身位置误差考虑到定位算法中,其思路是通过引入冗余变量将观测方程伪线性化并通过最小二乘求解,然后考察引入的冗余变量与目标位置参量的关系并通过最小二乘进一步减小目标位置参量的估计误差,在进行两步最小二乘的求解过程中,观测站位置误差是通过影响权重矩阵来引入到定位算法中。这种算法虽然克服泰勒近似算法的缺点,但由于冗余变量的选择问题,要么多个观测站只根据当前时刻获得的观测量进行定位从而影响定位精度的提高,要么作为参考的主站静止以利用之前获得所有观测量进行批量处理,但会影响实际定位系统的应用。

国内无源定位算法研究中很少考虑观测站自身的位置误差。文献[5]将观测方程在目标状态的估计值和观测站位置观测值处一阶泰勒展开,并将观测站的位置误差补偿到测量误差中,从而利用等效测量误差进行滤波和参数估计。

文献[6]提出了一种单站渐进无偏的定位算法,其基本思想是在无约束的最小二乘问题中引入关于伪线性观测方程的误差协方差阵的约束条件,从而能够获得目标位置的渐进无偏估计。构造的二次等式约束采用 Lagrange 乘子法引入到目标函数中,并将约束最小二乘问题转化为对一组矩阵束的广义特征分解并求其最小特征值和对应特征向量的问题。文献[7]将这一思想进一步扩展到三维多站无源定位跟踪中,并取得理想的效果,但文献[6,7]都没有考虑观测站位置误差的影响。本文根据这种思想,在多机无源定位问题中,将由测量误差和载机位置误差导致的观测方程误差同时纳入约束中,采用 CLS 解决存在载机位置误差时的多机定位问题。

2　GLS 定位算法

本文讨论存在载机位置误差时,二维空间中多架飞机编队飞行对地面固定辐射源的无源定位问题,采用的观测量为方位角和到达时间差。若干架装载定位设备的飞机编队飞行,构成多机测角/测时差定位系统,以其中的某一飞机为主站,其他为辅站,辅站通过数据链向主站传输测量数据和导航数据,主站进行数据融合及定位解算。飞机的位置和速度信息可以通过全球导航系统(如 GPS)来提供[5]。以 GPS 为例,影响 GPS 定位精度的因素有很多,主要有[8]:卫星钟误差、星历误差、电离层附加延时误差、对流层附加延时误差、多路径误差、接收机噪声以及美国采取的 SA(选择可用性)措施等。GPS 的误差主要表现在测距误差,测距误差乘以位置几何误差系数便可得到位置误差[8]。在无源定位理论研究中,常将载机误差简化为相互独立的零均值高斯噪声[1-4]。

假设飞机编队中有 M 架飞机,单次观测条件下各飞机均可测得辐射源相对本机的方位角和到达时间,各辅站与主站信息交互后可以测得时差,可以获得的观测量如式(1)所示

$$\begin{cases}\beta_i=\bar{\beta}_i+\Delta\beta_i, \quad i=1,2,\cdots,M \\ r_{i1}=ct_{i1}=\bar{r}_{i1}+\Delta r_{i1}, \quad i=2,3,\cdots,M\end{cases} \tag{1}$$

其中,$\bar{\beta}_i$ 为飞机 i 的真实方位角,$\Delta\beta_i$ 为测角误差,假设相互独立并服从零均值方差为 $\sigma_{\beta i}^2$ 的高斯分布;$\bar{r}_{i1}$ 为目标辐射源到辅站 i 和到主站 1 的真实距离差,它等于电磁波传播速度乘以真实的时差,Δr_{i1} 为由于时差测量误差导致的距离差误差,假设相互独立并服从零均值方差为 σ_{ri1}^2 的高斯分布。

在第 k 个测量采样时刻,设飞机 i 的真实坐标为 $(\bar{x}_i(k),\bar{y}_i(k))$,通过机载定位设备测得的载机坐标为 $(x_i(k),y_i(k))$,则有 $\begin{cases}x_i(k)=\bar{x}_i(k)+\Delta x_i(k)\\ y_i(k)=\bar{y}_i(k)+\Delta y_i(k)\end{cases}$,其中,$\Delta x_i(k)$ 和 $\Delta y_i(k)$ 为载机位置误差,假设相互独立并服从零均值方差分别为 σ_{xi}^2 和 σ_{yi}^2 的高斯分布。

设目标辐射源的坐标为 (x,y),则关于方位角和位置差有如下两个方程

$$\tan\bar{\beta}_i(k)=\frac{\sin\bar{\beta}_i(k)}{\cos\bar{\beta}_i(k)}=\frac{x-\bar{x}_i(k)}{y-\bar{y}_i(k)} \tag{2}$$

$$\bar{r}_{i1}(k)=\bar{r}_i(k)-\bar{r}_1(k) \tag{3}$$

其中,$\bar{r}_i(k)$ 为目标辐射源到飞机 i 的真实距离,根据几何关系它可以表示为

$$\bar{r}_i(k)=[x-\bar{x}_i(k)]\sin\bar{\beta}_i(k)+[y-\bar{y}_i(k)]\cos\bar{\beta}_i(k) \tag{4}$$

式(2)~(4)可表示为线性方程的形式

$$\bar{A}(k)X=\bar{b}(k) \tag{5}$$

其中，$X=[x,y]^{\mathrm{T}}$ 为目标位置参数，$\bar{A}(k)=\begin{bmatrix}\bar{A}_\beta(k)\\ \bar{A}_r(k)\end{bmatrix}$，

$\bar{b}(k)=\begin{bmatrix}\bar{b}_\beta(k)\\ \bar{b}_r(k)\end{bmatrix}$，且 $\bar{A}_\beta(k)=\begin{bmatrix}\cos\bar{\beta}_1(k) & -\sin\bar{\beta}_1(k)\\ \cos\bar{\beta}_2(k) & -\sin\bar{\beta}_2(k)\\ \vdots & \vdots\\ \cos\bar{\beta}_M(k) & -\sin\bar{\beta}_M(k)\end{bmatrix}$，

$$\bar{b}_\beta(k)=\begin{bmatrix}\bar{x}_1(k)\cos\bar{\beta}_1(k)-\bar{y}_1(k)\sin\bar{\beta}_1(k)\\ \bar{x}_2(k)\cos\bar{\beta}_2(k)-\bar{y}_2(k)\sin\bar{\beta}_2(k)\\ \vdots\\ \bar{x}_M(k)\cos\bar{\beta}_M(k)-\bar{y}_M(k)\sin\bar{\beta}_M(k)\end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_r(k)=$$
$$\begin{bmatrix}\sin\bar{\beta}_2(k)-\sin\bar{\beta}_1(k) & \cos\bar{\beta}_2(k)-\cos\bar{\beta}_1(k)\\ \sin\bar{\beta}_3(k)-\sin\bar{\beta}_1(k) & \cos\bar{\beta}_3(k)-\cos\bar{\beta}_1(k)\\ \vdots & \vdots\\ \sin\bar{\beta}_M(k)-\sin\bar{\beta}_1(k) & \cos\bar{\beta}_M(k)-\cos\bar{\beta}_1(k)\end{bmatrix},$$

$$\bar{b}_r(k)=$$
$$\begin{bmatrix}\bar{x}_2(k)\sin\bar{\beta}_2(k)-\bar{x}_1(k)\sin\bar{\beta}_1(k)+\bar{y}_2(k)\cos\bar{\beta}_2(k)\\ -\bar{y}_1(k)\cos\bar{\beta}_1(k)+\bar{r}_{21}(k)\\ \bar{x}_3(k)\sin\bar{\beta}_3(k)-\bar{x}_1(k)\sin\bar{\beta}_1(k)+\bar{y}_3(k)\cos\bar{\beta}_3(k)\\ -\bar{y}_1(k)\cos\bar{\beta}_1(k)+\bar{r}_{31}(k)\\ \vdots\\ \bar{x}_M(k)\sin\bar{\beta}_M(k)-\bar{x}_1(k)\sin\bar{\beta}_1(k)+\bar{y}_M(k)\cos\bar{\beta}_M(k)\\ -\bar{y}_1(k)\cos\bar{\beta}_1(k)+\bar{r}_{M1}(k)\end{bmatrix}$$

由于实际中无法获得方位角、时差和载机坐标的真实值，因此当式(5)中用含有噪声的方位角、时差和载机坐标替换其真实值时等式关系便不再成立，并设方程的误差为 $\varepsilon(k)=\begin{bmatrix}\varepsilon_\beta(k)\\ \varepsilon_r(k)\end{bmatrix}$，即

$$\varepsilon(k)=A(k)X-b(k) \tag{6}$$

将 $\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon$ 关于 X 求最小化便得到最小二乘解，即

$$\hat{X}_{LS}=\left(A^{\mathrm{T}}A\right)^{-1}A^{\mathrm{T}}b \tag{7}$$

由于矩阵 A 和向量 b 中包含带有噪声的观测量，这将导致最小二乘估计为有偏估计[6]，这种有偏性不会随着观测时间的增加而降低，并会随着测量噪声的增大而更加明显。

定义增广系数矩阵

$$U(k)=[A(k),-b(k)] \tag{8}$$

和增广解向量

$$\theta=h[X^{\mathrm{T}},1]^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

其中，h 为不等于零的常数，其作用在文献[6,7]中有着明确的论述。从而式(6)可以重写为

$$\varepsilon(k)=U(k)\cdot\theta/h \tag{10}$$

本文中假设方位角测量误差 $\Delta\beta_i$ 较小，并满足 $\sin(\Delta\beta_i)\approx\Delta\beta_i$，$\cos(\Delta\beta_i)\approx1$，于是便有

$$\cos\beta_i=\cos\bar{\beta}_i\cos\Delta\beta_i-\sin\bar{\beta}_i\sin\Delta\beta_i\approx\cos\bar{\beta}_i-\sin\bar{\beta}_i\cdot\Delta\beta_i \tag{11}$$

$$\sin\beta_i=\sin\bar{\beta}_i\cos\Delta\beta_i+\cos\bar{\beta}_i\sin\Delta\beta_i\approx\sin\bar{\beta}_i+\cos\bar{\beta}_i\cdot\Delta\beta_i \tag{12}$$

将式(11)~(12)代人式(8)中，从而非增广系数矩阵可以写为两部分之和的形式

$$U(k)\approx\bar{U}(k)+\tilde{U}(k) \tag{13}$$

其中，$\bar{U}(k)$ 是式(8)代人真实测量值和载机位置的增广系数矩阵，即 $\bar{U}(k)=[\bar{A}(k),-\bar{b}(k)]$，$\tilde{U}(k)$ 为由测量误差和载机位置误差产生的误差系数矩阵，它可以写作两个分块矩阵的形式 $\tilde{U}(k)=\begin{bmatrix}\tilde{U}_\beta(k)\\ \tilde{U}_r(k)\end{bmatrix}$，其中 $\tilde{U}_\beta(k)$ 和 $\tilde{U}_r(k)$ 如式(14)~(17)所示

$$\tilde{U}_\beta(k)=\left[u_{\beta1}^{\mathrm{T}}(k),u_{\beta2}^{\mathrm{T}}(k),\cdots,u_{\beta M}^{\mathrm{T}}(k)\right]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

$$\tilde{U}_r(k)=\left[u_{r2}^{\mathrm{T}}(k),u_{r3}^{\mathrm{T}}(k),\cdots,u_{rM}^{\mathrm{T}}(k)\right]^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

其中，

$$u_{\beta i}(k)=\begin{bmatrix}-\sin\bar{\beta}_i(k)\cdot\Delta\beta_i(k)\\ -\cos\bar{\beta}_i(k)\cdot\Delta\beta_i(k)\\ \left[\bar{x}_i(k)\sin\bar{\beta}_i(k)+\bar{y}_i(k)\cos\bar{\beta}_i(k)\right]\Delta\beta_i(k)\\ -\cos\bar{\beta}_i(k)\cdot\Delta x_i(k)+\sin\bar{\beta}_i(k)\cdot\Delta y_i(k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

$$u_{ri}(k)=$$

$$\begin{bmatrix} \cos\bar{\beta}_i(k)\cdot\Delta\beta_i(k)-\cos\bar{\beta}_1(k)\cdot\Delta\beta_1(k) \\ -\sin\bar{\beta}_i(k)\cdot\Delta\beta_i(k)+\sin\bar{\beta}_1(k)\cdot\Delta\beta_1(k) \\ \left[-\bar{x}_i(k)\cos\bar{\beta}_i(k)+\bar{y}_i(k)\sin\bar{\beta}_i(k)\right]\Delta\beta_i(k)-\Delta r_{i1}(k) \\ +\left[\bar{x}_1(k)\cos\bar{\beta}_1(k)-\bar{y}_1(k)\sin\bar{\beta}_1(k)\right]\Delta\beta_1(k) \\ -\sin\bar{\beta}_i(k)\cdot\Delta x_i(k)-\cos\bar{\beta}_i(k)\cdot\Delta y_i(k) \\ +\sin\bar{\beta}_1(k)\cdot\Delta x_1(k)+\cos\bar{\beta}_1(k)\cdot\Delta y_1(k) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

假设已经累积获得了 N 次观测,由式(10)可以得到累积 N 次观测的伪线性观测方程的误差,即

$$\varepsilon=U\cdot\theta/h \tag{18}$$

其中,$U=[U^{\mathrm{T}}(1),U^{\mathrm{T}}(2),\cdots,U^{\mathrm{T}}(N)]^{\mathrm{T}}$,$\varepsilon=[\varepsilon^{\mathrm{T}}(1),\varepsilon^{\mathrm{T}}(2),\cdots,\varepsilon^{\mathrm{T}}(N)]^{\mathrm{T}}$,而扩维的误差系数矩阵也扩充为 $\tilde{U}=[\tilde{U}^{\mathrm{T}}(1),\tilde{U}^{\mathrm{T}}(2),\cdots,\tilde{U}^{\mathrm{T}}(N)]^{\mathrm{T}}$。

如前文所述,若仅仅将 $\min\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon$ 作为目标函数并求解只能得到有偏的最小二乘解,因此必须引入约束条件进行去偏处理。

定义约束矩阵

$$W=E[\tilde{U}^{\mathrm{T}}\tilde{U}] \tag{19}$$

根据分块矩阵的计算法则,可以得到

$$W=E\left[\sum_{k=1}^{N}\tilde{U}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{U}(k)\right] =E\left[\sum_{k=1}^{N}\tilde{U}_{\beta}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{U}_{\beta}(k)\right]+E\left[\sum_{k=1}^{N}\tilde{U}_{r}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{U}_{r}(k)\right] \tag{20}$$

为方便对式(20)进行求解,可将 $\tilde{U}_{\beta}(k)$ 和 $\tilde{U}_r(k)$ 分别分解为几个矩阵之和的形式,如式(21)和(22)

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{\beta}(k)=&\,diag(\Delta\beta_1(k),\Delta\beta_2(k),\cdots,\Delta\beta_M(k))\cdot V_1(k)\\&+diag(\Delta x_1(k),\Delta x_2(k),\cdots,\Delta x_M(k))\cdot V_2(k)\\&+diag(\Delta y_1(k),\Delta y_2(k),\cdots,\Delta y_M(k))\cdot V_3(k)\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{r}(k)=&\,diag(\Delta\beta_2(k),\Delta\beta_3(k),\cdots,\Delta\beta_M(k))\cdot V_4(k)\\&+\Delta\beta_1(k)\cdot V_5(k)\\&+diag(\Delta x_2(k),\Delta x_3(k),\cdots,\Delta x_M(k))\cdot V_6(k)\\&+diag(\Delta y_2(k),\Delta y_3(k),\cdots,\Delta y_M(k))\cdot V_7(k)\\&+\Delta x_1(k)\cdot V_8(k)+\Delta y_1(k)\cdot V_9(k)\\&+diag(\Delta r_{21}(k),\Delta r_{31}(k),\cdots,\Delta r_{M1}(k))\cdot V_{10}(k)\end{aligned} \tag{22}$$

其中,$V_1(k)\sim V_{10}(k)$ 的定义见附录。

假设各飞机的角度测量误差、时差测量误差和载机位置误差之间相互独立,则

$$\begin{aligned}E\left[\sum_{k=1}^{N}\tilde{U}_{\beta}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{U}_{\beta}(k)\right]&=\sum_{k=1}^{N}E\left[\tilde{U}_{\beta}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{U}_{\beta}(k)\right]\\&=\sum_{k=1}^{N}\left[V_1^{\mathrm{T}}(k)\,diag(\sigma_{\beta1}^2,\sigma_{\beta2}^2,\cdots,\sigma_{\beta M}^2)V_1(k)\right.\\&\quad+V_2^{\mathrm{T}}(k)\,diag(\sigma_{x1}^2,\sigma_{x2}^2,\cdots,\sigma_{xM}^2)V_2(k)\\&\quad\left.+V_3^{\mathrm{T}}(k)\,diag(\sigma_{y1}^2,\sigma_{y2}^2,\cdots,\sigma_{yM}^2)V_3(k)\right]\\&=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{M}\left[\sigma_{\beta i}^2\cdot\nu_{1i}^{\mathrm{T}}(k)\nu_{1i}(k)+\sigma_{xi}^2\cdot\nu_{2i}^{\mathrm{T}}(k)\nu_{2i}(k)+\sigma_{yi}^2\cdot\nu_{3i}^{\mathrm{T}}(k)\nu_{3i}(k)\right]\end{aligned} \tag{23}$$

若进一步假设 $\sigma_{xi}^2=\sigma_{yi}^2$,则由式(49)和式(50)可以求得

$$\sigma_{xi}^2\cdot\nu_{2i}^{\mathrm{T}}(k)\nu_{2i}(k)+\sigma_{yi}^2\cdot\nu_{3i}^{\mathrm{T}}(k)\nu_{3i}(k)=\sigma_{xi}^2\cdot I_0 \tag{24}$$

其中,$I_0=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,从而式(23)可以化简为

$$E\left[\sum_{k=1}^{N}\tilde{U}_{\beta}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{U}_{\beta}(k)\right]=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{M}\left[\sigma_{\beta i}^2\cdot\nu_{1i}^{\mathrm{T}}(k)\nu_{1i}(k)\right]+N\sum_{i=1}^{M}\sigma_{xi}^2\cdot I_0 \tag{25}$$

同理,$E\left[\sum_{k=1}^{N}\tilde{U}_{r}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{U}_{r}(k)\right]$ 也采用分块矩阵的乘法,可以求得如式(26)

$$\begin{aligned}E\left[\sum_{k=1}^{N}\tilde{U}_{r}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{U}_{r}(k)\right]=&\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=2}^{M}\left[\sigma_{\beta i}^2\cdot\nu_{4i}^{\mathrm{T}}(k)\nu_{4i}(k)\right]\\&+(M-1)\sigma_{\beta1}^2\cdot\sum_{k=1}^{N}\nu_5^{\mathrm{T}}(k)\nu_5(k)\\&+N\sum_{i=2}^{M}\sigma_{ri1}^2\cdot I_0+N\sum_{i=2}^{M}\sigma_{xi}^2\cdot I_0\\&+N(M-1)\sigma_{x1}^2\cdot I_0\end{aligned} \tag{26}$$

若进一步假设各飞机的方位角测量误差、时差(距离差)测量误差和载机位置误差的方差分别相等,即

$$\begin{cases}\sigma_{\beta1}^2=\sigma_{\beta2}^2=\cdots=\sigma_{\beta M}^2=\sigma_{\beta}^2\\\sigma_{r21}^2=\sigma_{r31}^2=\cdots=\sigma_{rM1}^2=\sigma_r^2\\\sigma_{x1}^2=\sigma_{x2}^2=\cdots=\sigma_{xM}^2=\sigma_{yi}^2=\sigma_x^2\end{cases} \tag{27}$$

则式(25)和(26)可以进一步简化为

$$E\left[\sum_{k=1}^{N}\tilde{U}_{\beta}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{U}_{\beta}(k)\right]=\sigma_{\beta}^2\cdot\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{M}\left[\nu_{1i}^{\mathrm{T}}(k)\nu_{1i}(k)\right]+NM\sigma_x^2\cdot I_0 \tag{28}$$

$$E\left[\sum_{k=1}^{N}\tilde{U}_r^{\mathrm{T}}(k)\tilde{U}_r(k)\right]$$

$$=\sigma_\beta^2\cdot\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=2}^{M}\left[\nu_{4i}^{\mathrm{T}}(k)\nu_{4i}(k)\right]+(M-1)\nu_5^{\mathrm{T}}(k)\nu_5(k)\right]$$
$$+\left[N(M-1)\sigma_r^2+2N(M-1)\sigma_x^2\right]\cdot I_0 \qquad (29)$$

将式(28)和(29)代人式(20)中便可求得经过 N 次测量累积的约束矩阵 W。从式(28)和式(29)可以看到,约束矩阵 W 中由于载机位置误差而引入的约束项为 $N(3M-2)\sigma_x^2\cdot I_0$。

文献[6]给出了约束条件如式(30)并论证了在该约束下的最小二乘解是渐进无偏的

$$\begin{cases}\min\theta^{\mathrm{T}}R\theta\\ s.t.\quad \theta^{\mathrm{T}}W\theta=1\end{cases} \qquad (30)$$

其中,$R=U^{\mathrm{T}}U$ 为增广系数矩阵的相关阵。通过 Lagrange 乘子法将式(30)中的二次等式约束引入目标函数中

$$L(\theta,\lambda)=\theta^{\mathrm{T}}R\theta+\lambda(1-\theta^{\mathrm{T}}W\theta) \qquad (31)$$

其中,λ 为 Lagrange 乘子。对式(31)求关于 θ 的偏导并令其等于零可得

$$R\theta=\lambda W\theta \qquad (32)$$

由式(32)可以看出 λ 和 θ 分别为矩阵束 (R,W) 的广义特征值和特征向量。式(32)两边左乘 θ^{T} 得到 $\lambda=\theta^{\mathrm{T}}R\theta$,这意味着求解目标函数的最小值问题等价于求最小广义特征值和对应特征向量的问题。当求出 θ 后,由于 $\theta(3)=h$,因此

$$\hat{X}_{CLS}=\frac{\theta(1:2)}{\theta(3)} \qquad (33)$$

需要指出的是,约束矩阵 W 中的方位角、时差和载机位置均为真实值,而真实测量值在实际中无法获知,因此可以用实际测量值代替真实值进行计算,并且当测量误差和载机位置误差较小时,产生的误差是可以忽略的[6]。

3 CLS 序贯估计

由于实际中获得的是量测序列,因此当获得一组新的量测时便可以用来提高算法的定位精度。若每获得一组新的量测便进行一次广义特征值分解,那么计算代价是很高的,而且也没能够利用好之前的计算结果,因此文献[6]给出了针对量测序列的序贯估计算法。下面在此基础上给出适于多机无源定位的序贯估计公式。

设 $R_N=U_N^{\mathrm{T}}U_N$ 为前 N 次观测采样的增广系数矩阵相关阵,W_N 为前 N 次观测采样的约束矩阵,根据它们的定义及式(20)(28)(29)可以推得

$$R_{N+1}=R_N+U^{\mathrm{T}}(N+1)U(N+1) \qquad (34)$$

$$W_{N+1}=W_N+\sigma_\beta^2\cdot\left\{\sum_{i=1}^{M}\left[\nu_{1i}^{\mathrm{T}}(N+1)\nu_{1i}(N+1)\right]\right.$$
$$+\sum_{i=2}^{M}\left[\nu_{4i}^{\mathrm{T}}(N+1)\nu_{4i}(N+1)\right]$$
$$\left.+(M-1)\nu_5^{\mathrm{T}}(N+1)\nu_5(N+1)\right\}$$
$$+\left[(3M-2)\sigma_x^2+(M-1)\sigma_r^2\right]\cdot I_0 \qquad (35)$$

设根据前 N 次量测求解的特征向量记为 θ_N,并令 $\varphi^{(1)}=\theta_N$,根据式(36)迭代求解 θ_{N+1}

$$\begin{cases}\varphi^{(j+1)}=R_{N+1}^{-1}W_{N+1}\varphi^{(j)}\\ \varphi^{(j+1)}=\dfrac{\varphi^{(j+1)}}{\sqrt{\varphi^{(j+1)\mathrm{T}}W_{N+1}\varphi^{(j+1)}}},\quad j=1,2,\cdots\end{cases} \qquad (36)$$

4 考虑载机位置误差的 CRLB

根据前文假设,任意时刻测得的方位角、时差(距离差)以及载机位置均服从高斯分布,并且相互独立。记前 N 次观测的角度观测向量为 β,距离差观测向量为 r,载机位置观测向量为 X_o,并令 $Z=\left[\beta^{\mathrm{T}},r^{\mathrm{T}}X_o^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$,那么前 N 次观测所获得的对数似然函数为

$$\ln p(Z\mid\phi)=\ln p(\beta\mid\phi)+\ln p(r\mid\phi)+\ln p(X_o\mid\phi)$$
$$=K_1-\frac{1}{2}(\beta-\bar{\beta})^{\mathrm{T}}Q_\beta^{-1}(\beta-\bar{\beta})$$
$$+K_2-\frac{1}{2}(r-\bar{r})^{\mathrm{T}}Q_r^{-1}(r-\bar{r})$$
$$+K_3-\frac{1}{2}(X_o-\bar{X}_o)^{\mathrm{T}}Q_x^{-1}(X_o-\bar{X}_o) \qquad (37)$$

其中,$\phi=[X^{\mathrm{T}},\bar{X}_o^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 为目标位置和载机的真实位置,K_1、K_2、K_3 为与 ϕ 无关的常数,Q 表示测量误差的协方差矩阵,根据前文假设 Q 可以写成测量方差乘以单位阵的形式。

Fisher 信息阵 J 定义如下

$$J=-E\left[\frac{\partial^2\ln p(Z\mid\phi)}{\partial\phi\partial\phi^{\mathrm{T}}}\right]=\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{12}^{\mathrm{T}} & J_{21}\end{bmatrix} \qquad (38)$$

其中,

$$J_{11}=-E\left[\frac{\partial^2\ln p(Z\mid\phi)}{\partial X\partial X^{\mathrm{T}}}\right]=\left(\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial X}\right)^{\mathrm{T}}Q_\beta^{-1}\left(\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial X}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial X}\right)^{\mathrm{T}}Q_r^{-1}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial X}\right) \qquad (39)$$

$$J_{12}=-E\left[\frac{\partial^2\ln p(Z\mid\phi)}{\partial X\partial\bar{X}_o^{\mathrm{T}}}\right]$$

$$=\left(\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial X}\right)^{\mathrm{T}}Q_\beta^{-1}\left(\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\bar{X}_o}\right)+\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial X}\right)^{\mathrm{T}}Q_r^{-1}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{X}_o}\right)\quad(40)$$

$$J_{22}=-E\left[\frac{\partial^2\ln p(Z\mid\phi)}{\partial\bar{X}_o\partial\bar{X}_o^{\mathrm{T}}}\right]$$

$$=\left(\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\bar{X}_o}\right)^{\mathrm{T}}Q_\beta^{-1}\left(\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\bar{X}_o}\right)+\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{X}_o}\right)^{\mathrm{T}}Q_r^{-1}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{X}_o}\right)+Q_x^{-1}\quad(41)$$

那么待估参数 ϕ 的 CRLB 为

$$CRLB(\phi)=J^{-1}\quad(42)$$

由于我们仅仅对目标位置参数的 CRLB 感兴趣,因此可以通过分块矩阵求逆[3]的公式得到式(44)

$$CRLB(X)=J_{11}^{-1}+J_{11}^{-1}J_{12}(J_{22}-J_{12}^{\mathrm{T}}J_{11}^{-1}J_{12})^{-1}J_{12}^{\mathrm{T}}J_{11}^{-1}\quad(43)$$

其中,$J_{11}^{-1}J_{12}(J_{22}-J_{12}^{\mathrm{T}}J_{11}^{-1}J_{12})^{-1}J_{12}^{\mathrm{T}}J_{11}^{-1}$ 为载机位置误差导致的 CRLB 增量。

5　仿真分析

为了研究本文提出的 CLS 定位算法在存在载机位置误差时的定位性能,本文以四架飞机编队飞行为例进行仿真。各飞机的初始坐标分别为(0,10km)、(0,−10km)、(−15km,0)、(15km,0),均沿 y 轴正向以 0.15km/s速度匀速飞行,目标辐射源固定不动,坐标为(120km,150km),蒙特卡洛试验次数为 $N=500$ 次,任意时刻 k 的算法的均方根误差(RMSE)定义为

$$\mathrm{RMSE}(k)=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left[(\hat{x}_j(k)-\bar{x})^2+(\hat{y}_j(k)-\bar{y})^2\right]}\quad(44)$$

图 1 给出了方位角测量误差的标准差为 $\sigma_\beta=0.5°$、时差测量误差的标准差为 $\sigma_t=100\mathrm{ns}$(从而 $\sigma_r=100\mathrm{ns}\times3\times10^5\mathrm{km/s}$)、载机位置误差的标准差为 $\sigma_x=\sigma_y=15\mathrm{m}$ 时,CLS 算法与 LS 算法、EKF 算法随着观测时间增加的 RMSE 曲线,并与 CRLB 进行对比。由图 1 可得 CLS 算法和 EKF 算法随着观测时间的增加,定位精度越来越高,且 CLS 算法的 RMSE 收敛速度最快,但 EKF 在将近 180s 后定位精度优于 CLS,这是因为 CLS 是渐进无偏的,在观测时间较少时仍然具有一定的偏差;LS 算法的 RMSE 收敛最慢,且定位精度最差,这也验证 LS 算法的有偏性。

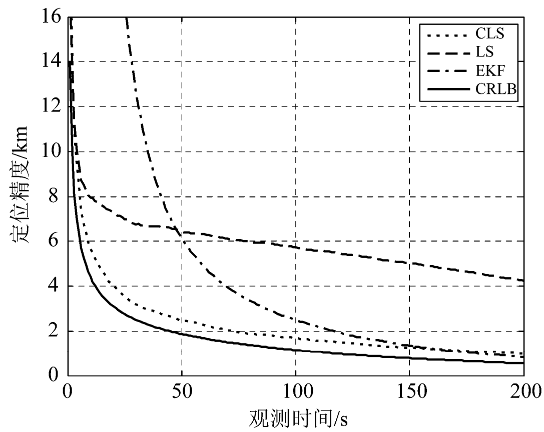


图 1　RMSE 与观测时间的关系曲线

Fig. 1　Variation of the RMSE versus measurement time

为了考察 CLS 算法的 RMSE 受观测噪声的影响,仿真中假设各飞机的方位角和时差的观测噪声服从零均值高斯分布,且方差分别相等。引入误差因子 f,并令 $\sigma_\beta=f\times0.1°$、$\sigma_t=f\times10\mathrm{ns}$,其中 $1\leqslant f\leqslant30$。图 2 给出了各算法在观测时间 $T=200\mathrm{s}$、$\sigma_x=\sigma_y=15\mathrm{m}$ 时的 RMSE 与观测噪声的关系曲线,并与 CRLB 进行对比。由图 2 可以看到随着观测噪声的增加,各算法的门限效益[9]也益趋显著,其中 LS 算法对观测噪声最为敏感,EKF 算法在观测噪声较大时也开始严重发散,CLS 算法表现较为稳健,在观测噪声较大时仍有较好的定位精度。

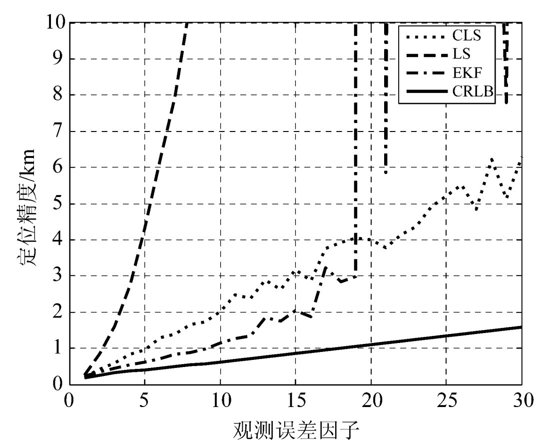


图 2　RMSE 与观测噪声的关系曲线

Fig. 2　Variation of the RMSE versus measurement noise

为了考察 CLS 定位算法受载机位置误差的影响,仿真中假设各飞机的位置误差服从零均值高斯分布,且方差分别相等,并令 $\sigma_x=\sigma_y=f\times10\mathrm{m}$,其中 $0\leqslant f\leqslant50$。图 3 给出了各算法在 $T=200\mathrm{s}$、$\sigma_\beta=0.5°$、$\sigma_t=100\mathrm{ns}$ 时的 RMSE 与载机位置误差的关系曲线,并与 CRLB 进

行对比。由图3可以看到EKF算法随着载机位置误差的增大,定位精度随之下降,因此受载机位置误差的影响比较大,而CLS算法几乎不受载机位置误差的影响,并基本与CRLB重合,即使载机位置误差达到500m时仍有很好的定位精度。

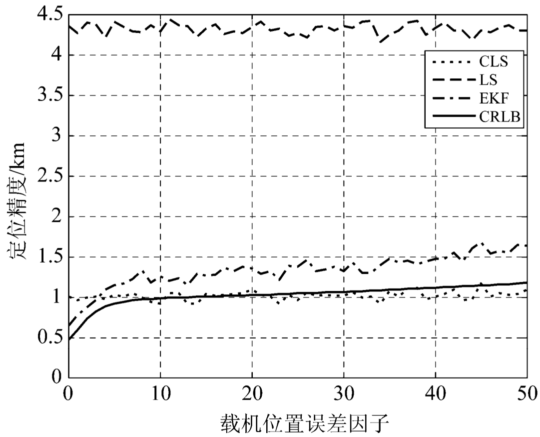


图3 RMSE与载机位置误差的关系曲线

Fig. 3 Variation of the RMSE versus observer position errors

6 结束语

本文提出了一种考虑载机位置误差的多机定位算法,该算法不需初始估计也不存在发散问题,仅仅需要将伪线性观测方程的增广系数矩阵的相关阵与测量噪声、载机位置误差产生的约束矩阵所构成的矩阵束进行广义特征分解便可以得到目标位置参数。计算机仿真结果表明,该算法定位精度高、收敛速度快,受载机位置误差影响小,在观测噪声较大时仍能保持良好的定位精度,因此有着较好的实用性。

附 录

$\tilde{U}_\beta(k)$可以分解为几个矩阵之和的形式,式(21)中包括的几个矩阵如式(45)~式(47)

$$V_1(k)=\left[\nu_{11}^{T}(k),\nu_{12}^{T}(k),\cdots,\nu_{1M}^{T}(k)\right]^{T} \tag{45}$$

$$V_2(k)=\left[\nu_{21}^{T}(k),\nu_{22}^{T}(k),\cdots,\nu_{2M}^{T}(k)\right]^{T} \tag{46}$$

$$V_3(k)=\left[\nu_{31}^{T}(k),\nu_{32}^{T}(k),\cdots,\nu_{3M}^{T}(k)\right]^{T} \tag{47}$$

其中,

$$\nu_{1i}(k)=\Big[-\sin\bar{\beta}_i(k),-\cos\bar{\beta}_i(k),\bar{x}_i(k)\sin\bar{\beta}_i(k)+\bar{y}_i(k)\cos\bar{\beta}_i(k)\Big] \tag{48}$$

$$\nu_{2i}(k)=\Big[0,0,-\cos\bar{\beta}_i(k)\Big] \tag{49}$$

$$\nu_{3i}(k)=\Big[0,0,\sin\bar{\beta}_i(k)\Big] \tag{50}$$

$\tilde{U}_r(k)$也可以分解为几个矩阵之和的形式,式(22)中包括的几个矩阵如式(51)~式(57)

$$V_4(k)=\left[\nu_{42}^{T}(k),\nu_{43}^{T}(k),\cdots,\nu_{4M}^{T}(k)\right]^{T} \tag{51}$$

$$V_5(k)=\left[\nu_{5}^{T}(k),\nu_{5}^{T}(k),\cdots,\nu_{5}^{T}(k)\right]^{T}_{(M-1)\times 3} \tag{52}$$

$$V_6(k)=\left[\nu_{62}^{T}(k),\nu_{63}^{T}(k),\cdots,\nu_{6M}^{T}(k)\right]^{T} \tag{53}$$

$$V_7(k)=\left[\nu_{72}^{T}(k),\nu_{73}^{T}(k),\cdots,\nu_{7M}^{T}(k)\right]^{T} \tag{54}$$

$$V_8(k)=\left[\nu_{8}^{T}(k),\nu_{8}^{T}(k),\cdots,\nu_{8}^{T}(k)\right]^{T}_{(M-1)\times 3} \tag{55}$$

$$V_9(k)=\left[\nu_{9}^{T}(k),\nu_{9}^{T}(k),\cdots,\nu_{9}^{T}(k)\right]^{T}_{(M-1)\times 3} \tag{56}$$

$$V_{10}(k)=\left[\nu_{10}^{T}(k),\nu_{10}^{T}(k),\cdots,\nu_{10}^{T}(k)\right]^{T}_{(M-1)\times 3} \tag{57}$$

其中,

$$\nu_{4i}(k)=\Big[\cos\bar{\beta}_i(k),-\sin\bar{\beta}_i(k),-\bar{x}_i(k)\cos\bar{\beta}_i(k)+\bar{y}_i(k)\sin\bar{\beta}_i(k)\Big] \tag{58}$$

$$\nu_5(k)=\Big[-\cos\bar{\beta}_1(k),\sin\bar{\beta}_1(k),\bar{x}_1(k)\cos\bar{\beta}_1(k)-\bar{y}_1(k)\sin\bar{\beta}_1(k)\Big] \tag{59}$$

$$\nu_{6i}(k)=\Big[0,0,-\sin\bar{\beta}_i(k)\Big] \tag{60}$$

$$\nu_{7i}(k)=\Big[0,0,-\cos\bar{\beta}_i(k)\Big] \tag{61}$$

$$\nu_8(k)=\Big[0,0,\sin\bar{\beta}_1(k)\Big] \tag{62}$$

$$\nu_9(k)=\Big[0,0,\cos\bar{\beta}_1(k)\Big] \tag{63}$$

$$\nu_{10}(k)=\Big[0,0,-1\Big] \tag{64}$$

参考文献

[1] Lu Xiaoning, Ho K C. Analysis of the Degradation in Source Location Accuracy in the Presence of Sensor Location Error[C]// Proceedings of 2006 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Toulouse, France, 2006: 925-928.

[2] Lu Xiaoning, Ho K C. Taylor-series Technique for Source Localization Using AOAs in the Presence of Sensor Localization Errors[C] // Proceedings of 2006 IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop.

MA,USA,2006:190-194.

[3] Ho K C, Lu Xiaoning, Kovavisaruch L. Source Localization Using TDOA and FDOA Measurements in the Presence of Receiver Location Errors: Analysis and Solution [J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2007,55(2):684-696.

[4] Ho K C,Kovavisaruch L, Parikh H. Source Localization Using TDOA with Erroneous Receiver Positions[C] // Proceedings of 2004 International Symposium on Circuits and System. British Columbia, Canada,2004:453-456.

[5] 孙仲康,郭福成,冯道旺,许耀伟,李宗华.单站无源定位跟踪技术[M].北京:国防工业出版社,2008. 94-96,303.

Sun Zhong-kang,Guo Fu-cheng,Feng Dao-wang,Xu Yao-wei,Li Zong-hua. Passive Location and Tracking Technology by Single Observer[M]. Beijing: National Defense Industry Press,2008. 94-96,303. (in Chinese)

[6] Ho K C,Chan Y T. An Asymptotically Unbiased Estimator for Bearings-only and Doppler-bearing Target Motion Analysis[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006,54(3):809-821.

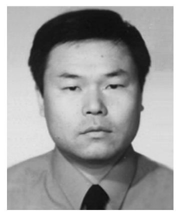
[7] 曲长文,徐征,李炳荣,苏峰.一种新的基于角度和时差的稳健定位跟踪算法[J].信号处理,2011,27(2):230-235.

Qu Chang-wen, Xu Zheng, Li Bing-rong, Su Feng. A novel robust algorithm for passive location and tracking with angles and time difference of arrival measurements [J]. Signal Processing,2011,27(2):230-235. (in Chinese)

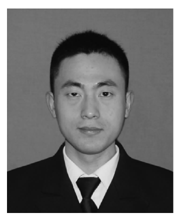
[8] 袁信,俞济祥,陈哲.导航系统[M].北京:航空工业出版社,1993. 99-103.

[9] Weiss A J,Weinstein E. Fundamental limits in passive time delay estimation—Part Ⅰ: Narrow-band systems [J]. IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing,1983,31(2):472-486.

作者简介



曲长文(1963-),男,山东济南人,2004 年于海军工程大学博士学位,现为海军航空工程学院博导、教授,主要研究方向为雷达信号处理、电子对抗、SAR 雷达技术等。E-mail:qcwwby@ sohu. com



王昌海(1986-),男,山东烟台人,海军航空工程学院硕士生,研究方向为无源定位跟踪技术。
E-mail:wchwchh@ sina. com

徐　征(1985-),男,山东青岛人,海军航空工程学院博士生,研究方向为无源定位跟踪技术。
E-mail:xuzheng85@ 126. com