

# 基于后向平滑容积卡尔曼滤波的单站无源定位算法

霍 光 李冬海

(解放军信息工程大学, 河南 郑州 450002)

**摘 要:** 单站无源定位跟踪是一个典型的非线性滤波问题, 由于测量精度不高、初始误差较大等原因容易导致滤波法定位精度低、收敛速度慢。本文将一种新型的滤波算法——容积卡尔曼滤波(cubature Kalman filter, CKF)应用于单站无源定位领域, 并将后向平滑思想与 CKF 算法相结合, 提出了一种后向平滑容积卡尔曼滤波算法(backward-smoothing CKF, BSCKF)。该算法使用容积数值积分原则直接计算非线性随机函数的均值和方差, 并采用后向平滑值进行递归滤波, 具有更优的非线性估计性能。仿真实验表明, 与 EKF、UKF 和 CKF 算法相比, BSCKF 算法的定位精度更高、收敛速度更快。

**关键词:** 单站无源定位跟踪; 滤波算法; 容积原则; 后向平滑; 容积卡尔曼滤波

**中图分类号:** TN971    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1003-0530(2013)01-0068-07

## A Single Observer Passive Location Algorithm Based on Backward-Smoothing Cubature Kalman Filter

HUO Guang LI Dong-hai

(PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** Single observer passive location and tracking is a typical nonlinear filtering problem, while it may have low precision estimation and slow convergence speed for the sake of low measurement precision and great initial error etc. A new filtering algorithm——cubature Kalman filter (CKF) is applied to single observer passive location and tracking in this paper, and a backward-smoothing CKF (BSCKF) is proposed, which combines backward-smoothing with the cubature Kalman filter. In the BSCKF algorithm which is of better nonlinear approximation properties, the cubature rule based numerical integration method is directly used to calculate the mean and covariance of the nonlinear random function and backward-smoothing result is used to the recursive filtering. Computer simulation shows that the locating performance of the BSCKF is apparently better than that of EKF, UKF and CKF, which has higher convergence precision and faster convergence speed.

**Key words:** single observer passive location and tracking; filtering algorithm; cubature rule; backward-smoothing; cubature Kalman filter

### 1 引言

单站无源定位系统本身不向外辐射电磁波并且仅采用一个观测平台对目标辐射源进行定位跟踪, 其隐蔽性强、避免了多个观测平台之间的数据融合与时间同步等问题。因为观测量是目标状态的非线性函数, 所以非线性滤波算法是单站无源定位的一项关键技术。但是由于参数测量精度不高、可观测性弱、初始值误差较大等原因往往会导致滤波法定位精度较差、

收敛速度慢, 因此寻找一种定位精度高、收敛速度快的滤波算法是单站无源定位技术需要解决的一个核心问题<sup>[1]</sup>。

经典的 EKF<sup>[2]</sup> 算法通过对非线性方程进行一阶泰勒级数展开来逼近真实的状态分布, 这种近似结果可能会带来较大的误差, 有时会导致滤波结果不稳定甚至发散。UKF<sup>[3]-[4]</sup> 算法通过采用一组确定的加权采样点来逼近随机变量的分布函数, 从而避免了对非线性方程作近似线性化带来的误差和复杂雅克比矩阵的计

算。当这组采样点通过非线性函数传播时,捕获非线性函数的统计特性<sup>[5]</sup>,精度可达到二阶,但是 UKF 需要合理地选择参数才能达到较好的滤波效果<sup>[6]</sup>。

容积卡尔曼滤波(cubature Kalman filter, CKF)<sup>[7]-[8]</sup>是一种新型的非线性滤波方法,其利用数值积分原则<sup>[9]</sup>对目标状态的后验概率进行近似,即采用一组等权值的容积点来计算后验概率密度。相比于 EKF、UKF 等算法,CKF 算法具有更好的估计性能,并且其实现更为简单<sup>[10]-[11]</sup>。对于单站无源定位问题,由于测量精度不高和初始误差较大等原因,会降低滤波算法对定位结果的估计精度和收敛速度。鉴于此,本文提出一种后向平滑容积卡尔曼滤波算法(backward-smoothing cubature Kalman filter, BSCKF),该算法在 CKF 算法基础上利用最新的量测信息进行后向平滑递归运算,有效地减小了观测噪声及测量误差等因素的影响,在提高估计精度的同时也加快了收敛速度。

## 2 单站无源定位模型

### 2.1 状态方程

考虑二维空频域定位模型<sup>[12]</sup>,如图 1 所示,假设目标与观测站在同一平面内,固定观测站位于坐标原点  $O(0,0)$ ,目标辐射源  $T$  在  $(x_k, y_k)$  处以速度  $(\dot{x}_k, \dot{y}_k)$  做匀速直线运动,观测站与目标辐射源之间的径向距离为  $r_k$ 。

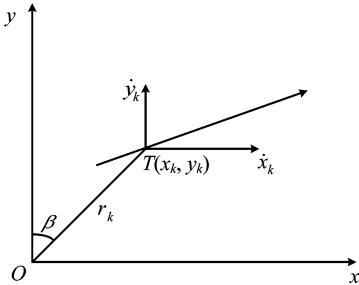


图 1 观测站与目标辐射源的位置关系示意图

Fig. 1 Position relationship between the observer and the target

目标的状态方程为

$$X_{k+1} = \Phi X_k + G w_k \quad (1)$$

其中,  $X_k = [x_k \ \dot{x}_k \ y_k \ \dot{y}_k]^T$  为运动目标辐射源在  $k$  时刻的

状态向量,状态转移矩阵  $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T_s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $T_s$  为观

测周期,状态噪声转移矩阵  $G = \begin{bmatrix} 0.5T_s^2 & 0 \\ T_s & 0 \\ 0 & 0.5T_s^2 \\ 0 & T_s \end{bmatrix}$ ,  $w_k$

为二维零均值高斯噪声向量,其协方差矩阵为  $Q_w$ ,状态噪声协方差阵为  $Q_k = G Q_w G^T$ 。

### 2.2 观测方程

基于二维空频域信息的观测量  $Z_k$  包括角度  $\beta_k$ 、角度变化率  $\dot{\beta}_k$  和多普勒频率变化率  $\dot{f}_{dk}$ ,系统的观测方程为

$$Z_k = \begin{bmatrix} \beta_k \\ \dot{\beta}_k \\ \dot{f}_{dk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{x_k}{y_k}\right) \\ \frac{y_k \dot{x}_k - x_k \dot{y}_k}{x_k^2 + y_k^2} \\ -\frac{(y_k \dot{x}_k - x_k \dot{y}_k)^2}{\lambda(x_k^2 + y_k^2)^{3/2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_{\beta_k} \\ \nu_{\dot{\beta}_k} \\ \nu_{\dot{f}_{dk}} \end{bmatrix} \triangleq h(X_k) + V_k \quad (2)$$

其中,  $\lambda$  为信号波长,  $V_k = [\nu_{\beta_k} \ \nu_{\dot{\beta}_k} \ \nu_{\dot{f}_{dk}}]^T$  是测量误差向量,  $\nu_{\beta_k}$ 、 $\nu_{\dot{\beta}_k}$ 、 $\nu_{\dot{f}_{dk}}$  相互独立,  $V_k \sim N(0, R_k)$ 。

结合系统的状态方程与观测方程,再采用一定的滤波算法对状态进行递推估计,即可以得到目标辐射源的状态信息,从而实现单站无源定位。

## 3 容积卡尔曼滤波算法

对于如下积分:

$$I(f) = \int_{R^n} f(x) \exp(-x^T x) dx \quad (3)$$

其中,  $I(f)$  是待求积分,  $R^n$  为积分域,  $f(x)$  为非线性函数,  $x$  为状态估计向量。容积卡尔曼滤波算法利用 Spherical-Radial 准则<sup>[7]</sup>,采用  $2n$  个等权值的容积点  $\{\xi_j, \omega_j\}$  来实现非线性近似,即

$$I(f) \approx \sum_{j=1}^m \omega_j f(\xi_j) \quad (4)$$

其中,容积点及其对应的权值分别为:

$$\xi_j = \sqrt{\frac{m}{2}} [1]_j, \omega_j = \frac{1}{m} \quad (5)$$

式中,  $m$  为容积点总数。采用三阶容积原则,容积点总数是状态维数的 2 倍,即  $m = 2n$ ,  $n$  是状态维数。  $[1]_j$  表示容积点集中的第  $j$  个元素,以  $n=4$  为例,容积点集

为  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ 。

容积卡尔曼滤波算法的流程如下<sup>[7]</sup>:

## (1) 时间更新

## ① 计算容积点

$$X_{j,k-1|k-1} = S_{k-1|k-1} \xi_j + \hat{X}_{k-1|k-1} \quad (6)$$

其中,  $S_{k-1|k-1} = chol\{P_{k-1|k-1}\}$ ,  $P_{k-1|k-1}$  为协方差矩阵,  $chol\{\cdot\}$  表示对矩阵进行 Cholesky 分解。

## ② 计算通过状态方程传播的容积点

$$X_{j,k|k-1}^* = \Phi X_{j,k-1|k-1} \quad (7)$$

## ③ 状态预测

$$\hat{X}_{k|k-1} = \sum_{j=1}^m \omega_j X_{j,k|k-1}^* \quad (8)$$

## ④ 协方差预测

$$P_{k|k-1} = \sum_{j=1}^m \omega_j X_{j,k|k-1}^* X_{j,k|k-1}^{*T} - \hat{X}_{k|k-1} \hat{X}_{k|k-1}^T + Q_{k-1} \quad (9)$$

## (2) 量测更新

## ① 计算容积点

$$X_{j,k|k-1} = S_{k|k-1} \xi_j + \hat{X}_{k|k-1} \quad (10)$$

其中,  $S_{k|k-1} = chol(P_{k|k-1})$ 。

## ② 计算通过观测方程传播的容积点

$$Z_{j,k|k-1} = h(X_{j,k|k-1}) \quad (11)$$

## ③ 量测预测

$$\hat{Z}_{k|k-1} = \sum_{j=1}^m \omega_j Z_{j,k|k-1} \quad (12)$$

## ④ 估计新息协方差

$$P_{zz,k|k-1} = \sum_{j=1}^m \omega_j Z_{j,k|k-1} Z_{j,k|k-1}^T - \hat{Z}_{k|k-1} \hat{Z}_{k|k-1}^T + R_k \quad (13)$$

## ⑤ 估计互协方差

$$P_{xz,k|k-1} = \sum_{j=1}^m \omega_j X_{j,k|k-1} Z_{j,k|k-1}^T - \hat{X}_{k|k-1} \hat{Z}_{k|k-1}^T \quad (14)$$

## ⑥ 计算 Kalman 增益

$$K_k = P_{xz,k|k-1} P_{zz,k|k-1}^{-1} \quad (15)$$

## ⑦ 状态更新

$$\hat{X}_{k|k} = \hat{X}_{k|k-1} + K_k (Z_k - \hat{Z}_{k|k-1}) \quad (16)$$

## ⑧ 估计协方差

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k P_{zz,k|k-1} K_k^T \quad (17)$$

由算法流程可见, CKF 依靠确定的样本点来求得概率密度函数, 不用计算雅可比矩阵, 比 EKF 实现更容易。相比于 UKF, CKF 的样本点在低一维子空间中对称出现, 且样本点对应的权值大小相等, 在选择方式上比 UKF 更简单, 而且无需提前设定参数, 适用性更强。

## 4 后向平滑容积卡尔曼滤波算法

容积卡尔曼滤波利用前一时刻的状态值递推并根据当前观测量进行修正来得到当前时刻的状态估计值, 因此前一时刻状态值的估计精度将直接对当前时刻状态估计值的精确性产生影响。

考虑到后向平滑<sup>[13]</sup>根据滤波后的结果进行递归运算, 由于经过前向滤波已经消除了大部分的误差, 所以将平滑后的值重新作为滤波的起始值可以进一步提高定位精度。从而本文结合后向平滑的思想与 CKF 算法建立了一种后向平滑容积卡尔曼滤波算法, 该算法的核心思想是: 由  $k-1$  时刻的状态经过一次 CKF 滤波得到  $k$  时刻的状态估计, 再经过后向平滑过程更新  $k-1$  时刻的估计值, 最后将更新后的  $k-1$  时刻的平滑值进行第二次 CKF 滤波得到  $k$  时刻的状态估计。

下面分析推导后向平滑过程。不失一般性, 以一维线性模型为例:

$$x(k) = \Phi(k, k-1)x(k-1) + \Gamma(k, k-1)w(k-1) \quad (18)$$

$$z(k) = H(k)x(k) + \nu(k) \quad (19)$$

取  $\{z(1), z(2), \dots, z(k-1), \bar{z}(k|k-1)\}$  为测量集合, 其中

$$\begin{aligned} \bar{z}(k|k-1) &= z(k) - \hat{z}(k|k-1) \\ &= H(k)x(k) + \nu(k) - H(k)\hat{x}(k|k-1) \\ &= H(k)\tilde{x}(k|k-1) + \nu(k) \end{aligned} \quad (20)$$

考虑到  $\bar{z}(k|k-1)$  独立于测量集合  $\{z(1), z(2), \dots, z(k-1)\}$ , 于是

$$\begin{aligned} \hat{x}(k-1|k) &= E[x(k-1) | z(1), z(2), \dots, z(k-1), \bar{z}(k|k-1)] \\ &= E[x(k-1) | z(1), z(2), \dots, z(k-1)] + \\ &\quad E[x(k-1) | \bar{z}(k|k-1)] \\ &= \hat{x}(k-1|k-1) + E[x(k-1) | \bar{z}(k|k-1)] \end{aligned} \quad (21)$$

由于  $x(k-1)$  和  $\bar{z}(k|k-1)$  是联合高斯分布, 且每一项都具有零均值, 因此

$$E[x(k-1) | \bar{z}(k|k-1)] = P_{xz} P_{zz}^{-1} \bar{z}(k|k-1) \quad (22)$$

其中

$$P_{xz} = E[x(k-1) \bar{z}^T(k|k-1)] \quad (23)$$

$$P_{zz} = E[\bar{z}(k|k-1) \bar{z}^T(k|k-1)] \quad (24)$$

从而

$$\hat{x}(k-1|k) = \hat{x}(k-1|k-1) + P_{xz} P_{zz}^{-1} \bar{z}(k|k-1) \quad (25)$$

下面对  $P_{xz}$  与  $P_{zz}$  分别作进一步的化简整理。

$$\begin{aligned}
P_{x_z} &= E[x(k-1)\tilde{z}^T(k|k-1)] \\
&= E[x(k-1)\tilde{x}^T(k|k-1)]H^T(k) + E[x(k-1)v^T(k)] \\
&= E[x(k-1)\tilde{x}^T(k|k-1)]H^T(k) \quad (26)
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(k|k-1) &= \Phi(k, k-1)\tilde{x}(k-1|k-1) + \\
&\quad \Gamma(k, k-1)w(k-1) \quad (27)
\end{aligned}$$

将其代入  $P_{x_z}$  表达式(26), 可得

$$\begin{aligned}
P_{x_z} &= E[x(k-1)\tilde{x}^T(k-1|k-1)]\Phi^T(k, k-1)H^T(k) \\
&\quad (28)
\end{aligned}$$

由于  $E[\hat{x}(k-1|k-1)\tilde{x}^T(k-1|k-1)] = 0$ , 因此进一步可得

$$\begin{aligned}
P_{x_z} &= E[\tilde{x}(k-1|k-1)\tilde{x}^T(k-1|k-1)]\Phi^T(k, k-1)H^T(k) \\
&= P(k-1|k-1)\Phi^T(k, k-1)H^T(k) \quad (29)
\end{aligned}$$

对于  $P_{zz}$ , 有

$$\begin{aligned}
P_{zz} &= E[\tilde{z}(k|k-1)\tilde{z}^T(k|k-1)] \\
&= E\{[H(k)\tilde{x}(k|k-1) + v(k)] \\
&\quad [H(k)\tilde{x}(k|k-1) + v(k)]^T\} \\
&= H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k) \quad (30)
\end{aligned}$$

结合式(29)和式(30), 可得

$$\begin{aligned}
P_{x_z} P_{zz}^{-1} \tilde{z}(k|k-1) &= P(k-1|k-1)\Phi^T(k, k-1)H^T(k) \\
&\quad [H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \tilde{z}(k|k-1) \\
&= P(k-1|k-1)\Phi^T(k, k-1)P^{-1} \\
&\quad (k|k-1)H^{-1}(k)\tilde{z}(k|k-1) \\
&= P(k-1|k-1)\Phi^T(k, k-1)P^{-1} \\
&\quad (k|k-1)[\hat{x}(k|k) - \hat{x}(k|k-1)] \quad (31)
\end{aligned}$$

在上式中令  $A(k-1) = P(k-1|k-1)\Phi^T(k, k-1)$

$P^{-1}(k|k-1)$ , 则有

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k-1|k) &= \hat{x}(k-1|k-1) + A(k-1) \\
&\quad [\hat{x}(k|k) - \hat{x}(k|k-1)] \quad (32)
\end{aligned}$$

即为状态后向平滑表达式, 其中  $A(k-1)$  可理解为后向平滑增益。

下面进一步分析协方差后向平滑过程。

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(k-1|k) &= x(k-1) - \hat{x}(k-1|k) \\
&= x(k-1) - \{\hat{x}(k-1|k-1) + A(k-1) \\
&\quad [\hat{x}(k|k) - \hat{x}(k|k-1)]\} \\
&= \tilde{x}(k-1|k-1) - A(k-1)[\hat{x}(k|k) - \hat{x}(k|k-1)] \quad (33)
\end{aligned}$$

进一步将上式移项可得

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(k-1|k) + A(k-1)\hat{x}(k|k) \\
= \tilde{x}(k-1|k-1) + A(k-1)\hat{x}(k|k-1) \quad (34)
\end{aligned}$$

接着用上式每一边的转置去后乘该式的对应边, 再取期望可得

$$\begin{aligned}
P(k-1|k) + A(k-1)P_{\hat{x}\hat{x}}(k|k)A^T(k-1) \\
= P(k-1|k-1) + A(k-1)P_{\hat{x}\hat{x}}(k|k-1)A^T(k-1) \quad (35)
\end{aligned}$$

其中

$$P_{\hat{x}\hat{x}}(k|k) = E[\hat{x}(k|k)\hat{x}^T(k|k)] \quad (36)$$

$$P_{\hat{x}\hat{x}}(k|k-1) = E[\hat{x}(k|k-1)\hat{x}^T(k|k-1)] \quad (37)$$

从而

$$\begin{aligned}
P(k-1|k) &= P(k-1|k-1) + A(k-1) \\
&\quad [P_{\hat{x}\hat{x}}(k|k-1) - P_{\hat{x}\hat{x}}(k|k)]A^T(k-1) \quad (38)
\end{aligned}$$

由于  $x(k) = \hat{x}(k|k-1) + \tilde{x}(k|k-1)$ , 并且  $E[\hat{x}(k|k-1)\tilde{x}^T(k|k-1)] = 0$ , 可得

$$P_{xx}(k) = P_{\hat{x}\hat{x}}(k|k-1) + P(k|k-1) \quad (39)$$

其中

$$P_{xx}(k) = E[x(k)x^T(k)] \quad (40)$$

将式(39)移项有

$$P_{\hat{x}\hat{x}}(k|k-1) = P_{xx}(k) - P(k|k-1) \quad (41)$$

类似地由  $x(k) = \hat{x}(k|k) + \tilde{x}(k|k)$  以及  $E[\hat{x}(k|k)\tilde{x}^T(k|k)] = 0$ , 可得

$$P_{xx}(k) = P_{\hat{x}\hat{x}}(k|k) + P(k|k) \quad (42)$$

移项有

$$P_{\hat{x}\hat{x}}(k|k) = P_{xx}(k) - P(k|k) \quad (43)$$

将式(41)和式(43)带入式(38)整理可得

$$\begin{aligned}
P(k-1|k) &= P(k-1|k-1) + A(k-1) \\
&\quad [P(k|k) - P(k|k-1)]A^T(k-1) \quad (44)
\end{aligned}$$

即为协方差后向平滑表达式。

结合式(32)、式(44)和容积卡尔曼滤波算法, BSCKF 算法的流程描述如下:

Step1 第一次前向滤波

根据式(6)-(17)得到  $k$  时刻的状态估计  $\hat{X}_{k|k}$  和协方差估计  $P_{k|k}$ 。

Step2 后向平滑过程

$$\hat{X}_{k-1|k} = \hat{X}_{k-1|k-1} + P_{k-1|k-1}\Phi^T(P_{k|k-1})^{-1}(\hat{X}_{k|k} - \hat{X}_{k|k-1}) \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
P_{k-1|k} &= P_{k-1|k-1} + (P_{k-1|k-1}\Phi^T(P_{k|k-1})^{-1}) \\
&\quad (P_{k|k} - P_{k|k-1})(P_{k|k-1}\Phi^T(P_{k|k-1})^{-1})^T \quad (46)
\end{aligned}$$

Step3 第二次前向滤波

将后向平滑值  $\hat{X}_{k-1|k}$ 、 $P_{k-1|k}$  代替第一次前向滤波中的  $\hat{X}_{k-1|k-1}$  和  $P_{k-1|k-1}$ , 再根据式(6)-(17)进行滤波运算, 便可得到经过后向平滑和第二次前向滤波后的状态估

计  $\hat{X}_{k|k,bs}$  及协方差估计  $P_{k|k,bs}$ , 其中  $\hat{X}_{k|k,bs}$  即为当前时刻状态估计的实时输出结果。

BCKF 算法的运算过程如图 2 所示。

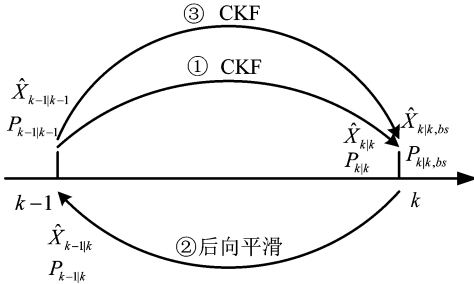


图 2 后向平滑容积卡尔曼滤波运算过程示意图

Fig. 2 The operation process of backward-smoothing cubature Kalman filter

## 5 实验仿真

为了检验 BCKF 算法的性能, 将其与 EKF、UKF、CKF 算法进行计算机仿真, 并对比实验结果。

这里采用相对位置误差 (Relative Position Error, RPE) 和相对速度误差 (Relative Velocity Error, RVE) 来描述算法的定位跟踪性能, 其定义为

$$\begin{cases} RPE = \frac{\sqrt{(x_k - \hat{x}_k)^2 + (y_k - \hat{y}_k)^2}}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \times 100\% \\ RVE = \frac{\sqrt{(\dot{x}_k - \hat{\dot{x}}_k)^2 + (\dot{y}_k - \hat{\dot{y}}_k)^2}}{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2}} \times 100\% \end{cases} \quad (47)$$

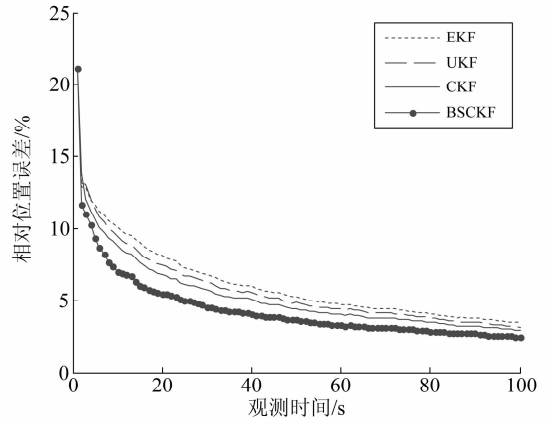
式中,  $(x_k, y_k)$  和  $(\dot{x}_k, \dot{y}_k)$  分别为  $k$  时刻的真实位置和速度,  $(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$  和  $(\hat{\dot{x}}_k, \hat{\dot{y}}_k)$  分别为  $k$  时刻位置和速度的估计值。

仿真条件: 在二维直角坐标系中, 观测站固定于原点。目标辐射源作匀速直线运动, 起始位置和速度分别为:  $(180, 90)$  km 和  $(-0.3, 0.1)$  km/s, 加速度扰动噪声为  $0.5 \text{ m/s}^2$ , 辐射源频率  $f = 3 \text{ GHz}$ 。观测周期  $T_s = 1 \text{ s}$ , 观测时间持续 100s。角度、角度变化率、多普勒频率变化率的测量精度给定两组不同的值:

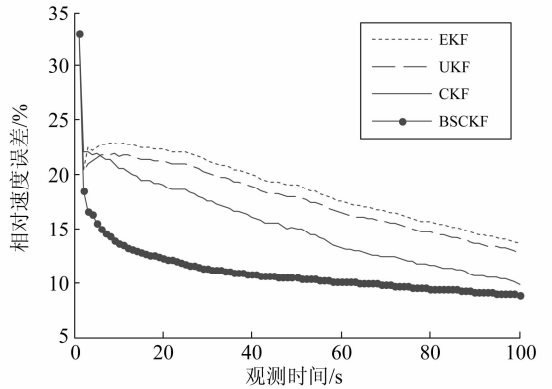
$$(1) \sigma_\beta = 5 \text{ mrad}, \sigma_{\dot{\beta}} = 0.2 \text{ mrad/s}, \sigma_{f_d} = 0.5 \text{ Hz/s};$$

$$(2) \sigma_\beta = 10 \text{ mrad}, \sigma_{\dot{\beta}} = 0.5 \text{ mrad/s}, \sigma_{f_d} = 1.5 \text{ Hz/s};$$

在不同观测精度下进行 200 次 Monte-Carlo 实验, 四种算法的性能对比结果如图 3、图 4 和表 1、表 2、表 3 所示。



(a) 相对位置误差曲线



(b) 相对速度误差曲线

图 3 观测精度 1 时四种算法性能比较

Fig. 3 Comparison of four algorithms in measurement precision 1

表 1 观测精度 1 时四种算法定位跟踪精度比较

Tab. 1 Comparison of four algorithms locating and tracking accuracy in measurement precision 1

(a) 相对位置误差

观测时间/s	观测精度 1 时相对位置误差/%			
	EKF	UKF	CKF	BCKF
10	10.04	9.41	8.75	7.02
30	6.75	6.24	5.71	4.56
60	4.77	4.43	4.04	3.31
80	4.12	3.82	3.54	2.89
100	3.49	3.17	2.96	2.49

(b) 相对速度误差

观测时间/s	观测精度 1 时相对速度误差/%			
	EKF	UKF	CKF	BCKF
10	22.69	21.64	20.52	13.56
30	21.28	20.21	17.61	11.25
60	17.51	16.47	13.19	10.11
80	15.64	14.69	11.64	9.46
100	13.61	12.74	9.85	8.89

由图 3 和表 1 可得,在高精度观测条件下,四种算法均具有较好的定位精度和收敛速度。其中,CKF 算法要优于 EKF 和 UKF 算法,这是因为 CKF 算法利用了容积数值积分原则,即采用一组等权值的容积点来计算目标状态的后验概率密度,从而具有更优的数值估计精度和稳定性。BSCKF 算法要优于 CKF 算法,这是由于该算法增加了下一时刻观测量的测量信息,通过对状态和协方差进行后向平滑,减小了测量误差及观测噪声等因素的影响,从而更新后的状态估计值要优于标准 CKF 算法的状态估计,提高了 CKF 算法的估计精度和收敛速度。

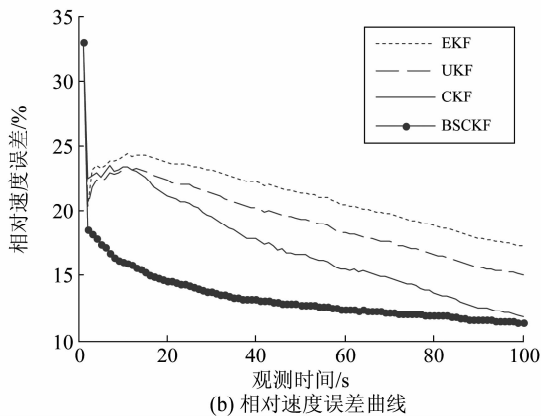
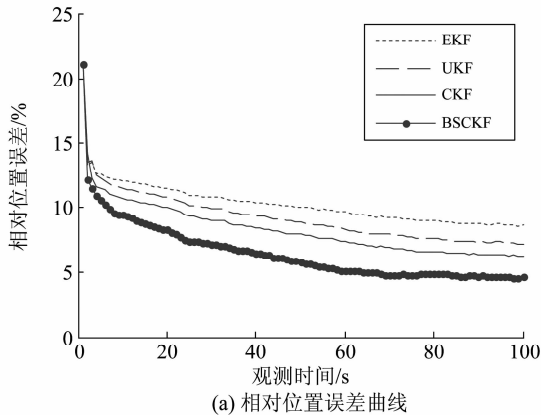


图 4 观测精度 2 时四种算法性能比较

Fig. 4 Comparison of four algorithms in measurement precision 2

表 2 观测精度 2 时四种算法定位跟踪精度比较  
Tab. 2 Comparison of four algorithms locating and tracking accuracy in measurement precision 2  
(a) 相对位置误差

观测时间/s	观测精度 2 时相对位置误差/%			
	EKF	UKF	CKF	BSCKF
10	12.02	11.45	10.68	9.42
30	10.81	9.94	9.05	7.23
60	9.63	8.35	7.37	5.18
80	8.96	7.59	6.62	4.96
100	8.61	7.23	6.32	4.65

(b) 相对速度误差

观测时间/s	观测精度 2 时相对速度误差/%			
	EKF	UKF	CKF	BSCKF
10	24.19	23.18	23.35	16.11
30	23.12	21.37	19.56	13.74
60	20.45	18.29	15.46	12.45
80	18.87	16.64	13.69	12.01
100	17.27	15.06	11.91	11.43

由图 4 和表 2 可得,在低精度观测条件下,四种算法的滤波性能差别较大。CKF 算法较 EKF 和 UKF 算法具有更高的定位精度和更快的收敛速度。而 BSCKF 算法由于后向平滑的作用,减小了大部分测量误差的影响,相比于 CKF 算法定位精度更高、收敛速度更快。同时也可以看出,BSCKF 算法在低精度参数测量条件下滤波性能的优越性体现得更加明显。

表 3 四种算法相对运行时间对比

Tab. 3 Comparison of relative simulation time on four algorithms

滤波算法	相对运行时间
EKF	1
UKF	1.54
CKF	1.36
BSCKF	2.81

表 3 给出了四种算法的相对运行时间。可以看出,BSCKF 算法在时间复杂度上有一定的增加,这是因为该算法在 CKF 算法的基础上增加了后向平滑和再一次的 CKF 前向滤波过程。

分析可知,EKF 算法的计算复杂度为  $o(L^3)$  ( $L$  为状态量维数)。在 UKF 算法中,确定采样点的计算量为  $o(m_u(L^3/6))$  ( $m_u$  为采样点个数),时间更新部分的计算量为  $o(m_u L^3)$ ,量测更新部分的计算量为  $o(m_u M^2)$  ( $M$  为观测量维数)<sup>[14]</sup>。在标准 CKF 算法中,容积点计算量为  $o(m_c(L^3/6))$  ( $m_c$  为容积点个数),时间更新部分的计算量为  $o(m_c L^3)$ ,量测更新部分的计算量为  $o(m_c M^2)$ 。BSCKF 算法由于采用了后向平滑过程,计算量约为标准 CKF 算法的 2 倍。当观测精度较差以及对定位精度要求较高时,在满足实时性的条件下,以增加计算量来提高滤波性能是值得的。

## 6 结束语

本文提出了一种后向平滑容积卡尔曼滤波算法并应用于单站无源定位领域。该算法利用容积数值积分

原则来逼近目标状态的后验概率,并通过前向滤波和后向平滑相迭代来提高定位性能,原理简单,实现容易,既无需像 EKF 算法计算雅克比矩阵,也不必像 UKF 算法预先设定参数。通过结合空频域定位模型对算法进行仿真实验可表明,与传统的滤波算法相比,BSCKF 算法可以获得更高的定位精度和更快的收敛速度。需要指出的是,该算法获取更优的非线性估计性能是以增加时间复杂度为代价的,当观测精度较低并且对定位精度要求较高时,在满足实时性的要求下,这种以计算复杂度换取定位精度的方法也是值得的。同时本算法也适用于其他非线性滤波领域,对工程实践具有一定的指导意义。

#### 参考文献

- [1] 孙仲康,郭福成,冯道旺,许耀伟,李宗华. 单站无源定位跟踪技术[M]. 北京:国防工业出版社,2008.  
SUN Zhong-kang, GUO Fu-cheng, FENG Dao-wang, XU Yao-wei, LI Zong-hua. Passive Location and Tracking Technology by Single Observer[M]. Beijing: National Defense Industry Press,2008. (in Chinese)
- [2] Shalom Y B, Li X R, Thiagalingam K. Estimation with applications to tracking and navigation[M]. New York: Wiley,2001:381-394.
- [3] Julier S, Uhlmann J, Durrant-Whyte H F. A new approach for filtering nonlinear systems[C]. In Proceeding of the American Control Conference. Seattle,WA;IEEE, 1995:1628-1632.
- [4] Julier S, Uhlmann J, Durrant-Whyte H F. A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators[J]. IEEE Trans on AC, 2000, 45(3): 477-482.
- [5] 袁罡,陈鲸. 基于 UKF 的单站无源定位与跟踪算法[J]. 电子与信息学报,2008,30,(9):2120-2123.  
YUAN Gang, CHEN Jing. An Algorithm Based on UKF for Single Observer Passive Location and Tracking[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2008, 30,(9):2120-2123. (in Chinese)
- [6] Julier S, Uhlmann J. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. Proceeding of the IEEE, 2004, 92(3): 401-422.
- [7] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 2009,54(6):1254-1269.
- [8] Arasaratnam I, Haykin S, Hurd T R. Cubature Kalman filtering for continuous-discrete systems: theory and simulations[J]. IEEE Trans. on Signal Processing,2010,58(10):4977-4993.
- [9] F. B. Hildebrand. Introduction to Numerical Analysis[M]. Dover Publication, 2008.
- [10] 穆静,蔡远利. 迭代容积卡尔曼滤波算法及其应用[J]. 系统工程与电子技术,2011,33(7):1454-1457.  
MU Jing, CAI Yuan-li. Iterated cubature Kalman filter and its application[J]. Systems Engineering and Electronics, 2011,33(7):1454-1457. (in Chinese)
- [11] 刘江,蔡伯根,唐涛,王剑. 基于 CKF 的 GNSS/INS 列车组合定位鲁棒滤波算法[J]. 交通运输工程学报,2010,10(5):102-107.  
LIU Jiang, CAI Bai-gen, TANG Tao, WANG Jian. CKF-based robust filtering algorithm for GNSS/INS integrated train positioning[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering,2010,10(5):102-107. (in Chinese)
- [12] 李宗华,肖予钦,周一宇,孙仲康. 利用频域和空域信息的单站无源定位跟踪算法[J]. 系统工程与电子技术,2004,26(5):613-616.  
LI Zong-hua, XIAO Yu-qin, ZHOU Yi-yu, SUN Zhong-kang. Single-observer passive location and tracking algorithms using frequency and spatial measurements[J]. Systems Engineering and Electronics,2004,26(5):613-616. (in Chinese)
- [13] 曹意,茅旭初. 基于非线性滤波和平滑相迭代的 GPS 定位估计算法[J]. 上海交通大学学报,2009,43(7):1108-1112.  
CAO Yi, MAO Xu-chu. A Nonlinear Iterative Filtering-Smoothing Algorithm for GPS Positioning. JOURNAL OF SHANGHAI JIAOTONG UNIVERSITY, 2009, 43(7):1108-1112. (in Chinese)
- [14] 陆海勇,赵伟,熊剑,赖际舟,刘建业. 捷联惯导初始对准的超球体采样 SRUKF 算法[J]. 应用科学学报,2009,27(3):311-315.  
LU Hai-yong, ZHAO Wei, XIONG Jian, LAI Ji-zhou, LIU Jian-ye. SINS Initial Alignment Based Spherical Simplex Transformation SRUKF Algorithm[J]. JOURNAL OF APPLIED SCIENCES—Electronics and Information Engineering,2009,27(3):311-315. (in Chinese)

#### 作者简介



霍光(1987-),男,河北邯郸人,硕士研究生,主要研究方向:无源定位。  
E-mail:sonic\_sunshine@163.com

李冬海(1967-),男,河南镇平人,副教授,主要研究方向:阵列信号处理、无源定位、雷达数据处理。  
E-mail:ldhai99@yahoo.com.cn