

非匹配不确定时滞系统的自校正滑模控制

李 玮, 段建民

(北京工业大学电子信息与控制工程学院, 北京 100124)

摘 要: 针对一类不匹配、不确定并具有状态时滞的多输入多输出线性系统, 基于线性矩阵不等式理论提出一种新的自校正滑模控制方法。该方法利用线性矩阵不等式给出滑动模态存在的充分条件, 使系统在滑动模态运动下对于存在的不匹配不确定性扰动以及状态时滞具有完全不变性。引入双极性 Sigmoid 函数代替符号函数并根据 Lyapunov 稳定性理论设计了具有自适应能力的滑模控制器, 在自适应律的作用下 Sigmoid 函数的边界层厚度以及切换增益可根据系统状态进行自适应调节, 从而改善了滑模控制器输出量过大以及抖振等现象。基于 Lyapunov 理论证明了该方法的稳定性, 最后通过仿真实验进一步验证了该方法的可行性及有效性。

关键词: 非匹配系统; 状态时滞; 滑模控制; 线性矩阵不等式; 校正律

中图分类号: TP 271

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2011.07.30

Self-tuning sliding mode control for a class of mismatched uncertain linear systems with state time delay

LI Wei, DUAN Jian-min

(College of Electronic Information & Control Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: For a class of mismatched uncertain multiple input multiple output linear systems with state time delay, a new self-tuning sliding mode control method is proposed based on the linear matrix inequality theory. In this method a sufficient condition for the existence of linear sliding surface is given according to the linear matrix inequality theory, while in the sliding phase such that the system is restricted to the switch surface and completely invariant to mismatched uncertainties and state time delay. For controller output chattering case, the Sigmoid function instead of sign function is introduced and a self-tuning sliding mode controller is further designed. Under the self-tuning law, the Sigmoid function's boundary layer and switching gain can be adjusted automatically, which can reduce the high frequency chattering of outputs. The Lyapunov theory is applied to prove the stability of this new control method. Finally, the simulation results of an example are investigated to show the feasibility and effectiveness of the proposed approach.

Keywords: mismatched systems; state time delay; sliding mode control; linear matrix inequality; self-tuning law

0 引 言

近年来滑模控制由于对外部干扰以及系统参数摄动具有较强的鲁棒性因此在实际中得到了广泛应用。一般而言, 在实际被控系统中都会存在不同程度的不确定性, 当这种不确定满足匹配条件时采用滑模控制可以获得较好的控制性能, 但由于大多数系统中存在的扰动不满足匹配条件, 因此使得滑模控制的性能受到了极大的影响。此外, 实际系统普遍存在状态时滞与控制变量时滞, 时滞环节是目前影响系统稳定的一个重要因素, 它的出现往往会破坏系统的稳定性。以上问题的存在阻碍了滑模控制由理论向实际应用转化的进程, 因此当务之急首先需要从理论上寻求解决该问题的方法。除了以上提到的这些问题, 滑模控制的

输出抖振也是限制其实际应用的重要因素, 滑动模态下控制量的大幅度高频振荡不仅增加能量消耗, 而且容易激发被控系统的未建模动态, 从而破坏系统稳定性甚至损坏控制器部件。综上, 深入研究非匹配不确定时滞系统的滑模控制以及如何削弱滑模控制器输出抖振这一问题对于进一步促进变结构控制理论的实际应用具有重要的现实意义。

在滑模控制领域众多学者提出了不同的方法来解决上述问题。文献[1-3]针对不匹配不确定系统采用线性矩阵不等式理论设计滑模面, 并研究了基于线性矩阵不等式方法的滑模控制策略。文献[4-5]针对非匹配不确定系统采用终端滑模控制, 在保证滑动平面的到达和闭环系统稳定的前提下使输入输出子系统的状态能够在有限时间内收敛至平衡点。文献[6]针对系统中同时存在的非匹配不确定和状态

收稿日期: 2010-05-07; 修回日期: 2011-01-17。

基金项目: 北京市教委重点项目(JJ002790200802); 先进制造技术北京市重点实验室开放项目(0010005466015)资助课题

作者简介: 李玮(1982-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为网络智能控制与嵌入式系统。E-mail: liwei727@126.com

时滞扰动提出了一种自适应变结构控制方法,但给出的不匹配项的匹配条件较为保守。文献[7-11]针对一类具有非匹配扰动的时滞系统分别采用线性矩阵不等式与 Delta 算子的方法设计滑模面,并在此基础上设计了滑模到达控制器。在削弱控制输出抖振方面,文献[12]利用模糊逻辑调整滑模控制器切换增益,同时引入遗传算法对模糊控制中的隶属度函数进行优化。文献[13-14]使用边界层技术利用模糊理论对滑模控制器中边界层厚度进行调节。文献[15-17]结合 RBF 神经网络对滑模控制器中符号函数的切换增益根据系统扰动的大小进行自适应调节。文献[18-19]针对一类单输入单输出非线性时滞系统,提出自适应滑模控制方法,利用自适应律对边界层厚度与切换增益进行调节,从而达到削弱抖振的目的。

本文针对一类同时具有非匹配、不确定性和状态时滞的线性系统,提出一种新的适用于多输入多输出系统的自校正滑模控制方法。该方法首先基于线性矩阵不等式理论给出了系统存在滑动模式的充分条件,并根据单位向量法对该系统进行滑模控制律的设计;接下来引入双极性 Sigmoid 函数来代替符号函数,并给出了切换增益和边界层厚度的自校正律,使滑模控制的切换增益与边界层厚度可根据系统状态进行自适应调节,从而削弱控制量输出的抖振现象;最后根据 Lyapunov 理论证明了该控制方法的稳定性,并通过计算机仿真验证了该控制方法的可行性及有效性。

1 系统描述

考虑如下非匹配不确定时滞系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [A_d + \Delta A_d]x(t - \tau) + Bu(t) \\ x(t) &= \Phi(t), t \in [-\tau, 0] \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 与 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 为具有合适维数的已知系统参数矩阵; $\text{rank}(B) = m$; $\Delta A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $\Delta A_d(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 分别为未知不确定系统参数摄动矩阵与时滞关联矩阵; ΔA 与 ΔA_d 不满足通常的匹配条件; $\tau(\tau \geq 0)$ 表示滞后时间; $\Phi \in \mathbb{R}^n$ 为连续的初值函数。对系统(1)作如下假设:

假设 不确定不匹配系统参数摄动矩阵 ΔA 与时滞关联矩阵 ΔA_d 满足范数有界形式,即 $\Delta A(t) = DF(t)E$, $\Delta A_d(t) = D_d F(t)E_d$, 其中 D, E, D_d 和 E_d 为具有相应维数的已知常数矩阵; $F(t)$ 为未知但有界的时变矩阵函数,且 $F(t)F^T(t) \leq I$, 其中 I 为具有相应维数的单位矩阵, $F(t)$ 中的元素满足 Lebesgue 可测。

由于 $\text{rank}(B) = m$, B 列满秩, 因此引进非奇异矩阵 T 对系统(1)进行状态变换, 即 $z(t) = Tx(t)$, 使得 $TB = [0_{(n-m) \times m} \quad B_2]^T$, 其中 $B_2 = I_{m \times m}$ 为非奇异, $T = [U_1 \quad U_2]$ 。

引入状态变换 $z(t) = Tx(t)$ 后, 系统(1)中 $\dot{x}(t)$ 部分可整理为

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (\bar{A} + \Delta \bar{A})z(t) + (\bar{A}_d + \Delta \bar{A}_d)z(t - \tau) + B_T u(t) \\ \dot{z}_1(t) &= (\bar{A}_{11} + \Delta \bar{A}_{11})z_1(t) + (\bar{A}_{d11} + \Delta \bar{A}_{d11})z_1(t - \tau) + \\ &\quad (\bar{A}_{12} + \Delta \bar{A}_{12})z_2(t) + (\bar{A}_{d12} + \Delta \bar{A}_{d12})z_2(t - \tau) \\ \dot{z}_2(t) &= (\bar{A}_{21} + \Delta \bar{A}_{21})z_1(t) + (\bar{A}_{d21} + \Delta \bar{A}_{d21})z_1(t - \tau) + \\ &\quad (\bar{A}_{22} + \Delta \bar{A}_{22})z_2(t) + (\bar{A}_{d22} + \Delta \bar{A}_{d22})z_2(t - \tau) + B_2 u(t) \end{aligned} \quad (2)$$

式中

$$\begin{aligned} z_1(t) &\in \mathbb{R}^{n-m}, z_2(t) \in \mathbb{R}^m \\ \bar{A}_{11} &= U_2^T A U_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{12} &= U_2^T A U_1 \\ \bar{A}_{d11} &= U_2^T A_d U_2, \bar{A}_{d12} = U_2^T A_d U_1 \\ \Delta \bar{A}_{d11} &= U_2^T D_d F E_d U_2 \\ \Delta \bar{A}_{d12} &= U_2^T D_d F E_d U_1 \\ \Delta \bar{A}_{11} &= U_2^T D F E U_2 \\ \Delta \bar{A}_{12} &= U_2^T D F E U_1 \\ B_T &= [0_{(n-m) \times m} \quad B_2]^T \end{aligned}$$

2 滑动模态设计

系统(2)中第二个式子所表示的 $n-m$ 维子系统代表该系统的滑模动态, 选择相应的滑模面为

$$\sigma = Sz = [C \quad I_{m \times m}]z = Cz_1 + z_2 = 0 \quad (3)$$

式中, $C \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, 由式(3)可得 $z_2 = -Cz_1$, 将其代入系统(2)的第二个式子中得到滑动模式运动方程

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= (\bar{A}_{11} + \Delta \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}C - \Delta \bar{A}_{12}C)z_1(t) + \\ &\quad (\bar{A}_{d11} + \Delta \bar{A}_{d11} - \bar{A}_{d12}C - \Delta \bar{A}_{d12}C)z_1(t - \tau) \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)为系统(1)的滑动模式运动方程, 定义 Lyapunov 函数

$$V[z_1(t), t] = z_1^T(t)Pz_1(t) + \int_{t-\tau}^t z_1^T(s)Qz_1(s)ds \quad (5)$$

如果存在对称正定矩阵 $P, Q \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ 与一任意大小的正常数 ξ 使式(5)成立, 并满足 $\dot{V}[z_1(t), t] \leq -\xi \|z_1(t)\|^2$, 那么由式(4)所表示的系统滑动模式为二次稳定^[20]。

采用基于线性矩阵不等式的方法给出系统(2)存在线性滑模面的充分条件, 在此之前首先给出必要的引理。

引理 对于任意满足 $F(t)F^T(t) \leq I$ 的适当维数矩阵 $F(t)$, 有不等式 $D_s F(t)E_s + [D_s F(t)E_s]^T \leq D_s D_s^T + E_s^T E_s$ 成立。

下面给出线性滑模面存在的充分条件。

定理 1 系统(4)所代表的滑动模式二次稳定的充分条件为: 存在对称正定矩阵 $J \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 和一般常值矩阵 $Y \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ 使下面的线性矩阵不等式成立

$$M = \begin{bmatrix} -J & * & * & * \\ \bar{A}_{d11}Z - \bar{A}_{d12}Y & J_k & * & * \\ 0 & Z_k & -I & * \\ E_d(U_2Z - U_1Y) & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (6)$$

矩阵 M 为转置对称, 其中

$$\begin{aligned} J_k &= J + Z\bar{A}_{11}^T + \bar{A}_{11}Z - Y^T\bar{A}_{12}^T - \bar{A}_{12}Y + \\ &\quad U_2^T D D^T \cdot U_2 + U_2^T D_d D_d^T U_2 \\ Z_k &= E U_2 Z - E U_1 Y \end{aligned}$$

并且得到的滑模面方程为

$$\sigma(t) \in Cz_1(t) + z_2(t) = YZ^{-1}z_1(t) + z_2(t) \quad (7)$$

式(6)中的矩阵 M 沿对角线呈转置对称, 其中“*”所表示的元素为关于对角线对称元素的转置。

下面对该定理进行证明。

证明 对于系统(4)选取正定对称矩阵 $P, Q \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, 定义 Lyapunov 函数为

$$V[z_1(t), t] = z_1^T(t)Pz_1(t) + \int_{t-\tau}^t z_1^T(s)Qz_1(s)ds$$

对其按照时间 t 求导

$$\begin{aligned} \dot{V}[z_1(t), t] &= \dot{z}_1^T(t)Pz_1(t) + z_1^T(t)P\dot{z}_1(t) + \\ &\quad z_1^T(t)Qz_1(t) - z_1^T(t - \tau)Qz_1(t - \tau) \end{aligned} \quad (8)$$

将式(4)代入式(8)得

$$\begin{aligned} \dot{V}[z_1(t), t] = & z_1^T(t)[\bar{A}_{11}^T + \Delta\bar{A}_{11}^T - (\bar{A}_{12}C)^T - \\ & (\Delta\bar{A}_{12}C)^T]Pz_1(t) + z_1^T(t-\tau)[\bar{A}_{d11}^T + \Delta\bar{A}_{d11}^T - (\bar{A}_{d12}C)^T - \\ & (\Delta\bar{A}_{d12}C)^T] \cdot Pz_1(t) + z_1^T(t)P[\bar{A}_{11} + \Delta\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}C - \\ & \Delta\bar{A}_{12}C]z_1(t) + z_1^T(t)P[\bar{A}_{d11} + \Delta\bar{A}_{d11} - \bar{A}_{d12}C - \\ & \Delta\bar{A}_{d12}C]z_1(t-\tau) + z_1^T(t)Qz_1(t) - z_1^T(t-\tau)Qz_1(t-\tau) \end{aligned} \quad (9)$$

定义变量 $\hat{A}_{11} = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}C$, $\Delta\hat{A}_{11} = \Delta\bar{A}_{11} - \Delta\bar{A}_{12}C$, $\hat{A}_{d11} = \bar{A}_{d11} - \bar{A}_{d12}C$, $\Delta\hat{A}_{d11} = \Delta\bar{A}_{d11} - \Delta\bar{A}_{d12}C$ 将其代入式(9), 同时令 $Z = P^{-1}$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}[z_1(t), t] = & \left\{ P \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_1(t-\tau) \end{bmatrix} \right\}^T W \left\{ P \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_1(t-\tau) \end{bmatrix} \right\} \\ W = & \begin{bmatrix} Z(\hat{A}_{11} + \Delta\hat{A}_{11})^T + ZQZ + (\hat{A}_{11} + \Delta\hat{A}_{11})Z & (\hat{A}_{d11} + \Delta\hat{A}_{d11})Z \\ Z(\hat{A}_{d11} + \Delta\hat{A}_{d11})^T & -ZQZ \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

由式(10)可知 $\dot{V}[z_1(t), t]$ 负定的充要条件为 $W < 0$ 。接下来将 W 进行分解

$$\begin{aligned} W = & \begin{bmatrix} Z\hat{A}_{11}^T + \hat{A}_{11}Z + ZQZ & \hat{A}_{d11}Z \\ Z\hat{A}_{d11}^T & -ZQZ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} Z \cdot \\ & \Delta\hat{A}_{11}^T \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\hat{A}_{11} Z \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} Z \cdot \\ & \Delta\hat{A}_{d11}^T \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\hat{A}_{d11} Z \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

根据引理可得

$$W \leq \begin{bmatrix} \alpha & \bar{A}_{d11}Z - \bar{A}_{d12}CZ \\ Z\bar{A}_{d11}^T - Z(\bar{A}_{d12}C)^T & \beta \end{bmatrix}$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha = & ZQZ + Z\bar{A}_{11}^T - Y^T\bar{A}_{12}^T + U_2^T D_d D_d^T U_2 + \bar{A}_{11}Z - \bar{A}_{12}Y + \\ & U_2^T D D^T U_2 + (ZU_2^T - Y^T U_1^T) E^T E (U_2 Z - U_1 Y) \\ \beta = & (ZU_2^T - Y^T U_1^T) E^T E_d (U_2 Z - U_1 Y) - ZQZ \end{aligned}$$

令 $Y = CZ$, 则

$$W \leq \begin{bmatrix} \alpha & \bar{A}_{d11}Z - \bar{A}_{d12}Y \\ Z\bar{A}_{d11}^T - Y^T\bar{A}_{d12}^T & \beta \end{bmatrix} = \theta \quad (12)$$

因此得到不等式 $\dot{V}[z_1(t), t] \leq K^T \theta K$, 其中

$$K = P[z_1(t) z_1(t-\tau)]^T$$

由 Lyapunov 稳定性理论可知, 若 $\theta < 0$ 那么系统(4)是稳定的。对式(6)所描述的对称线性矩阵不等式 M 进行分块,

$$M = \begin{bmatrix} A_s & B_s^T \\ B_s & C_s \end{bmatrix}。式中$$

$$A_s = \begin{bmatrix} -J & Z\bar{A}_{d11}^T - Y^T\bar{A}_{d12}^T \\ \bar{A}_{d11}Z - \bar{A}_{d12}Y & J + Z\bar{A}_{11}^T + \bar{A}_{11}Z - \bar{A}_{12}Y - Y^T\bar{A}_{12}^T + U_2^T G_d G_d^T U_2 + U_2^T G G^T U_2 \end{bmatrix}$$

$$B_s = \begin{bmatrix} 0 & HU_2 Z - HU_1 Y \\ F(U_2 Z - U_1 Y) & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_s = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

根据 Schur 引理, M 中 $C_s < 0$, $A_s - B_s^T C_s^{-1} B_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \theta \cdot$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 因此若 $\theta < 0$, 则等价于线性矩阵不等式 $M < 0$ 成立, 从而得到式(6); 进一步, 令 $Z = P^{-1}$, 进而得到滑模面参数 $C = YZ^{-1}$ 。证毕

3 自校正滑模控制器的设计

根据单位向量法可得到系统(2)的固定切换增益滑模控制律

$$u(t) = - (SB_T)^{-1} \left[S\bar{A}z(t) + S\bar{A}_d z(t-\tau) + \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \eta \right] \quad (13)$$

式中

$$\eta = \|\sigma\| \cdot \|E\| \cdot \|z(t)\| + \|\sigma\| \cdot \|E_d\| \cdot \|z(t-\tau)\|$$

$$\frac{\sigma}{\|\sigma\|} = \text{diag} [\text{sgn}(\sigma_1), \text{sgn}(\sigma_2), \dots, \text{sgn}(\sigma_m)]$$

$$\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m]^T, S = [S_1, S_2, \dots, S_m]^T$$

定义 Lyapunov 函数为 $V = 0.5\sigma^T \sigma$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sigma^T [\bar{S}A z(t) + S\Delta\bar{A}z(t) + S\bar{A}_d z(t-\tau) + \\ & S\Delta\bar{A}_d z(t-\tau) + SB_T u(t)] \end{aligned} \quad (14)$$

式中, $B_T = [B_{T1}, B_{T2}, \dots, B_{Tm}]$ 。由假设可知, 不确定不匹配系统参数扰动矩阵 ΔA 与时滞关联矩阵 ΔA_d 满足范数有界形式, 即

$$S\Delta\bar{A}z(t) \leq \|\sigma\| \cdot \|E\| \cdot \|z(t)\|$$

且

$$S\Delta\bar{A}_d z(t) \leq \|\sigma\| \cdot \|E_d\| \cdot \|z(t-\tau)\|$$

将式(13)代入式(14), 可以容易的得到 $\dot{V} \leq 0$, 这里就不加以详细证明了。

控制律(13)中参数 η 为传统滑模控制中的符号函数切换增益, 为保证控制器的鲁棒性其取值一般为系统中扰动的上界, 滑模控制正是利用切换增益来抵抗未知的参数变化及外部扰动。一般来说切换增益取值越大系统的鲁棒性越好, 但过大的切换增益会导致控制量输出的抖振愈加强烈, 这样一来容易激发系统的未建模动态, 从而使系统不稳定的机会增加。

针对滑模控制输出的抖振问题, 本文提出一种自校正滑模控制方法, 该方法引入双极性 Sigmoid 函数来代替符号函数, 并提出了切换增益和边界层厚度的自校正律, 从而实现滑模控制器切换增益以及边界层厚度可根据系统状态进行自适应调节并最终达到削弱系统输出抖振的这一目标。

根据式(13)得到改进的滑模控制律

$$u(t) = - (SB_T)^{-1} [S\bar{A}z(t) + S\bar{A}_d z(t-\tau) + \varphi(\varepsilon, \sigma) \hat{\eta}] \quad (15)$$

式中, $\hat{\eta} = [\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \dots, \hat{\eta}_m]^T$ 为切换增益矩阵, 矩阵中参数为

$$\text{正实数}; \varphi(\varepsilon, \sigma) = \text{diag} \left[\frac{1 - e^{-\varepsilon_1 \sigma_1}}{1 + e^{-\varepsilon_1 \sigma_1}}, \frac{1 - e^{-\varepsilon_2 \sigma_2}}{1 + e^{-\varepsilon_2 \sigma_2}}, \dots, \frac{1 - e^{-\varepsilon_m \sigma_m}}{1 + e^{-\varepsilon_m \sigma_m}} \right] \text{为}$$

双极性 Sigmoid 函数矩阵, $\epsilon_i (i \in 1, \dots, m)$ 为边界层厚度参数, 相应的边界层厚度参数矩阵为 $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m]^T$ 。对于切换增益与边界层厚度参数设计如下自校正律

$$\dot{\eta} = \gamma_1 \frac{\partial \sigma}{\partial u(t)} \varphi(\epsilon, \sigma) \sigma, \dot{\epsilon} = \gamma_2 \frac{\partial \sigma}{\partial u(t)} \quad (16)$$

式中, $\gamma_1 = \text{diag}(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1m}), \gamma_2 = \text{diag}(\gamma_{22}, \gamma_{23}, \dots, \gamma_{2m})$ 为调节自校正速率的参数矩阵, 矩阵中的参数为正实数。

$\frac{\partial \sigma}{\partial u(t)} = \text{diag} \left[\frac{\partial \sigma_1}{\partial u_1(t)}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2(t)}, \dots, \frac{\partial \sigma_m}{\partial u_m(t)} \right] (u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T)$ 。考虑滑模到达条件

$$\sigma^T \dot{\sigma} = \sigma^T [S\bar{A}z(t) + S\Delta\bar{A}z(t) + S\bar{A}_d z(t - \tau) + S\Delta\bar{A}_d z(t - \tau) + SB_T u(t)]$$

将控制律(15)代入

$$\sigma^T \dot{\sigma} = \sigma^T [S\bar{A}_d z(t - \tau) + S\Delta\bar{A}_d z(t - \tau) - \varphi(\epsilon, \sigma) \hat{\eta}] \leq \sigma^T [\|SD\| \cdot \|E\| \cdot \|z(t)\| + \|SD_d\| \cdot \|E_d\| \cdot \|z(t - \tau)\| - \varphi(\epsilon, \sigma) \hat{\eta}] \quad (17)$$

令 $\psi = \|SD\| \cdot \|E\| \cdot \|z(t)\| + \|SD_d\| \cdot \|E_d\| \cdot \|z(t - \tau)\|$, 则式(17)可整理为

$$\sigma^T \dot{\sigma} \leq \sigma^T \left[\psi - \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \left(\frac{\sigma}{\|\sigma\|} \right)^{-1} \varphi(\epsilon, \sigma) \hat{\eta} \right] \quad (18)$$

$\varphi(\epsilon, \sigma)$ 与 $\frac{\sigma}{\|\sigma\|}$ 同号, 因此当切换增益 $\hat{\eta} \geq \frac{\psi}{|\varphi(\epsilon, \sigma)|}$ 时

$\sigma^T \dot{\sigma} \leq 0$, 从而滑模到达条件得到满足。

定理 2 假设式(6)有解 J, Z, Y , 并且得到由式(7)给出的滑模面方程, 则闭环系统(2)的运动轨迹可在控制律(15)的作用下达到稳定。

证明 定义 Lyapunov 函数为 $V = 0.5 \sigma^T \cdot \sigma$, 则

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial u(t)} \left[\frac{\partial u(t)}{\partial \hat{\eta}} \frac{d\hat{\eta}}{dt} + \frac{\partial u(t)}{\partial \epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} \right] - \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial u(t)} (SB_T)^{-1} [\varphi(\epsilon, \sigma) \hat{\eta} + \dot{\varphi}(\epsilon, \sigma) \dot{\epsilon}] \quad (19)$$

将自校正律(16)代入式(19)中得到

$$\dot{V} = -\sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial u(t)} (SB_T)^{-1} \varphi(\epsilon, \sigma) \gamma_1 \frac{\partial \sigma}{\partial u(t)} \varphi(\epsilon, \sigma) \sigma - \sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial u(t)} (SB_T)^{-1} \dot{\varphi}(\epsilon, \sigma) \gamma_2 \frac{\partial \sigma}{\partial u(t)} \hat{\eta} \quad (20)$$

根据系统(2)所求得的滑模面参数矩阵为 $S = [C \ I_{m \times m}]$, 其中控制输入矩阵 $B_T = [0_{(n-m) \times m} \ B_2]^T, B_2 = I_{m \times m}$, 因此可以得到 $SB_T = I_{m \times m}$ 。将 $SB_T = I_{m \times m}$ 代入式(20)得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\sigma^T \frac{\partial \sigma}{\partial u(t)} \varphi(\epsilon, \sigma) \gamma_1 \frac{\partial \sigma}{\partial u(t)} \varphi(\epsilon, \sigma) \sigma - \sigma^T \cdot \\ &\frac{\partial \sigma}{\partial u(t)} \dot{\varphi}(\epsilon, \sigma) \gamma_2 \frac{\partial \sigma}{\partial u(t)} \hat{\eta} = -\sum_{i=1}^m \gamma_{1i} \sigma_i^2 \left[\frac{\partial \sigma_i}{\partial u_i(t)} \right]^2 \left(\frac{1 - e^{-\epsilon_i \sigma_i}}{1 + e^{-\epsilon_i \sigma_i}} \right)^2 - \\ &\sum_{i=1}^m 2\gamma_{2i} \cdot \hat{\eta}_i \sigma_i^2 \left[\frac{\partial \sigma_i}{\partial u_i(t)} \right]^2 \frac{e^{-\epsilon_i \sigma_i}}{1 + e^{-\epsilon_i \sigma_i}} \leq 0 \quad (21) \end{aligned}$$

证毕

4 数值仿真

给出系统(2)中的参数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 1 \\ -1 & 0.5 & -0.5 \\ 2 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0.1 \sin t & 0.2 \cos t & 0.2 \sin t \\ 0.1 \sin t & 0.1 \cos t & 0.2 \sin t \\ 0.2 \sin t & 0.1 \cos t & 0.1 \sin t \end{bmatrix}, U_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A_d = \begin{bmatrix} 0.05 \sin t & 0.1 \cos t & 0.1 \sin t \\ 0.05 \sin t & 0.05 \cos t & 0.1 \sin t \\ 0.1 \sin t & 0.05 \cos t & 0.05 \sin t \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, D_d = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.1 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.1 \\ 0.1 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_d = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求解线性矩阵不等式(6)得到 $Y = [0.131 \ 1 \ 0.262 \ 1]^T, Z = 0.131 \ 1$, 因此相应的滑模面参数 $C = [1 \ 2]^T$, 时滞因子 $\tau = 0.1 \text{ s}$ 。选取自校正律参数 $\gamma_1 = \text{diag}(3, 3), \gamma_2 = \text{diag}(2, 2)$, 系统初始状态设定为: $x(0) = [2 \ -1.5 \ 1]^T$ 。

接下来分别采用由文献[7]提出的一种适用于非匹配不确定时滞系统的传统滑模控制方法与本文提出的控制方法进行计算机仿真, 并对比这两种方法的仿真结果。

仿真结果如图 1~图 4 所示。

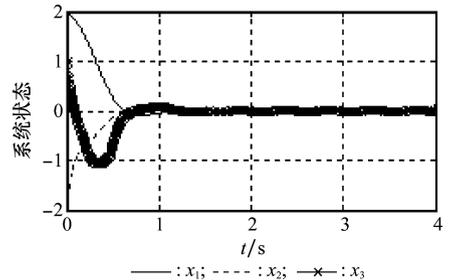


图 1 传统控制策略状态响应曲线

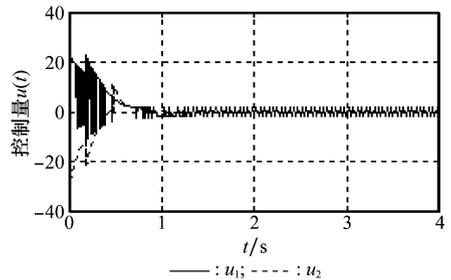


图 2 传统控制策略控制输出曲线

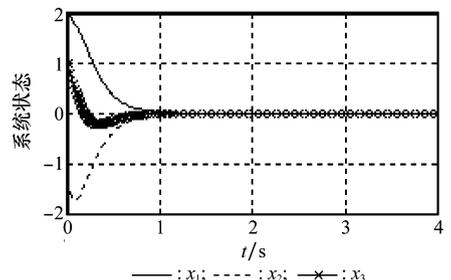


图 3 新控制策略状态响应曲线

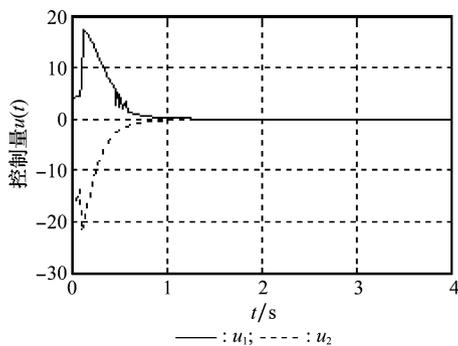


图 4 新控制策略控制输出曲线

从图中可以看出,两种控制方法都能够在 1.5 s 内将系统驱动到稳定状态,但传统滑模控制在初始阶段其控制量输出较大同时伴随有剧烈抖振,并且当系统达到稳态后,传统滑模控制中由于固定切换增益项的存在使得控制输出仍然在一定范围内震荡。而采用本文提出的控制方法由于引入边界层厚度可调的 Sigmoid 函数代替符号函数,使得控制量输出的抖振现象在很大程度上被削弱,如图 4 所示,新控制方法仅在 0.5 s 时刻左右由控制量 u_1 产生较小的抖振,当系统稳定进入到滑动模式后控制输出几乎不存在抖振现象。

5 结 论

针对一类同时具有非匹配、不确定和状态时滞的多输入多输出线性系统,提出一种新的基于线性矩阵不等式理论的自校正滑模控制方法。该方法首先根据线性矩阵不等式理论得到系统滑动模式存在的充分条件,使系统在滑动模式运动下对于存在的不匹配不确定性扰动以及状态时滞具有完全不变性;接下来利用单位向量法进行滑模控制器的设计,引入双极性 Sigmoid 函数代替符号函数,并设计了自校正律来实现 Sigmoid 函数的边界层厚度和切换增益能够根据系统状态进行自适应调节,从而改善了由于固定切换增益及边界层厚度所造成的控制器输出抖振现象。基于 Lyapunov 理论证明了该控制方法的稳定性,文章最后通过仿真结果进一步验证了该控制方法的有效性。由于该方法具有较小的控制量输出抖振,因此具有良好的工程应用价值。

参考文献:

[1] Choi H H. An LMI-based switching surface design method for a class of mismatched uncertain systems[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2003, 48(9): 29 - 31.

[2] Choi H H. LMI-based design of integral sliding mode controllers for mismatched uncertain systems[J]. *Trans. on the Korean Institute of Electrical Engineers*, 2010, 59(8): 1441 - 1443.

[3] Choi H H. LMI-based sliding surface design for integral sliding mode control of mismatched uncertain systems[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2007, 52(4): 736 - 742.

[4] 郑剑飞, 冯勇, 杨旭强. 非匹配不确定多变量系统高阶终端滑模控制[J]. *电机与控制学报*, 2009, 13(1): 117 - 122. (Zheng J F, Feng Y, Yang X Q. High-order terminal sliding mode control of mismatched uncertain multivariable systems[J]. *Electric Machines and Control*, 2009, 13(1): 117 - 122.)

[5] 刘根旺, 李志强. 非匹配时变不确定性时滞系统的 Terminal 滑模控制[J]. *系统工程与电子技术*, 2009, 31(5): 1180 - 1183. (Liu G W,

Li Z Q. Terminal sliding mode control for time-delay system with unmatched time-varying uncertainties [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, 31(5): 1180 - 1183.)

[6] 庄开宇, 苏宏业, 张克勤, 等. 不匹配不确定时滞系统的自适应变结构控制[J]. *浙江大学学报*, 2002, 36(4): 410 - 415. (Zhuang K Y, Su H Y, Zhang K Q, et al. Adaptive variable structure control for delay systems with mismatched uncertainties[J]. *Journal of Zhejiang University*, 2002, 36(4): 410 - 415.)

[7] Xia Y Q, Chen J, Liu G P, et al. Robust adaptive sliding mode control for uncertain time-delay systems[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2009, 23(9): 863 - 881.)

[8] 武俊峰, 吴鹏. 时滞不确定线性系统的滑模控制[J]. *电机与控制学报*, 2005, 9(2): 106 - 110. (Wu J F, Wu P. Sliding mode control of uncertain linear system with time delay[J]. *Electric Machines and Control*, 2005, 9(2): 106 - 110.)

[9] Xia Y Q, Jia Y M. Robust sliding-mode control for uncertain time-delay systems: a LMI approach[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2003, 48(6): 1086 - 1091.

[10] Xia Y Q, Fu M Y, Yang H J, et al. Robust sliding-mode control for uncertain time-delay systems based on delta operator[J]. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 2009, 56(9): 3646 - 3655.

[11] Min K S, Jin B P, Young H J. Switching surface design for mismatched uncertain systems with time delay: an LMI approach[C]// *Proc. of the SICE-ICASE International Joint Conference*, 2006: 842 - 846.

[12] Lhee C G, Park J S, Ahn H S, et al. Sliding mode-like fuzzy logic control with self-tuning the dead zone parameters[J]. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2001, 9(2): 343 - 348.

[13] Kuo T C, Huang Y J, Chang S H. Sliding mode control with self-tuning law for uncertain nonlinear systems[J]. *Trans. on Instrumentation, Systems and Automation Society*, 2008, 47(2): 171 - 178.

[14] Kuo T C, Huang Y J, Yu H H. FRSMC design for the steering control and diving control of underwater vehicles[J]. *Journal of Marine Science and Technology*, 2009, 17(1): 50 - 59.

[15] Zhao H C, Gu W J, Zhang R C. RBF neural network-based sliding mode control for a ballistic missile[J]. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 2009, 8(2): 107 - 113.

[16] Zhang Y J, Liu Y D. Application of an improved RBF neural network in sliding mode control system[C]// *Proc. of the International Conference on Computer Application and System Modeling*, 2010: 489 - 492.

[17] 苗卓广, 谢寿生, 王海涛, 等. 基于 RBF 网络的航空发动机 terminal 滑模控制[J]. *航空动力学报*, 2010, 25(12): 2821 - 2826. (Miao Z G, Xie S S, Wang H T, et al. Terminal sliding mode controller for aero-engine based on RBF neural network[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2010, 25(12): 2821 - 2826.)

[18] 罗小元, 朱志浩, 关新平. 非线性时滞系统的抖振削弱自适应滑模控制[J]. *控制与决策*, 2009, 24(9): 1429 - 1431. (Luo X Y, Zhu Z H, Guan X P. Chattering reduction adaptive sliding-mode control for nonlinear time-delay systems[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(9): 1429 - 1431.)

[19] 张细政, 王耀南. 未知不确定非线性系统的直接自校正滑模控制[J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(11): 1256 - 1260. (Zhang X Z, Wang Y N. Sliding mode control with direct self-tuning for a class of nonlinear system with unknown uncertainties[J]. *Control Theory and Applications*, 2009, 26(11): 1256 - 1260.)

[20] Mahmoud M S, Muthairi N F. Quadratic stabilization of continuous time systems with state-delay and norm-bounded time-delay uncertainties[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1994, 39(10): 2135 - 2139.