文章编号:1001-506X(2011)06-1358-04

一类切换时滞奇异系统的最优保成本控制

高在瑞, 纪志成
(江南大学电气自动化研究所, 江苏 无锡 214122)

摘 要: 针对一类切换时滞奇异系统,对最优保成本控制问题进行了研究。利用 Lyapunov 函数方法和凸组合技术,给出了由线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)表示的保成本控制器存在的充分条件,并设计了相应的子控制器和切换规则。进一步,建立了一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题,利用 Matlab 软件中的线性矩阵不等式工具箱求解,给出了最优保成本控制器的设计方法及闭环最小性能指标上界。仿真示例验证了该方法的有效性。

关键词: 切换奇异系统; 时滞系统; 最优保成本控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP 273 **文献标志码**: A **DOI**:10.3969/j.issn.1001-506X.2011.06.31

Optimal guaranteed cost control for a class of switched singular systems with time-delay

GAO Zai-rui, JI Zhi-cheng
(*Institute of Electrical Automation, Jiangnan University, Wuxi 214122, China*)

Abstract: The problem of optimal guaranteed cost control for a class of switched singular systems with time-delay is considered. By means of Lyapunov function approaches and convex combination techniques, a sufficient condition for the existence of guaranteed cost sub-controllers is presented, which is in the form of linear matrix inequalities (LMIs), accordingly, both sub-controllers and switching strategy are designed. Furthermore, a convex optimization problem with LMIs constraints is formulated, the design of optimal guaranteed cost sub-controllers and the minimization of the upper boundary of closed-loop performance index are obtained by using the LMI toolbox in Matlab. Finally, a numerical example shows that the obtained results are effective.

Keywords: switched singular systems; time-delay systems; optimal guaranteed cost control; linear matrix inequality (LMI)

0 引 言

切换系统作为一类特殊的混杂系统,一般由一族子系统及描述它们之间关系的切换规则组成,通过在子系统之间的切换来实现控制目的,利用切换规则可以获得较好的动态性能,例如可以通过设计适当的切换规则,即使所有的子系统都不稳定,系统整体仍可保持稳定[1]。由于切换系统在改善系统性能方面的作用及满足智能控制飞速发展的需要,近年来对切换系统的研究引起了人们极大的兴趣,并取得了丰富的研究成果。文献[2]对线性切换控制系统进行了分析与综合,提出了切换系统在系统行为方面的基本概念及主要特性;文献[3]利用多 Lyapunov 函数方法和平均驻留时间方法,研究了一类离散切换时滞系统的稳定性问题;文献[4] 利用多 Lyapunov 函数方法,研究了切换系统的稳定性、L2 增益及 H_∞ 控制问题;文献[5]利用多 Lyapunov 函数方法,研究了脉冲切换系统的鲁棒稳定性及保成本控制问题等。

目前,虽然对切换系统的研究取得了丰富的研究成果,但对切换时滞奇异系统的研究却不多见。文献[6]研究了一类切换时滞奇异系统的稳定性问题;文献[7]研究了一类切换时滞奇异网络控制系统的状态反馈镇定问题。在实际的控制系统设计中,稳定性研究固然重要,但有时也要考虑系统的性能要求。自从保成本控制思想[8]提出以来,就引起了众多学者的关注,文献[9]研究了多决策不确定随机系统的鲁棒保成本控制问题;文献[10]研究了存在执行器故障时,不确定切换非线性系统的可靠保成本控制问题。但对切换奇异系统保成本控制的研究还很少,文献[11]利用共同 Lyapunov 函数方法,研究了一类切换奇异系统在任意

收稿日期:2010-06-07; **修回日期**:2010-07-13。
基金项目:国家自然科学基金(60774030)资助课题
作者简介:高在瑞(1982-),男,博士研究生,主要研究方向为鲁棒控制、奇异切换系统。E-mail:gaozairui_110@163.com

切换规则下的保成本控制；文献[12]利用共同 Lyapunov 函数方法，研究了一类不确定时滞切换奇异系统在任意切换策略下的二次稳定保成本控制问题。但以上文献都没有涉及切换规则的设计方法，也没有给出使闭环系统指标上界尽可能小的最优保成本控制律的设计方法。针对以上两个问题，本文给出了有效的解决办法。

本文针对一类切换时滞奇异系统，利用 Lyapunov 函数方法和凸组合技术，研究了其最优保成本控制问题，给出了最优保成本控制器存在的充分条件，并设计了相应的子控制器和切换规则。通过切换，整个状态空间上的每个点都有适当的子系统和子控制器使闭环系统稳定并且满足性能要求，而并不要求每个子系统在整个状态空间上都满足性能要求，更不要求每个子系统稳定。

1　系统描述

考虑如下一类切换时滞奇异系统

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_{\sigma(t)}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_{\tau\sigma(t)}\boldsymbol{x}(t-\tau)+\boldsymbol{B}_{\sigma(t)}\boldsymbol{u}_{\sigma(t)}(t)\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[-\tau,0]\end{cases}\tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 表示系统状态；$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^p$ 表示系统控制输入；$\tau\geqslant0$ 是已知常数滞后时间；$\sigma:[0,+\infty)\to\tilde{\boldsymbol{M}}=\{1,2,\cdots,m\}$ 是分段常值切换信号，$\sigma(t)=i$ 表示第 i 个子系统在时刻 t 被激活；$\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_{\tau i},\boldsymbol{B}_i(\forall i\in\tilde{\boldsymbol{M}})$ 是系统具有适当维数的已知常数矩阵；$\boldsymbol{E}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 且 rank $\boldsymbol{E}=r<n$；$\boldsymbol{\phi}(t)$ 是连续的系统初始函数，$\boldsymbol{\phi}(t)=[\boldsymbol{\phi}_1(t)\quad\boldsymbol{\phi}_2(t)]$，$\boldsymbol{\phi}_1(t)\in\mathbf{R}^r$，$\boldsymbol{\phi}_2(t)\in\mathbf{R}^{n-r}$。

假设 1　对于切换时滞奇异系统(1)中的矩阵 $\boldsymbol{E}$，不失一般性，具有如下结构

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

对于一般形式的 $\boldsymbol{E}$，可以通过非奇异变换化为上述结构。式中，$\boldsymbol{I}_r$ 表示 r 阶的单位矩阵。

定义 1[13]　如果 $\sigma(t_k^-)\neq\sigma(t_k^+)$ 且 $\sigma(t)=\sigma(t_k^+)=i_k$，$t\in[t_k,t_{k+1}]$，$i_k\in\tilde{\boldsymbol{M}}$，则称序列 $\{t_k,i_k\}(k\in\{0,1,\cdots\})$ 是由切换信号 $\sigma(t)$ 生成的切换序列。称时间区间 $[t_k,t_{k+1}]$ 是第 i_k 个子系统的驻留时间。

定义 2[13]　考虑系统(1)的自治系统为

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)\tag{2}$$

(1) 对每个 $i\in\tilde{\boldsymbol{M}}$，存在 $s\in\mathbf{C}$，使得 det $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_i)\neq0$，则称切换奇异系统(2)是正则的；

(2) 如果式(2)是正则的，对所有的 $s\in\mathbf{C}$，均满足 deg (det $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_i)$)$=$rank $\boldsymbol{E}$，其中，$i\in\tilde{\boldsymbol{M}}$，deg $(p(s))$ 表示多项式 $p(s)$ 的次数，则称切换奇异系统(2)是无脉冲的。

假设 2　本文所讨论的切换奇异系统均是正则和无脉冲的。

结合状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}_{\sigma(t)}(t)=\boldsymbol{K}_{\sigma(t)}\boldsymbol{x}(t)$、切换时滞奇异系统(1)及切换规则 $\boldsymbol{\sigma}(t)$，则相应的闭环系统可以写为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_{c\sigma(t)}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_{\tau\sigma(t)}\boldsymbol{x}(t-\tau)\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[-\tau,0]\end{cases}\tag{3}$$

式中，$\boldsymbol{A}_{c\sigma(t)}=\boldsymbol{A}_{\sigma(t)}+\boldsymbol{B}_{\sigma(t)}\boldsymbol{K}_{\sigma(t)}$。

针对切换时滞奇异系统(1)，引入性能指标函数

$$J=\int_0^{+\infty}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_{\sigma(t)}(t))\mathrm{d}t\tag{4}$$

式中，$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$ 是给定的对称正定加权矩阵。

定义 3　对系统(1)和性能指标(4)，如果对设计的切换规则 $\sigma(t)$，存在一个切换状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}_{\sigma(t)}^*(t)$ 和一个 $J^*>0$，使得闭环切换时滞奇异系统(3)是渐近稳定的，并且其闭环性能指标满足 $J\leqslant J^*$，则称 J^* 为切换时滞奇异系统(1)的一个性能上界；$\boldsymbol{u}_{\sigma(t)}^*(t)$ 称为切换时滞奇异系统(1)的状态反馈保成本控制律。

注 1　当 $\sigma(t)\equiv i$ 时，即不在各个子系统之间进行切换，切换广义系统的保成本控制为一般意义下的保成本控制。

2　主要结果

定理 1　对给定的切换时滞奇异系统(1)和性能指标(4)，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，有结构 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1 & 0\\ \boldsymbol{P}_2 & \boldsymbol{P}_3\end{bmatrix}$，rank $\boldsymbol{P}_1=r$，$\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}>0$，$\boldsymbol{P}_2\in\mathbf{R}^{(n-r)\times r}$，$\boldsymbol{P}_3$ 为可逆矩阵且 rank $\boldsymbol{P}_3=n-r$，以及对称正定矩阵 $\boldsymbol{Z}$，矩阵 $\boldsymbol{K}_i(i\in\tilde{\boldsymbol{M}})$，$m$ 个满足 $\alpha_i\geqslant0$，$i\in\tilde{\boldsymbol{M}}$ 且 $\sum_{i=1}^m\alpha_i=1$ 的实数 α_i，使得下列矩阵不等式成立

$$\sum_{i=1}^m\alpha_i\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{ci}+\boldsymbol{A}_{ci}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\tau i}\\ \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{Z}^{-1} & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{I} & 0 & -\boldsymbol{Q}^{-1} & 0 & 0\\ \boldsymbol{K}_i & 0 & 0 & -\boldsymbol{R}^{-1} & 0\\ \boldsymbol{A}_{\tau i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{Z}\end{bmatrix}<0\tag{5}$$

则 $\boldsymbol{u}_i(t)=\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{x}(t)$ 是切换时滞奇异系统(1)的一个保成本控制律，且相应的成本函数满足

$$J\leqslant\boldsymbol{\phi}_1^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\phi}_1(0)+\int_{-\tau}^0\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\phi}(s)\mathrm{d}s=J^*$$

选取的切换规则为

$$\sigma(t)=\arg\min_{i\in\tilde{M}}\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\gamma}_i+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\tau i}\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{A}_{\tau i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}\}\tag{6}$$

式中，$\boldsymbol{\gamma}_i=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{ci}+\boldsymbol{A}_{ci}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_i$。

证明　(1) 由 Schur 补引理，不等式(5)等价于

$$\sum_{i=1}^m\alpha_i[\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{ci}+\boldsymbol{A}_{ci}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_i+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\tau i}\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{A}_{\tau i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}]<0$$

即对 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$，有

$$\sum_{i=1}^m\alpha_i[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{ci}+\boldsymbol{A}_{ci}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_i+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\tau i}\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{A}_{\tau i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}]<0$$

由切换规则(6)，下列不等式对 $\forall t\geqslant0$ 均成立

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\gamma}_{\sigma(t)}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\tau\sigma(t)}\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{A}_{\tau\sigma(t)}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}<0$$

即有下列矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_{\sigma(t)} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\tau\sigma(t)}\\ \boldsymbol{A}_{\tau\sigma(t)}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{Z}\end{bmatrix}<0\tag{7}$$

假设$\{(t_k,i_k)\mid i_k\in\tilde{\boldsymbol{M}};k=0,1,\cdots;0=t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\}$是由切换规则(6)在时间区间$[0,+\infty)$上生成的切换序列。选取 Lyapunov 泛函为

$$V(\boldsymbol{x}_t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s$$

显然,$V(\boldsymbol{x}_t)$是正定的,且$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\geqslant 0$,在切换序列作用下,$V(\boldsymbol{x}_t)$沿闭环切换系统(3)的解轨线的时间导数为

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}_t)=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}(t-\tau)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{ci_k}+\boldsymbol{A}_{ci_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Z})\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\tau i_k}\boldsymbol{x}(t-\tau)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}(t-\tau)=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Omega}_{i_k}\boldsymbol{\xi}(t),\ t\in(t_k,t_{k+1});k=1,2,\cdots$$

式中

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)]$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{i_k}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_{i_k}-\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{K}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_{i_k} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\tau i_k}\\ \boldsymbol{A}_{\tau i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{Z}\end{bmatrix}$$

由式(7)得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}_t)<-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K}_{i_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_{i_k})\boldsymbol{x}(t)<0 \tag{8}$$

由 Lyapunov 稳定性理论,在切换规则(6)作用下,切换时滞奇异系统(1)是渐近稳定的。

(2) 系统(1)在$t=0$时刻的状态为$\boldsymbol{\phi}(0)$,假设以$\boldsymbol{\phi}(0)$为初始状态的切换序列表示为

$$\sum=\{\boldsymbol{\phi}(0),(t_k,i_k)\mid i_k\in\tilde{\boldsymbol{M}};\ k=0,1,\cdots;0=t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\} \tag{9}$$

式中,t_0为初始时间;(t_k,i_k)表示当$t_k\leqslant t<t_{k+1}$时切换系统第i_k个子系统被激活,在第t_{k+1}时离开。对$\forall j(1\leqslant j\leqslant m)$定义

$$\sum\nolimits_t(j)=\{[t_{j_1},t_{j_1+1}),[t_{j_2},t_{j_2+1}),\cdots,[t_{j_n},t_{j_n+1}),\cdots,\sigma(t)=j,t_{j_k}\leqslant t<t_{j_k+1}\}$$

为第j个子系统的切换时间序列,第j个子系统在t_{j_k}时刻进入激活状态,在t_{j_k+1}时刻离开。根据式(8)及切换序列(9)得

$$J=\int_0^{+\infty}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_{\sigma(t)}(t))\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{t_{i_j}}^{t_{i_j+1}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_i(t))\mathrm{d}t$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{t_{i_j}}^{t_{i_j+1}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t<-\sum_{k=0}^{\infty}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\dot{V}(\boldsymbol{x}_t)\mathrm{d}t=V(\boldsymbol{x}(t_0))=\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\phi}(0)+\int_{-\tau}^{0}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\phi}(s)\mathrm{d}s=\boldsymbol{\phi}_1^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\phi}_1(0)+\int_{-\tau}^{0}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\phi}(s)\mathrm{d}s=J^*$$

由定义 3 知,J^*是相应的闭环性能指标的一个上界。 证毕

注 2 定理 1 表明,通过设计适当的切换律,整个状态空间上的每个点都有适当的子系统和子控制器使闭环系统稳定并且满足性能要求,而并不要求每个子系统在整个状态空间上都满足性能要求,更不要求每个子系统稳定。

在定理 1 中,式(5)显然是非线性的,难以直接求解,下面就将式(5)转化为线性矩阵不等式。

定理 2 对给定的切换时滞奇异系统(1)和性能指标(4),如果存在可逆矩阵$\boldsymbol{X}$,有结构$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & 0\\ \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_3\end{bmatrix}$,rank $\boldsymbol{X}_1=r$,$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}>0$,$\boldsymbol{X}_2\in\mathbf{R}^{(n-r)\times r}$,$\boldsymbol{X}_3$为可逆矩阵且 rank $\boldsymbol{X}_3=n-r$,以及对称正定矩阵$\tilde{\boldsymbol{Z}}$,矩阵$\boldsymbol{W}_i(i\in\tilde{\boldsymbol{M}})$,$m$个满足$\alpha_i\geqslant 0,i\in\tilde{\boldsymbol{M}}$且$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1$的实数$\alpha_i$,使得下列线性矩阵不等式成立

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Xi}_i & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{W}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{\tau i}\tilde{\boldsymbol{Z}}\\ \boldsymbol{X} & -\tilde{\boldsymbol{Z}} & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{X} & 0 & -\boldsymbol{Q}^{-1} & 0 & 0\\ \boldsymbol{W}_i & 0 & 0 & -\boldsymbol{R}^{-1} & 0\\ \tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{A}_{\tau i}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\boldsymbol{Z}}\end{bmatrix}<0 \tag{10}$$

式中,$\boldsymbol{\Xi}_i=(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{W}_i)+(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{W}_i)^{\mathrm{T}}$。

则$\boldsymbol{u}_i(t)=\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$是切换时滞奇异系统(1)的一个保成本控制律,且相应的成本函数满足

$$J\leqslant\boldsymbol{\phi}_1^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{X}_1^{-1}\boldsymbol{\phi}_1(0)+\int_{-\tau}^{0}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(s)\tilde{\boldsymbol{Z}}^{-1}\boldsymbol{\phi}(s)\mathrm{d}s=J^* \tag{11}$$

选取的切换规则为

$$\sigma(t)=\arg\min_{i\in\tilde{M}}\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)+(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_i+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\tau i}\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{A}_{\tau i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}\}$$

式中,$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{X}^{-1}$,$\boldsymbol{K}_i=\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{X}^{-1}$,$\boldsymbol{Z}=\tilde{\boldsymbol{Z}}^{-1}$。

证明 只需证明式(5)和式(10)等价。对式(5)分别左乘$\boldsymbol{\Psi}$及右乘$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\Psi}=\mathrm{diag}\{(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{Z}^{-1}\}$,将$\boldsymbol{A}_{ci}=\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i$代入,记$\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Z}^{-1}=\tilde{\boldsymbol{Z}}$,$\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{W}_i$,其中$\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{X}_1>0$,则显然不等式(5)与线性矩阵不等式(10)等价。由定理 1 可知,$\boldsymbol{u}_i(t)=\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$是切换时滞奇异系统(1)的一个保成本控制律,且相应的成本函数满足

$$J\leqslant\boldsymbol{\phi}_1^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{X}_1^{-1}\boldsymbol{\phi}_1(0)+\int_{-\tau}^{0}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(s)\tilde{\boldsymbol{Z}}^{-1}\boldsymbol{\phi}(s)\mathrm{d}s=J^*$$

选取的切换规则为

$$\sigma(t)=\arg\min_{i\in\tilde{M}}\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)+(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_i+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\tau i}\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{A}_{\tau i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}\}$$

证毕

注 3 式(11)给出的系统性能指标上界依赖于线性矩阵不等式(10)的可行解和初始条件$\boldsymbol{\phi}(0)$,不同的可行解导出不同的性能指标上界,但系统最小性能指标上界是刻画系统性能的一个有意义的指标。

通过求解以下凸优化问题可以得到系统最小性能指标上界及最优保成本控制器。

定理 3 对给定的切换时滞奇异系统(1)和性能指标(4),如果以下优化问题

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{W}_i,\tilde{\boldsymbol{Z}},a,\boldsymbol{M}} & a+\mathrm{tr}(\boldsymbol{M})\\ \text{s. t.} & \begin{cases}\text{式(10)}\\ \begin{bmatrix}-a & \boldsymbol{\phi}_1^{\mathrm{T}}(0)\\ \boldsymbol{\phi}_1(0) & -\boldsymbol{X}_1\end{bmatrix}<0\\ \begin{bmatrix}-\boldsymbol{M} & \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{N} & -\tilde{\boldsymbol{Z}}\end{bmatrix}<0\end{cases}\end{cases} \tag{12}$$

有一个最优解$(\bar{\boldsymbol{X}},\bar{\boldsymbol{W}}_i,\bar{\tilde{\boldsymbol{Z}}},\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{M}})$,则状态反馈控制器 $\boldsymbol{u}_i(t)=\bar{\boldsymbol{W}}_i\bar{\boldsymbol{X}}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$是切换系统(1)的最优保成本控制器。式中,$\boldsymbol{M}$为对称正定矩阵;$\int_{-\tau}^{0}\boldsymbol{\phi}(s)\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s=\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}$。

3　仿真示例

考虑切换时滞奇异系统(1),系统参数为

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{\tau1}=\begin{bmatrix}0&0.2\\0.1&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{\tau2}=\begin{bmatrix}0.2&0\\0&0.1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\phi}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\mathrm{e}^{t+1}\\0\end{bmatrix}$$

取 $\alpha_1=0.3,\alpha_2=0.7$,性能指标(4)的正定加权矩阵为 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$,$\mathbf{R}=1$。系统的初始条件为

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}_1(t)\\\boldsymbol{\phi}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\mathrm{e}^{t+1}\\0\end{bmatrix},\ t\in[-1,0]$$

可知,$\boldsymbol{\phi}(0)=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\mathrm{e}\\0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0.6796\\0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{N}\approx\begin{bmatrix}0.4469&0\\0&0\end{bmatrix}$。

通过应用 LMI 工具箱中的求解器 min cx 求解问题(12),得到的最优解为

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{opt}}=\begin{bmatrix}0.4713&0\\0.1524&0.7065\end{bmatrix},\ \boldsymbol{W}_{1\mathrm{opt}}=[-0.0362\ \ -0.3155]$$

$$\boldsymbol{W}_{2\mathrm{opt}}=[-0.0275\ \ -0.1961],\ \tilde{\boldsymbol{Z}}_{\mathrm{opt}}=\begin{bmatrix}0.2154&0.0973\\0.0973&0.3021\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{opt}}=1.3455,\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{opt}}=\begin{bmatrix}1.5680&0\\0&1.1459\end{bmatrix}$$

利用优化问题的这个可行解,构造出系统的最优保成本控制器为

$$\boldsymbol{u}_1(t)=[0.0676\ \ -0.4466]\boldsymbol{x}(t)$$
$$\boldsymbol{u}_2(t)=[0.0314\ \ -0.2776]\boldsymbol{x}(t)$$

相应的性能指标上界为 $J^*=4.0594$。

注 4　对于优化问题(12),在保证线性矩阵不等式有解的情况下,如何选择 α_1、α_2 的值,将直接影响结果的保守性。

在 α_1、α_2 的值取定时,系统性能指标上界 J^* 依赖于线性矩阵不等式(10)的可行解和初始条件 $\boldsymbol{\phi}(0)$,不同的可行解会导出不同的性能指标上界,但最小 J^* 是刻画系统性能的一个最有意义的指标。仿真示例利用优化问题(12) 给出了系统的最优保成本控制器及最小性能指标上界 J^*。

4　结束语

时滞现象大量存在于实际控制系统中,并且往往是造成系统不稳定和性能下降的主要原因,因此对切换时滞奇异系统的研究具有一定的实际意义。本文利用 Lyapunov 函数方法和凸组合技术,研究了一类切换时滞奇异系统的最优保成本控制问题,给出了切换规则的设计方法及最优保成本控制器存在的充分条件,并且给出了控制器的参数化形式。仿真示例说明了本文方法的有效性。

参考文献:

[1] Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, 19(5): 59 - 70.

[2] Sun Z, Ge S S. Analysis and synthesis of switched linear control systems[J]. *Automatica*, 2005, 41(2): 181 - 195.

[3] Zhang W A, Yu L. Stability analysis for discrete-time switched time-delay systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(10): 2265 - 2271.

[4] Zhao J, Hill D J. On stability, L2-gain and H infinity control for switched systems[J]. *Automatica*, 2008, 44(5): 1220 - 1232.

[5] Xu H L, Teo K L, Liu X Z. Robust stability analysis of guaranteed cost control for impulsive switched systems[J]. *IEEE Trans. on Systems Man and Cybernetics Part B-cybernetics*, 2008, 38(5): 1419 - 1422.

[6] 王天成,高在瑞. 一类带有时滞的不确定广义系统的切换渐近稳定性[J]. 自动化学报, 2008, 34(8): 1013 - 1016. (Wang T C, Gao Z R. Asymptoticstability criterion for a class of switched uncertain descriptor systems with time-delay[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(8): 1013 - 1016.)

[7] Du Z P, Zhang Q L, Chang G S. State feedback stabilization for switched singular networked control systems with time delay[C]// *Proc. of the Chinese Control and Decision Conference*, 2009: 5587 - 5591.

[8] Chang S S L, Peng T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1972, 17(4): 474 - 483.

[9] Mukaidani H. Robust guaranteed cost control for uncertain stochastic systems with multiple decision makers[J]. *Automatica*, 2009, 45(7): 1758 - 1764.

[10] Wang R, Zhao J. Reliable guaranteed cost control for uncertain switched non-linear systems[J]. *International Journal of systems science*, 2009, 40(3): 205 - 211.

[11] Zhang X H, Zhang H Y, Bi S W. Guaranteed cost control for uncertain switched singular systems[C]// *Proc. of the Chinese Control and Decision Conference*, 2009: 4569 - 4573.

[12] 顾则全,刘贺平,廖福成,等. 基于 LMI 的不确定时滞切换广义系统的保成本控制[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(1): 147 - 151. (Gu Z Q, Liu H P, Liao F C, et al. Guaranteed cost controlfor uncertain time-delay switched singular systems based on LMI [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(1): 147 - 151.)

[13] 付主木,费树岷,薄煜明,等. 一类不确定切换奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制[J]. 南京理工大学学报(自然科学版), 2008, 32(3): 269 - 273. (Fu Z M, Fei S M, Bo Y M, et al. Robust H_∞ control for a class of switched uncertain singular systems[J]. *Journal of Nanjing University of Science and Technology (Natural Science)*, 2008, 32(3): 269 - 273.)