第 33 卷　第 6 期　　系统工程与电子技术　　Vol. 33　No. 6
2011 年 6 月　　Systems Engineering and Electronics　　June 2011

文章编号：1001-506X(2011)06-1305-05

模糊合作对策在凸几何上的 Shapley 函数

孟凡永，张　强
（北京理工大学管理与经济学院，北京 100081）

摘　要：首先给出了模糊合作对策在凸几何上的定义。通过相应的公理体系，论述了模糊合作对策在凸几何上的 Shapley 函数。为了更好了解此类模糊合作对策，研究了两类特殊模糊合作对策在凸几何上的 Shapley 函数，并证明了其存在性和唯一性，拓展了模糊合作对策的研究范围。最后通过算例分析来具体说明局中人在此类模糊合作对策上的收益值。

关键词：模糊合作对策；凸几何；Shapley 函数；多线性扩展；Choquet 积分

中图分类号：O 225；O 159　　**文献标志码：**A　　**DOI：**10.3969/j.issn.1001-506X.2011.06.21

The Shapley function for cooperative fuzzy games on convex geometries

MENG Fan-yong，ZHANG Qiang
(*School of Management and Economics*，*Beijing Institute of Technology*，*Beijing 100081*，*China*)

Abstract：The definition for cooperative fuzzy games on convex geometries is given. The Shapley function for cooperative fuzzy games on convex geometries is studied by corresponding axiomatic system. Meantime，in order to better understand the cooperative fuzzy games on convex geometries，the Shapley functions for two special kinds of cooperative fuzzy games on convex geometries are studied，and their existence and uniqueness are also proved，which extend the studying scope of cooperative fuzzy games. Finally，numerical examples are offered to explain the players' payoffs on these kinds of cooperative fuzzy games.

Keywords：cooperative fuzzy game；convex geometry；Shapley function；multilinear extension；Choquet integral

0　引　言

在经典合作对策中，局中人可以自由地与其他局中人合作组成联盟。但在现实生活中，由于伦理、政治、经济等原因，并不是所有的联盟都可以形成，即局中人不可以自由地与其他局中人结合。文献[1]结合图论知识探讨了具有“交流结构”的合作对策；文献[2]探讨了具有约束结构的合作对策，研究了此类合作对策的核心和预核仁；文献[3]通过推广文献[2]所给的公理体系，论述了所给具有约束结构的合作对策核心；文献[4]探讨了具有优先结构的合作对策的 Shapley 函数，并通过给出相应的公理体系证明了所给 Shapley 函数的存在性和唯一性；文献[5－6]分别论述了具有“析取允许结构”和“合取允许结构”的合作对策；文献[7－8]分别论述了具有“凸几何结构”和“扩展结构”的合作对策，给出了相应的 Shapley 函数，通过将文献[4]所给公理体系运用到所给的合作对策上，证明了 Shapley 函数的存在性和唯一性；另外，文献[9]对具有“凸几何结构”的合作对策上的 Shapley 函数提出了一条新的公理—链公理；文献[10－11]探讨了具有“凸几何结构”的合作对策上的 Banzhaf 指标和核心。

模糊合作对策是指局中人在参与合作时，由于种种原因，不能将自己所拥有的某一资源全部投入到某一个合作中，而是将自己所拥有某一资源的一部分投入合作。文献[12]研究了模糊合作对策的 Shapley 函数；文献[13－14]研究了模糊合作对策的模糊核心；文献[15]对模糊合作对策的字典序解进行了论述；文献[16－18]分别探讨了所给特殊模糊合作对策的 Shapley 函数，并分别探讨所给模糊合作对策上 Shapley 函数。此外，关于非合作模糊对策的探讨主要有文献[19－21]。

本文主要探讨模糊合作对策在凸几何上 Shapley 函数的一般表达式，证明了其存在性和唯一性。由于模糊联盟的收益值很难直接得到，为了更好地了解此类模糊合作对策，进一步探讨具有“多线性扩展形式”和“Choquet 积分形式”的模糊合作对策在凸几何上的 Shapley 函数，并证明了所给 Shapley 函数的存在性和唯一性。

1　预备知识

记局中人集合为 N，N 上的清晰联盟记为 $S_0, T_0, \cdots$，模糊联盟记为 $S, T, \cdots$。$L(N)$ 表示所有模糊联盟集合。函数 $v: L(N) \to \mathbf{R}_+$ 满足 $v(\varnothing)=0$ 称为 $L(N)$ 上的一个集函数，$L(N)$ 上集函数的全体记为 $G(N)$。对任意 $i \in N$ 和 $S \in L(N)$，

收稿日期：2009－10－19；**修回日期：**2010－10－14。
基金项目：国家自然科学基金(70771010，70801064，71071018)资助课题
作者简介：孟凡永(1981－)，男，博士研究生，主要研究方向为模糊数学、模糊决策、模糊对策。E-mail：mengfanyongtjie@163.com

记 $S(i)$为局中人 i 在模糊联盟 S 中的隶属度。任意$S\in L(N)$，其支集记为 $SuppS=\{i|S(i)>0,i\in N\}$。任意 $S,T\in L(N)$，记 $S\subseteq T$ 当且仅当 $S(i)=T(i)$或 $S(i)=0$，对任意 $i\in N$ 成立。$S\vee T$表示模糊联盟 S 和 T 的并，即任意 $i\in N,i\in Supp(S\vee T)$当且仅当 $i\in SuppS\cup SuppT$ 且$(S\vee T)(i)=S(i)\vee T(i)$；同理，$S\wedge T$ 表示模糊联盟 S 和 T 的交，即任意 $i\in N,i\in Supp(S\wedge T)$当且仅当 $i\in SuppS\cap SuppT$ 且$(S\wedge T)(i)=S(i)\wedge T(i)$。为论述方便，对任意 $S\in L(N)$，记为 $S=\{S(i)\}_{i\in SuppS}$。用 $v(S)$，$S\vee U(i)$，$S\backslash T$ 代替 $v(\{S\})$，$\{S\}\vee\{U(i)\}$，$\{S\}\backslash\{T\}$，其中 $S\backslash T$ 表示对任意 $i\in N,i\in SuppS$ 且 $i\notin SuppT$。

清晰合作对策在凸几何上的有关定义，在此不再详细给出，读者可以查阅文献[7,9]。下面直接给出模糊联盟 $U\in L(N)$上有关凸几何的概念。

定义 1 对模糊联盟 $U\in L(N)$，称$\mathcal{L}$是 U 上的一个凸几何，若 $\mathcal{L}$ 满足如下条件：

C1：$\varnothing,U\in\mathcal{L}$；

C2：若 $A,B\in\mathcal{L}$，则 $A\wedge B\in\mathcal{L}$；

C3：对 $A\in\mathcal{L}$ 且 $A\neq U$，则存在 $i\in SuppU\backslash SuppA$，满足 $A\vee U(i)\in\mathcal{L}$；

其中，$A,B\subseteq U$。对任意 $A,B\in\mathcal{L}$，定义 A 到 B 的最大链为 $A=M_1\subset M_2\subset\cdots\subset M_{k-1}\subset M_k=B$，其中，对任意 $1\leqslant j\leqslant k-1$ 都不存在 $C\in\mathcal{L}$，满足 $M_j\subset C\subset M_{j+1}$。由最大链的定义知 $m_j=m_{j+1}-1(j\in\{0,1,\cdots,k-1\})$，其中 m_j 表示 M_j 的势指标。A 到 B 的最大链的数目表示为 $c([A,B])$，$c(A)$表示$\varnothing$到 A 的最大链数目；对任意 $A\in\mathcal{L}$，有 $c([A,A])=1$。$\mathcal{C}(\mathcal{L})$表示$\varnothing$到 U 的最大链集合，用 $c(U)$表示$\mathcal{C}(\mathcal{L})$的势指标。对模糊联盟 U 上的凸几何$\mathcal{L}$记为$(U,\mathcal{L})$，$G(U,\mathcal{L})$表示$(U,\mathcal{L})$上的模糊合作对策的全体。对$A\in\mathcal{L}$ 且 $A\neq U$，若 $i\in SuppU\backslash SuppA$，满足 $A\vee U(i)\in\mathcal{L}$，则称 i 是模糊联盟 A 的一个扩张点，其全体记为 auA；对 $A\in\mathcal{L}$ 和 $i\in SuppA$，若 $A\backslash U(i)\in\mathcal{L}$，则称 i 是模糊联盟 A 的一个极点，其全体记为 exA。

定义 2 设 $v\in G(U,\mathcal{L})$，对任意 $S\in\mathcal{L}$ 满足 $i\notin SuppS$ 和 $S\vee\{U(i)\}\in\mathcal{L}$，有 $v(S\vee U(i))-v(S)=0$，则称局中人 $i\in SuppU$ 为$(U,\mathcal{L})$上关于 v 的一个模糊零元。

定义 3 设 $v\in G(U,\mathcal{L})$和 $T\in\mathcal{L}$，对任意 $S\in\mathcal{L}$ 有 $v(S\wedge T)=v(S)$，则称 T 为$(U,\mathcal{L})$上关于 v 的一个模糊支集。

定义 4 设 $v\in G(U,\mathcal{L})$，对任意 $S,T\in\mathcal{L}$，若 $S\vee T\in\mathcal{L}$，有

$$v(S)+v(T)\leqslant v(S\vee T)+v(S\wedge T)$$

则称 v 是$(U,\mathcal{L})$上的伪凸模糊合作对策。

2 模糊合作对策在凸几何上的 Shapley 函数

定义 5 设 $v\in G(U,\mathcal{L})$，$(U,\mathcal{L})$上关于 v 的模糊核心 $C(U,v,\mathcal{L})$表示为

$$C(U,v,\mathcal{L})=$$

$$\left\{x\in\mathbf{R}_{+}^{n}\mid\sum_{i\in SuppU}x_i=v(U),\sum_{i\in SuppS}x_i\geqslant v(S),\forall S\in\mathcal{L}\right\}$$

定理 1 设 $v\in G(U,\mathcal{L})$，若 v 是伪凸的，则 $C(U,v,\mathcal{L})\neq\varnothing$。

证明 对任意 $C\in\mathcal{C}(\mathcal{L})$，不妨设 $C=\{\varnothing,\{U(i_1)\},\{U(i_1),U(i_2)\},\cdots,\{U(i_k)\}_{k\in SuppU}\}$。对任意 $i_j\in SuppU$ 令 $x_j=v(\{U(i_k)\}_{1\leqslant k\leqslant j})-v(\{U(i_k)\}_{1\leqslant k\leqslant j-1})$。由 v 的伪凸性和定义 5 易知：$(x_i)_{i\in SuppU}\in C(U,v,\mathcal{L})\neq\varnothing$。 证毕

根据文献[7]提出的清晰合作对策在凸几何上关于 Shapley 函数的定义，本文作者给出模糊合作对策在凸几何上关于 Shapley 函数的定义如下：

定义 6 函数 $f:G(U,\mathcal{L})\rightarrow\mathbf{R}_{+}^{L(U)}$ 称为$(U,\mathcal{L})$上关于 $G(U,\mathcal{L})$的一个 Shapley 函数，f 满足公理 1～公理 3。

公理 1 （线性性质）对任意 $v,w\in G(U,\mathcal{L})$和 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，有

$$f(U,\alpha v+\beta w,\mathcal{L})=\alpha f(U,v,\mathcal{L})+\beta f(U,w,\mathcal{L})$$

公理 2 （强等级性）对任意 $i,j\in SuppU$ 和 $\varnothing\neq S\in\mathcal{L}$，满足 $U(i)=U(j)$且 $i,j\in SuppS$，有

$$h_S(i)f_j(U,u_S,\mathcal{L})=h_S(j)f_i(U,u_S,\mathcal{L})$$

式中

$$h_S(i)=\frac{|\{C\in\mathcal{C}(\mathcal{L})\}:C(U(i))\wedge S=S|}{c(U)}$$

$C(U(i))$表示局中人 i 为最后一个元素的最大链集合；u_S 表示模糊联盟 S 上的一致对策，即对任意 $T\in L(N)$，满足 $S\subseteq T$，有 $u_S(T)=1$，否则 $u_S(T)=0$。

公理 3 （有效性）若 $T\in\mathcal{L}$ 是$(U,\mathcal{L})$上关于 $v\in G(U,\mathcal{L})$的一个模糊支集，则

$$\sum_{i\in SuppT}f_i(U,v,\mathcal{L})=v(T)$$

性质 1 对$(U,\mathcal{L})$和任意 $S\in\mathcal{L}$，若 $i\notin exS$，则局中人 $i\in SuppU$ 是关于一致对策 u_S 的一个模糊零元。

证明 若存在 $T\in\mathcal{L}$，满足 $i\notin SuppT$ 和 $T\vee U(i)\in\mathcal{L}$，则 $u_S(T\vee U(i))-u_S(T)=1$ 当且仅当 $S\backslash U(i)=T\in\mathcal{L}$，此与已知相矛盾。故 $i\in SuppU$ 是关于 u_S 的一个模糊零元。 证毕

定理 2 设 $v\in G(U,\mathcal{L})$，函数 $\varphi:G(U,\mathcal{L})\rightarrow\mathbf{R}_{+}^{L(U)}$ 定义为

$$\varphi_i(U,v,\mathcal{L})=\sum_{T\in\mathcal{L},i\in exT}\frac{c(T\backslash U(i))c([T,U])}{c(U)}\cdot(v(T)-v(T\backslash U(i)))\quad\forall i\in SuppU\tag{1}$$

则式(1)是$(U,\mathcal{L})$上关于 $v\in G(U,\mathcal{L})$的唯一 Shapley 函数。

证明

(1) 存在性

由式(1)知：公理 1 显然成立。

公理 2 对 $i\in SuppU$ 和给定的 $S\in\mathcal{L}$，若 $i\notin exS$。由性质 1 知，对任意 $T\in\mathcal{L}$ 满足 $i\in exT$，有 $u_S(T)-u_S(T\backslash U(i))=0$，故 $\varphi_i(U,u_S,\mathcal{L})=0$；又当 $i\notin exS$ 时，$h_S(i)=0$。故此时公理 2 成立；若 $i\in exS$，此时有

$$\varphi_i(U,u_S,\mathcal{L})=\sum_{T\in\mathcal{L},i\in exT}\frac{c(T\backslash U(i))c([T,U])}{c(U)}\cdot(u_S(T)-u_S(T\backslash U(i)))=\sum_{S\subseteq T\in\mathcal{L},i\in exT}\frac{c(T\backslash U(i))c([T,U])}{c(U)}=\frac{|\{C\in\mathcal{C}(\mathcal{L})\}:C(U(i))\wedge S=S|}{c(U)}=h_S(i)$$

同理可得：$\varphi_j(U,u_S,\mathcal{L})=h_S(j)$。故公理 2 成立。

公理 3 对任意 $S\in\mathcal{L}\backslash\{U,\varnothing\}$，由

$$\sum_{S\in\mathcal{L},i\in exS}\frac{c(S\backslash U(i))c([S,U])}{c(U)}=\sum_{S\in\mathcal{L},i\in auS}\frac{c(S)c([S\vee U(i),U])}{c(U)}$$

又 $S=U$ 时，有

$$\sum_{U\in\mathcal{L},i\in exU}\frac{c(U\backslash U(i))c([U,U])}{c(U)}=\sum_{U\in\mathcal{L},i\in exU}\frac{c(U\backslash U(i))}{c(U)}=1$$

而任意的 $i\in Supp(U\backslash T)$ 及 $S\in\mathcal{L}$,满足 $i\in auS$ 时,有 $v(S\vee U(i))=v(S)$,故 $\varphi_i(U,v,\mathcal{L})=0$。

由式(1)知

$$\sum_{i\in SuppT}\varphi_i(U,v,\mathcal{L})=\sum_{i\in SuppU}\varphi_i(U,v,\mathcal{L})=$$
$$v(U)=v(U\wedge T)=v(T)$$

(2) 唯一性

由文献[7]中的定理2知,对任意 $v\in G(U,\mathcal{L})$,v 可表示为 $v=\sum_{T\in\mathcal{L}}c_Tu_T$,其中 $c_T=\sum_{S\in[T\backslash exT,T]}(-1)^{|SuppT|-|SuppS|}v(S)$,$|SuppS|$,$|SuppT|$ 分别表示 $SuppS$ 和 $SuppT$ 的势指标。由线性性质知,对任意 $S\in\mathcal{L}$,只需证式(1)在 S 的一致对策 u_S 上的唯一性即可。由有效性知,对任意 $i\in SuppU\backslash SuppS$,有 $\varphi_i(U,u_S,\mathcal{L})=0$,由有效性、强等级性及 $\sum_{i\in SuppS}h_S(i)=1$ 知

$$\varphi_i(U,u_S,\mathcal{L})=h_S(i),\ \forall i\in SuppS$$

即式(1)在一致对策 u_S 上是唯一的。　　证毕

性质 2　设 $v\in G(U,\mathcal{L})$,对任意 $S\in\mathcal{L}$,满足 $i,j\notin SuppS$,若 $S\vee U(i)\in\mathcal{L}$ 当且仅当 $S\vee U(j)\in\mathcal{L}$ 且 $v(S\vee U(i))=v(S\vee U(j))$,则 $\varphi_i(U,v,\mathcal{L})=\varphi_j(U,v,\mathcal{L})$。

证明

$$\varphi_i(U,v,\mathcal{L})=$$
$$\sum_{S\in\mathcal{L},i\in exS}\frac{c(S\backslash U(i))c([S,U])}{c(U)}(v(S)-v(S\backslash U(i)))=$$
$$\sum_{\substack{i\in exS,\\ j\in SuppS,S\in\mathcal{L}}}\frac{c(S\backslash U(i))c([S,U])}{c(U)}(v(S)-v(S\backslash U(i)))+$$
$$\sum_{\substack{i\in exS,\\ j\notin SuppS,S\in\mathcal{L}}}\frac{c(S\backslash U(i))c([S,U])}{c(U)}(v(S)-v(S\backslash U(i)))=$$
$$\sum_{\substack{j\in exS,\\ i\in SuppS,S\in\mathcal{L}}}\frac{c(S\backslash U(j))c([S,U])}{c(U)}(v(S)-v(S\backslash U(j)))+$$
$$\sum_{\substack{j\in exS\\ i\notin SuppS,S\in\mathcal{L}}}\frac{c(S\backslash U(j))c([S,U])}{c(U)}(v(S)-v(S\backslash U(j)))=$$
$$\sum_{S\in\mathcal{L},j\in exS}\frac{c(S\backslash U(j))c([S,U])}{c(U)}(v(S)-v(S\backslash U(j)))=$$
$$\varphi_j(U,v,\mathcal{L})$$

式中,当 $i,j\in SuppS$,由已知得到 $(S\backslash U(i))\vee U(i)=(S\backslash U(j))\vee U(j)$,又 $S\backslash U(i)\in\mathcal{L}$ 当且仅当 $S\backslash U(j)\in\mathcal{L}$ 且 $v(S\backslash U(i))=v(S\backslash U(j))$ 得到等 3 个等式的第 1 项与等 2 个等式的第 1 项等价。　　证毕

性质 3　若 $v\in G(U,\mathcal{L})$ 是 $(U,\mathcal{L})$ 上的伪凸模糊合作对策,则任意 $U(i)\in\mathcal{L}$,有 $\varphi_i(U,v,\mathcal{L})\geqslant v(U(i))$。

证明　由 $v\in G(U,\mathcal{L})$ 在 $(U,\mathcal{L})$ 上的伪凸性知,对任意 $S\in\mathcal{L}$ 及 $i\in exS$,有 $v(S)-v(S\backslash U(i))\geqslant v(U(i))$,故

$$\varphi_i(U,v,\mathcal{L})\geqslant\sum_{S\in\mathcal{L},i\in exS}\frac{c(S\backslash U(i))c([S,U])}{c(U)}v(U(i))=v(U(i))$$

证毕

定理 3　若 $v\in G(U,\mathcal{L})$ 是 $(U,\mathcal{L})$ 上的伪凸模糊合作对策,则 $(\varphi_i(U,v,\mathcal{L}))_{i\in SuppU}\in C(U,v,\mathcal{L})$。

证明　由定理 1 知,式(1)是 $C(U,v,\mathcal{L})$ 中 $c(U)$ 个元素的凸组合,而 $C(U,v,\mathcal{L})$ 是凸集,故 $(\varphi_i(U,v,\mathcal{L}))_{i\in SuppU}\in C(U,v,\mathcal{L})$。　　证毕

3　两类特殊模糊合作对策在凸几何上的 Shapley 函数

本节主要探讨具有"多线性扩展形式"的模糊合作对策[22]在凸几何上的 Shapley 函数和"Choquet 积分形式"的模糊合作对策[16]在凸几何上的 Shapley 函数。

3.1　具有"多线性扩展形式"的模糊合作对策在凸几何上的 Shapley 函数

文献[22]给出的具有"多线性扩展形式"的模糊合作对策,其模糊联盟的收益值为

$$v(U)=\sum_{T_0\subseteq SuppU}\{\prod_{i\in T_0}U(i)\prod_{i\in SuppU\backslash T_0}(1-U(i))\}v(T_0)\quad(2)$$

式中,U 是任意给定的模糊联盟。

对 $(U,\mathcal{L})$ 及 $S\in\mathcal{L}$,定义模糊联盟 S 在 $(U,\mathcal{L})$ 上关于 $v\in G(U,\mathcal{L})$ 的收益值为

$$v(S)=\sum_{T_0\subseteq SuppS,T_0\in\mathcal{L}_0}\{\prod_{i\in T_0}U(i)\prod_{i\in SuppS\backslash T_0}(1-U(i))\}v(T_0)\quad(3)$$

式中,$\mathcal{L}_0$ 是 $\mathcal{L}$ 所对应的清晰凸几何。记 $(U,\mathcal{L})$ 上此类模糊合作对策的全体为 $G^O(U,\mathcal{L})$。

例如:若已知 $U=\{U(1),U(2),U(3)\}$ 和 $\mathcal{L}=\{\varnothing,\{U(1)\},\{U(1),U(3)\},U\}$,则 $\mathcal{L}$ 所对应的清晰凸几何 $\mathcal{L}_0=\{\varnothing,\{1\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$。

定理 4　设 $v\in G^O(U,\mathcal{L})$,函数 $\varphi^O:G^O(U,\mathcal{L})\to\mathbf{R}_+^{L(U)}$ 定义为

$$\varphi_i^O(U,v,\mathcal{L})=\sum_{S\in\mathcal{L},i\in exS}\frac{c(S\backslash U(i))c([S,U])}{c(U)}\cdot$$
$$\Big(\sum_{T_0\in\mathcal{L}_0,T_0\subseteq SuppS}\{\prod_{j\in T_0}U(j)\prod_{j\in SuppS\backslash T_0}(1-U(j))\}v(T_0)-$$
$$\sum_{T_0\in\mathcal{L}_0,T_0\subseteq SuppS\backslash i}\{\prod_{j\in T_0}U(j)\prod_{j\in SuppS\backslash(T_0\cup i)}(1-U(j))\}v(T_0)\Big)\quad(4)$$
$$\forall i\in SuppU$$

则式(4)是 $(U,\mathcal{L})$ 上关于 $v\in G^O(U,\mathcal{L})$ 的唯一 Shapley 函数。

证明　由定理 2 知存在性显然成立。对任意 $S\in\mathcal{L}$ 和 $v\in G^O(U,\mathcal{L})$,设 u_S 是定义的模糊联盟 S 上的一致对策。下证式(4)的唯一性成立,对任意 $S\in\mathcal{L}$,由线性性质知,只需证明式(4)在 S 的一致对策 u_S 上的唯一性即可。由有效性和性质 1 得到

$$u_S(S)=\sum_{i\in SuppS}\varphi_i^O(U,u_S,\mathcal{L})=\sum_{i\in exS}\varphi_i^O(U,u_S,\mathcal{L})$$

由 $h_S(i)\varphi_j^O(U,u_S,\mathcal{L})=h_S(j)\varphi_i^O(U,u_S,\mathcal{L})$ 知,对任意 $i\in exS$,有

$$\varphi_j^O(U,u_S,\mathcal{L})=\frac{h_S(j)}{h_S(i)}\varphi_i^O(U,u_S,\mathcal{L})$$

得到

$$u_S(S)=\sum_{j\in exS}\varphi_j^O(U,u_S,\mathcal{L})=$$
$$\sum_{j\in exS,j\neq i}\varphi_j^O(U,u_S,\mathcal{L})+\varphi_i^O(U,u_S,\mathcal{L})=$$
$$\sum_{j\in exS,j\neq i}\frac{h_S(j)}{h_S(i)}\varphi_i^O(U,u_S,\mathcal{L})+\varphi_i^O(U,u_S,\mathcal{L})=$$
$$\frac{\sum_{j\in exS}h_S(j)}{h_S(i)}\varphi_i^O(U,u_S,\mathcal{L})=\frac{1}{h_S(i)}\varphi_i^O(U,u_S,\mathcal{L})$$

即 $\varphi_i^O(U,u_S,\mathcal{L})=h_S(i)$。又任意 $i\in SuppS$，若 $i\notin exS$，则 $\varphi_i^O(U,u_S,\mathcal{L})=0$。故式(4)在关于 S 上的一致对策 u_S 是唯一的。 证毕

定理 5 若 $v\in G^O(U,\mathcal{L})$是$(U,\mathcal{L})$上的伪凸模糊合作对策，且 $v\in G^O(U,\mathcal{L})$所对应的清晰合作对策在$\mathcal{L}$所对应清晰凸几何$\mathcal{L}_0$ 上是凸的，则$(U,\mathcal{L})$上的模糊核心 $C_O(U,v,\mathcal{L})\neq\varnothing$，且可表示为

$$C_O(U,v,\mathcal{L})=\{y\in\mathbf{R}_+^{L(U)}\mid\sum_{i\in SuppU}y_i=\sum_{B_0\subseteq SuppU,B_0\in\mathcal{L}_0}\{\prod_{i\in B_0}U(i)\prod_{i\in SuppU\setminus T_0}(1-U(i))\}x^{B_0},\ \forall B_0\in\mathcal{L}_0,\ \forall x^{B_0}\in C(v_{B_0})\}\tag{5}$$

式中，$C(v_{B_0})$表示 v 限制在 B_0 上的核心。

证明 类似于文献[14]中的性质 4.1。

说明 定理 5 中之所以要求 $v\in G^O(U,\mathcal{L})$是伪凸的，是因为 $v\in G^O(U,\mathcal{L})$所对应的清晰合作对策在$\mathcal{L}_0$ 上的凸性，不能保证 $v\in G^O(U,\mathcal{L})$是伪凸的，原因在于不是所有模糊联盟都是可行的。

定理 6 若 $v\in G^O(U,\mathcal{L})$是$(U,\mathcal{L})$上的伪凸模糊合作对策，则$(\varphi_i^O(U,v,\mathcal{L}))_{i\in SuppU}\in C_O(U,v,\mathcal{L})$。

证明 证明类似于定理 3。

3.2 具有“Choquet 积分形式”的模糊合作对策在凸几何上的 Shapley 函数

文献[16]给出的具有“Choquet 积分形式”的模糊合作对策，其模糊联盟的收益值为

$$v(U)=\sum_{l=1}^{q(U)}v([U]_{h_l})(h_l-h_{l-1})\tag{6}$$

式中，U 是任意给定的模糊联盟，$Q(U)=\{U(i)\mid U(i)>0,i\in N\}$，$q(U)=|Q(U)|$，$Q(U)$上的元素按递增顺序写为：$0=h_0\leqslant h_1\leqslant\cdots\leqslant h_{q(U)}$。记$(U,\mathcal{L})$上此类模糊合作对策的全体为 $G^C(U,\mathcal{L})$。

引理 1 $\mathcal{L}$是模糊联盟 U 上的凸几何当且仅当对任意 $l\in\{1,2,\cdots,q(U)\}$，$\mathcal{L}_{h_l}$是清晰联盟$[U]_{h_l}$上的凸几何。

证明 $\Leftarrow$当 $l=1$ 时，由$\mathcal{L}_{h_l}$是清晰联盟$[U]_{h_l}$上的凸几何，得到$\mathcal{L}$是模糊联盟 U 上的凸几何；

$\Rightarrow$由$\mathcal{L}$是模糊联盟 U 上的凸几何知 $U,\varnothing\in\mathcal{L}$，得到$[U]_{h_l}$，$\varnothing\in\mathcal{L}_{h_l}$；对任意 $S_0,T_0\in\mathcal{L}_{h_l}$，存在 $E,F\in\mathcal{L}$ 满足$[E]_{h_l}=S_0$ 和$[F]_{h_l}=T_0$，由$E\wedge F\in\mathcal{L}$ 知$[E\wedge F]_{h_l}=[E]_{h_l}\cap[F]_{h_l}\in\mathcal{L}_{h_l}$，即 $S_0\cap T_0\in\mathcal{L}_{h_l}$；对任意$\varnothing\neq S_0\in\mathcal{L}_{h_l}$且 $S_0\neq[U]_{h_l}$，若不存在$k\in[U]_{h_l}$，使得 $S_0\cup k\in\mathcal{L}_{h_l}$，则存在 $H_0\in\mathcal{L}_{h_l}$ 满足 $exH_0=\varnothing$，则在$\mathcal{L}$中存在模糊联盟 $P\neq\varnothing$且 $P\neq U$ 满足$[P]_{h_l}=H_0$ 和 $exP=\varnothing$，此与$\mathcal{L}$是模糊联盟 U 上的凸几何矛盾。 证毕

定理 7 设 $v\in G^C(U,\mathcal{L})$，函数 $\varphi^C:G^C(U,\mathcal{L})\rightarrow\mathbf{R}_+^{L(U)}$ 定义为

$$\varphi_i^C(U,v,\mathcal{L})=\sum_{l=1}^{q(U)}\phi_i([U]_{h_l},v,\mathcal{L}_{h_l})(h_l-h_{l-1}),\ \forall i\in SuppU\tag{7}$$

式中，$\mathcal{L}_{h_l}$是$[U]_{h_l}$上关于$\mathcal{L}$ 的清晰凸几何，$\varphi([U]_{h_l},v,\mathcal{L}_{h_l})$是$\mathcal{L}_{h_l}$上的 Shapley 函数，即对任意 $i\in[U]_{h_l}$，有 $\phi_i([U]_{h_l},v,\mathcal{L}_{h_l})=\sum_{S_0\in\mathcal{L}_{h_l},i\in exS_0}\dfrac{c(S_0\setminus i)c([S_0,[U]_{h_l}])}{c([U]_{h_l})}(v(S_0)-v(S_0\setminus i))$。则式(7)是$(U,\mathcal{L})$上关于 $v\in G^C(U,\mathcal{L})$的唯一 Shapley 函数。

需要指出的是：对任意 $l\in\{1,2,\cdots,q(U)\}$，$[U]_{h_l}$上关于$\mathcal{L}$ 得到的清晰凸几何$\mathcal{L}_{h_l}$中可能会有相同的最大链。此时，不能将其看作是一条。例如：若模糊联盟 $U=\{U(i)\}_{i\in\{1,2,3\}}$上的凸几何$\mathcal{L}=\{\varnothing,\{U(1)\},\{U(3)\},\{U(1),U(2)\},\{U(1),U(3)\},U\}$，由$\mathcal{L}$知：$c(U)=3$ 和$\mathcal{C}(\mathcal{L})=\{\{\varnothing,\{U(1)\},\{U(1),U(2)\},U\},\{\varnothing,\{U(1)\},\{U(1),U(3)\},U\},\{\varnothing,\{U(3)\},\{U(1),U(3)\},U\}\}$。若已知 $U(1)<U(2)<U(3)$。当 $l=2$ 时，由$\mathcal{C}(\mathcal{L})$得到：$\mathcal{C}(\mathcal{L}_{h_2})=\{\{\varnothing,\{2\},\{2,3\}\},\{\varnothing,\{3\},\{2,3\}\},\{\varnothing,\{3\},\{2,3\}\}\}$。即$\mathcal{C}(\mathcal{L}_{h_2})$有两条相同的最大链$\{\varnothing,\{3\},\{2,3\}\}$，且 $c([U]_{h_2})=3$ 和$c(\{3\})=2$。故式(7)在形式上虽然与文献[16]中的式(2)相同，但是实际意义已不一样。

证明 由定理 2 和引理 1 不难得到存在性成立；

对任意 $S\in\mathcal{L}$ 及 $l\in\{1,2,\cdots,q(U)\}$满足$[S]_{h_l}\neq\varnothing$。由线性性质知，只需证明函数 $\phi([U]_{h_l},v,\mathcal{L}_{h_l})$在$[S]_{h_l}$所对应的一致对策 $u_{[S]_{h_l}}$ 上的唯一性即可，其中

$$u_{[S]_{h_l}}(T_0)=\begin{cases}1,\ [S]_{h_l}\subseteq T_0\\0,\ 其他\end{cases}$$

由清晰合作对策在凸几何上的 Shapley 函数的有效性和强等级性得到

$$\phi_i([U]_{h_l},u_{[S]_{h_l}},\mathcal{L}_{h_l})=\begin{cases}h_{[S]_{h_l}}(i),\ i\in ex[S]_{h_l}\\0,\ 其他\end{cases}\tag{8}$$

式中，$h_{[S]_{h_l}}(i)=\dfrac{|\{C\in\mathcal{C}(\mathcal{L}_{h_l}):C(i)\cap[S]_{h_l}=[S]_{h_l}\}|}{c([U]_{h_l})}$，$ex[S]_{h_l}$是$[S]_{h_l}\in\mathcal{L}_{h_l}$极点的集合。由式(8)知，函数 φ 在$\mathcal{L}_{h_l}$上关于 $u_{[S]_{h_l}}$ 是唯一的。 证毕

定理 8 设 $v\in G^C(U,\mathcal{L})$，对任意 $l\in\{1,2,\cdots,q(U)\}$，若 v 是限制在$\mathcal{L}_{h_l}$上的凸合作对策，则$(U,\mathcal{L})$上关于 $v\in G^C(U,\mathcal{L})$的模糊核心 $C_C(U,v,\mathcal{L})\neq\varnothing$，且可表示为

$$C_C(U,v,\mathcal{L})=\left\{y\in\mathbf{R}_+^{L(U)}\mid\sum_{i\in SuppU}y_i=\sum_{B\in\mathcal{L}}\sum_{l=1}^{q(U)}x^{[B]_{h_l}}(h_l-h_{l-1}),\ \forall B\in\mathcal{L},\forall x^{[B]_{h_l}}\in C(v_{[B]_{h_l}}),l=1,2,\cdots,q(U)\right\}$$

式中，$C(v_{[B]_{h_l}})$表示 v 限制在$[B]_{h_l}$上的核心。

证明 类似于文献[14]中的定理 4.3。

定理 9 设 $v\in G^C(U,\mathcal{L})$，对任意 $l\in\{1,2,\cdots,q(U)\}$，若 v 是限制在$\mathcal{L}_{h_l}$上的凸合作对策，则$(\varphi_i^C(U,v,\mathcal{L}))_{i\in SuppU}\in C_C(U,v,\mathcal{L})$。

证明 由清晰合作对策在凸几何上的 Shapley 函数的有效性知

$$\sum_{i\in SuppU}\varphi_i^C(U,v,\mathcal{L})=\sum_{i\in SuppU}\sum_{l=1}^{q(U)}\phi_i([U]_{h_l},v,\mathcal{L}_{h_l})(h_l-h_{l-1})=\sum_{l=1}^{q(U)}\sum_{i\in SuppU}\phi_i([U]_{h_l},v,\mathcal{L}_{h_l})(h_l-h_{l-1})=\sum_{l=1}^{q(U)}v([U]_{h_l})(h_l-h_{l-1})=v(U)$$

又任意 $S\in\mathcal{L}$，有

$$\sum_{i\in SuppS}\varphi_i^C(U,v,\mathcal{L})=\sum_{i\in SuppS}\sum_{l=1}^{q(U)}\phi_i([U]_{h_l},v,\mathcal{L}_{h_l})(h_l-h_{l-1})=\sum_{l=1}^{q(U)}\sum_{i\in SuppS}\phi_i([U]_{h_l},v,\mathcal{L}_{h_l})(h_l-h_{l-1})\geqslant\sum_{l=1}^{q(U)}v([S]_{h_l})(h_l-h_{l-1})=v(S)$$

式中，“$\geqslant$”由$(\phi_i(U,v,\mathcal{L}_{h_l}))_{i\in[U]_{h_l}}\in C(v_{[U]_{h_l}})$得到，$C(v_{[U]_{h_l}})$

为 v 限制在 $[U]_{h_l}$ 上的核心。　　证毕

4 算例分析

例 1　令局中人集合 $N=\{1,2,3,4\}$，U 是 $L(N)$ 上的一个模糊联盟，对任意 $i\in\{1,2,3,4\}$ 满足 $U(i)>0$，模糊联盟 U 上的凸几何 $\mathcal{L}=\{\varnothing,\{U(1)\},\{U(2)\},\{U(1),U(2)\},\{U(1),U(3)\},\{U(1),U(2),U(3)\},\{U(1),U(2),U(4)\},U\}$，若已知 N 上有关清晰联盟的收益值如表 1 所示，且 $U(1)=0.3$，$U(2)=0.5$，$U(3)=0.7$，$U(4)=0.8$。试求 $(U,\mathcal{L})$ 上关于 $v\in G^O(U,\mathcal{L})$ 和 $v\in G^C(U,\mathcal{L})$ 的 Shapley 函数。

表 1　清晰联盟的收益值

S_0	$v(S_0)$	S_0	$v(S_0)$	S_0	$v(S_0)$
{1}	1	{1,3}	4	{1,2,4}	6
{2}	1	{2,3}	3	{2,3,4}	7
{3}	1	{2,4}	5	{1,2,3,4}	10
{4}	1	{3,4}	4	—	—
{1,2}	3	{1,2,3}	6	—	—

解　由式(4)知：$\varphi_1^O(U,v,\mathcal{L})=0.36$，$\varphi_2^O(U,v,\mathcal{L})=0.59$，$\varphi_3^O(U,v,\mathcal{L})=0.4$，$\varphi_4^O(U,v,\mathcal{L})=-0.02$。

由式(7)知：$\varphi_1^C(U,v,\mathcal{L})=0.42$，$\varphi_2^C(U,v,\mathcal{L})=0.75$，$\varphi_3^C(U,v,\mathcal{L})=1.75$，$\varphi_4^C(U,v,\mathcal{L})=2.38$。

例 2　若 $v(1,2,3)=v(1,2,4)=10$，$v(N)=30$。其他数据同例 1。求 $(U,\mathcal{L})$ 上关于 $v\in G^O(U,\mathcal{L})$ 的 Shapley 函数。

解　由式(4)知：$\varphi_1^O(U,v,\mathcal{L})=0.36$，$\varphi_2^O(U,v,\mathcal{L})=0.59$，$\varphi_3^O(U,v,\mathcal{L})=1.22$，$\varphi_4^O(U,v,\mathcal{L})=1.06$。

不难发现例 1、例 2 都满足有效性。在例 1 中，当 $v\in G^O(U,\mathcal{L})$ 时，虽然 v 所对应的清晰合作对策在 $\mathcal{L}$ 所对应的清晰凸几何上是凸的，但局中人在 $(U,\mathcal{L})$ 上关于 $v\in G^O(U,\mathcal{L})$ 的收益 $(\varphi_i^O(U,v,\mathcal{L}))_{i\in N}$ 不满足个人理性，因而 $(\varphi_i^O(U,v,\mathcal{L}))_{i\in N}$ 不是 $(U,\mathcal{L})$ 上关于 $v\in G^O(U,\mathcal{L})$ 的分配；当 $v\in G^C(U,\mathcal{L})$ 时，由局中人在 $(U,\mathcal{L})$ 上关于 $v\in G^C(U,\mathcal{L})$ 的收益值和定义 5，不难得到 $(\varphi_i^C(U,v,\mathcal{L}))_{i\in N}$ 属于其模糊核心。例 2 中，易知 $(\varphi_i^O(U,v,\mathcal{L}))_{i\in N}$ 满足个人理性，由模糊核心的定义进一步得到 $(\varphi_i^O(U,v,\mathcal{L}))_{i\in N}$ 属于其模糊核心。

5 结束语

通过对文献[7]中具有“凸几何结构”的合作对策上的 Shapley 函数公理的推广，证明了模糊合作对策在凸几何上的 Shapley 函数的存在性和唯一性；并进一步探讨了具有“凸几何结构”和“多线性扩展形式”的模糊合作对策以及具有“凸几何结构”和“Choquet 积分形式”的模糊合作对策上 Shapley 函数的存在性和唯一性。拓展了模糊合作对策的研究范围，对研究其他具有联盟约束的模糊合作对策有一定的借鉴意义。需要指出的是，本文只是对模糊合作对策在凸几何上的 Shapley 函数的探讨。目前，关于具有联盟约束的模糊合作对策的研究还不是很多，理论体系也不完善。

参考文献：

[1] Myerson R B. Graphs and cooperation in games[J]. *Mathematics of Operations Research*, 1977, 2(3): 225-229.

[2] Peleg B. On the reduced game property and its converse[J]. *International Journal of Game Theory*, 1989, 15(3): 187-200.

[3] Pulido M A, Sanchez S J. Characterization of the core in games with restricted cooperation[J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 175(2): 860-869.

[4] Faigle U, Kern W. The Shapley value for cooperative games under precedence constraints[J]. *International Journal of Game Theory*, 1992, 21(3): 249-266.

[5] Gilles R P, Owen G. *Cooperative games and disjunctive permission structures*[M]. Tilburg: Tilburg University, 1999.

[6] Gilles R P, Owen G, van den Brink R. Games with permission structures: the conjunctive approach[J]. *International Journal of Game Theory*, 1991, 20(3): 277-293.

[7] Bilbao J M, Edelman P H. The Shapley value on convex geometries[J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2000, 103(1-3): 33-40.

[8] Bilbao J M, Ordonez M. Axiomatizations of the Shapley value for games on augmenting systems[J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 196(3): 1008-1014.

[9] Bilbao J M. Axioms for the Shapley value on convex geometries[J]. *European Journal of Operational Research*, 1998, 110(2): 368-376.

[10] Bilbao J M, Jimenez A, Lopez J J. The Banzhaf power index on convex geometries[J]. *Mathematical Social Sciences*, 1998, 36(2): 157-173.

[11] Bilbao J M, Lebron E, Jimenez N. The core of games on convex geometries[J]. *European Journal of Operational Research*, 1999, 119(2): 365-372.

[12] Li S J, Zhang Q. A simplified expression of the Shapley function for fuzzy game[J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 196(1): 234-245.

[13] Tijs S, Branzei R, Ishihara S, et al. On cores and stable sets for fuzzy games[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2004, 146(2): 285-296.

[14] Yu X H, Zhang Q. The fuzzy core in games with fuzzy coalitions[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, 230(1): 173-186.

[15] Sakawa M, Nishizaki I. A lexicographical solution concept in an n-person cooperative fuzzy game[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 61(3): 265-275.

[16] Tsurumi M, Tanino T, Inuiguchi M. A Shapley function on a class of cooperative fuzzy games[J]. *European Journal of Operational Research*, 2001, 129(3): 596-618.

[17] Butnariu D. Stability and Shapley value for an n-persons fuzzy game[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1980, 4(1): 63-72.

[18] Butnariu D, Kroupa T. Shapley mappings and the cumulative value for n-person game with fuzzy coalitions[J]. *European Journal of Operational Research*, 2008, 186(1): 288-299.

[19] Li D F, Nan J X, Zhang M J. Interval programming models for matrix games with interval payoffs[J]. *Optimization Methods and Software*, 2010, 25.

[20] Li D F, Nan J X. A nonlinear programming approach to matrix games with payoffs of Atanassov's intuitionistic fuzzy sets[J]. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2009, 17(4): 585-607.

[21] Nan J X, Li D F, Zhang M J. A lexicographic method for matrix games with payoffs of triangular intuitionistic fuzzy numbers[J]. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 2010, 3(3): 280-289.

[22] Owen G. Multilinear extensions of games[J]. *Management Sciences*, 1971, 18(5): 64-79.