

高精度 LFM 信号参数估计的谱校正方法

罗蓬, 刘开华, 黄翔东, 于洁潇

(天津大学电子信息工程学院, 天津 300072)

摘要: 为精确估计噪声背景下线性调频(linear frequency modulation, LFM)信号的调频率和中心频率等参数,提出了一种基于 Radon 模糊变换(Radon-ambiguity transform, RAT)和分数阶傅里叶变换(fractional Fourier transform, FRFT)的离散谱校正估计方法。该方法将 LFM 信号的调频率和中心频率估计问题转化为模糊域和分数阶 Fourier 域上的两次一维谱峰搜索过程,并且通过对矩形窗截断的 LFM 信号的 RAT 和 FRFT 谱线结构分析,将能量重心谱校正法引入两次谱峰搜索过程,在不增加运算量的基础上实现了谱峰位置的超分辨率估计,较大幅度地提高了信号的参数估计精度。仿真结果显示,对于单分量 LFM 信号情况,该方法对信号的 RAT 和 FRFT 谱峰位置的校正误差分别降到了扫描步长的 1.55% 和 4.94%,证明了该方法的有效性。

关键词: 信号处理; 参数估计; 谱校正; 线性调频信号

中图分类号: TN9 11.72

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2011.06.08

High-accuracy parameter estimation for LFM signals based on spectrum correction

LUO Peng, LIU Kai-hua, HUANG Xiang-dong, YU Jie-xiao

(School of Electronics and Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: To estimate the parameters of linear frequency modulation (LFM) signal precisely in a noisy environment, a novel discrete spectrum correction method is proposed based on Radon-ambiguity transform (RAT) and fractional Fourier transform (FRFT). This method reduces the parameter estimation to two one-dimensional spectral peak searching processes, and by the spectral analysis of RAT and FRFT of LFM signal multiplied by rectangular window, the energy centrobaric correction measure is introduced in these two searching processes, which improves the estimation accuracy substantially without increasing any computing complexity. As shown in the simulation results, for the single-component LFM signal case, the correction errors of the RAT and FRFT spectral peak locations are reduced to 1.55% and 4.94% of the scanning step, which verifies the efficiency of the method.

Keywords: signal processing; parameter estimation; spectrum correction; linear frequency modulation (LFM) signal

0 引言

线性调频(linear frequency modulation, LFM)信号是一类重要的非平稳信号,被广泛应用于雷达、声纳和通信等信息系统^[1-2]。在这类系统中,LFM 信号的参数估计是一个重要的研究课题。目前,已经出现了很多比较成熟的算法^[3-5],其中文献[6-7]提出的基于分数阶傅里叶变换(fractional Fourier transform, FRFT)的 LFM 信号参数估计方法最受关注。该方法利用 FRFT 对 LFM 信号良好的能量聚焦性,将信号的参数估计问题转化为分数阶 Fourier 域上的二维谱峰搜索过程,具有鲁棒性强、物理意义明确等

优点。但是在实际应用中,只能得到有限长数据样本的离散 FRFT 谱,这就不可避免地存在由于时域截断产生的能量泄漏,使谱峰值变小、分辨率降低。另外,离散谱分析必然会受到栅栏效应的影响,导致峰值谱线位置偏离真实位置,若直接以谱峰扫描的方法估计谱峰位置,最大估计误差可能达到谱线间隔的 50%。针对这一问题,文献[6]提出了基于拟牛顿迭代法的两级搜索算法,较好地解决了估计的精度问题,但是该算法是一种迭代逼近算法,运算量偏大且初始值和搜索步长对算法性能的影响比较大。

针对上述问题,本文提出了一种基于 Radon 模糊变换(Radon-ambiguity transform, RAT)和 FRFT 的离散谱校

收稿日期:2010-02-02; 修回日期:2011-01-04。

基金项目:国家自然科学基金(60872001)资助课题

作者简介:罗蓬(1984-),男,博士研究生,主要研究方向为非平稳信号处理、阵列信号处理。E-mail:luopeng1984@sohu.com

正估计方法。该方法首先将 LFM 信号的调频率和中心频率估计问题转化为模糊域和分数阶 Fourier 域上的两次一维谱峰搜索,然后针对传统扫描方法中谱峰位置的估计精度受有限分辨率限制的问题,将能量重心谱校正方法引入两次谱峰搜索过程中,实现了谱峰位置的超分辨率估计,在不增加运算量的基础上提高了参数估计的精度。由于传统的离散谱校正方法仅应用于 Fourier 域谱分析,所以本文对矩形窗截断的 LFM 信号的 RAT 和 FRFT 谱线结构进行了分析,证明了能量重心法在本文环境中的适用性,然后对高斯白噪声环境下该方法的校正精度进行了理论分析。最后,通过仿真实验验证了本文方法的有效性。

1 基于 RAT 和 FRFT 的理想 LFM 信号参数估计原理

1.1 基于 RAT 的 LFM 信号调频率估计原理

首先给出理想无限长 LFM 信号的数学模型

$$s(t) = a_0 \exp [j\pi(2f_0 t + \mu_0 t^2)], -\infty < t < \infty \quad (1)$$

式中, a_0 、 f_0 和 μ_0 为未知参数,分别代表信号的幅度、中心频率以及调频率,其中 f_0 和 μ_0 为工程实践中较为关心的参数。

一个信号 $x(t)$ 的模糊函数(ambiguity function, AF)定义为

$$AF_s(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) e^{-j2\pi\xi t} dt \quad (2)$$

式中, (τ, ξ) 平面通常称为模糊域。将式(1)代入上述定义式,得到理想单分量 LFM 信号的模糊函数为

$$AF_s(\tau, \xi) = a_0^2 \exp \{j2\pi f_0 \tau\} \delta(\xi - \mu_0 \tau) \quad (3)$$

由式(3)可知,理想 LFM 信号的模糊函数在模糊域上是一条过原点的直线型冲击函数,且直线的斜率就是 LFM 信号的调频率,而信号的中心频率信息则隐藏在模糊函数的相位中。根据这一特点,对式(3)取模并作过原点的直线 $\xi = k\tau$ 上的 Radon 变换,不断改变直线的斜率 k ,形成如下的检测统计量

$$\eta(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |AF_s(\tau, \xi)| \delta(\xi - k\tau) d\xi d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |AF_s(\tau, k\tau)| d\tau \quad (4)$$

显然,当 $k = k_0 = \mu_0$ 时, $\eta(k)$ 的值最大。利用该性质,可以通过对 $\eta(k)$ 进行谱峰位置搜索实现 LFM 信号的调频率估计,用公式表示为

$$\hat{\mu}_0 = \arg \max_k \eta(k) \quad (5)$$

以上就是基于 RAT 的理想 LFM 信号调频率估计原理。实际应用中,通常利用模糊函数和分数阶相关的关系来简化 RAT 的运算过程。

定理 1^[8] 一个信号的分数阶自相关等于它的模糊函数沿相应 ϕ 角的径向切面,即

$$(s \otimes_{\phi} s)(\rho) = AF_s(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \quad (6)$$

式(4)可以改写成以信号的分数阶自相关函数表示的等价形式,即

$$\eta(k) = \int_{-\infty}^{\infty} |(s \otimes_{\arctan(k)} s)(\rho)| d\rho \quad (7)$$

而分数阶自相关函数可以通过信号的 FRFT 以及 Fourier 逆变换得到

$$(s \otimes_{\phi} s)(\rho) = F^{-\pi/2} \{ |F^{\pi/2+\phi} [s(t)]|^2 \}(\rho) \quad (8)$$

式中, $F^{-\pi/2}$ 表示 Fourier 逆变换。所以式(4)又可写为

$$\eta(k) = \int_{-\infty}^{\infty} |F^{-\pi/2} \{ |F^{\pi/2+\arctan(k)} [s(t)]|^2 \}(\rho)| d\rho \quad (9)$$

由于 FRFT 具有计算量与 FFT 相当的快速算法,所以利用式(9)计算信号的 RAT 可以大大减少运算复杂度。

1.2 基于 FRFT 的 LFM 信号中心频率估计原理

一个信号 $x(t)$ 的旋转角度为 α 的 FRFT 定义为

$$X_{\alpha}(u) = F^{\rho} [x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K_{\alpha}(t, u) dt \quad (10)$$

式中, ρ 为 FRFT 的阶,可以为任意实数; $\alpha = \rho\pi/2$; $K_{\alpha}(t, u)$ 为变换核函数,有

$$K_{\alpha}(t, u) = \begin{cases} \sqrt{1 - j \cot \alpha} e^{j\pi(t^2 \cot \alpha - 2tu \csc \alpha + u^2 \cot \alpha)}, & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t - u), & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t + u), & \alpha = (2n \pm 1)\pi \end{cases} \quad (11)$$

u 域一般称为分数阶 Fourier 域,而时域和频域则可分别视为 $\alpha=0$ 与 $\alpha=\pi/2$ 的特例。由于已经得到了信号调频率的估计值 $\hat{\mu}_0$,故可以计算出该 LFM 信号能量聚集域的 FRFT 旋转角度为

$$\alpha = \alpha_0 = -\arccot \hat{\mu}_0 \quad (12)$$

对信号作角度为 α_0 的 FRFT,得到能量聚集域上的 FRFT 谱 $|S_{\alpha_0}(u)|$ 。通过对 $|S_{\alpha_0}(u)|$ 的谱峰位置搜索即可实现 LFM 信号的中心频率估计,用公式表示为

$$\hat{f}_0 = \hat{u}_0 \csc \alpha_0 \quad (13)$$

$$\hat{u}_0 = \arg \max_u |S_{\alpha_0}(u)| \quad (14)$$

以上就是基于 FRFT 的理想 LFM 信号中心频率估计原理。

综上所述,LFM 信号的调频率和中心频率估计问题可以转化为式(5)和式(14)所示的两个一维谱峰搜索过程。实际应用中,只能得到有限长 LFM 信号的两个离散谱,由于受到时域截断以及栅栏效应的影响,在真实的谱峰位置未对准谱线间隔的整数倍位置时,若采用扫描方法,以峰值谱线的位置作为真实谱峰位置的估计,则最大可能造成 50% 谱线间隔的误差。在对信号参数精度要求比较高的应用场合,只能细化扫描步长、增大信号的采样率,但这样会使计算量呈级数增加,不利于工程实现。所以需要寻找一种更加简单快捷的超分辨率谱峰搜索方法。

2 基于 RAT 和 FRFT 的能量重心谱校正法

2.1 离散谱校正的能量重心法

离散谱校正技术是为了解决平稳信号的频率、幅度、相

位等参数的精确估计问题而提出的,目前主要有插值法、能量重心法、FFT+FT 连续细化谱分析法和相位差法四种校正方法^[9]。其中能量重心法是文献[10]在三点卷积幅值校正法基础上提出的一种通用校正方法,该方法利用常用窗谱函数的能量重心是坐标原点的原理求出频率校正量,是一种校正精度很高的近似方法。现将该方法的主要原理描述如下:

假设 $s(t)$ 为一时域谐波信号,其频率为 f_0 ,对其进行采样间隔为 Δt 的离散化,得到离散序列

$$s(n) = s(t) |_{t=n\Delta t}, n \in \mathbf{Z} \quad (15)$$

用长度为 $2N+1$ 的对称窗 $w(n)$ 对 $s(n)$ 截断,得到加窗后的采样序列

$$x(n) = w(n)s(n), n = -N, -N+1, \dots, N \quad (16)$$

为了估计该谐波信号的频率,对观测序列 $x(n)$ 进行离散 Fourier 变换(discrete Fourier transform, DFT),得到序列的离散频谱模函数如图 1 所示。

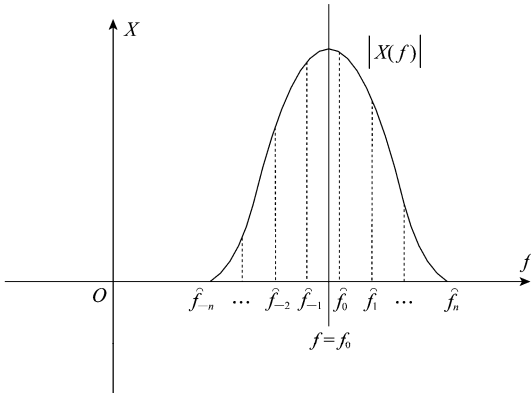


图 1 加窗截断谐波信号频率校正

显然,当真实的谱峰位置未对准谱线间隔的整数倍位置时(即非整周期截断时),谐波频率的估计误差为

$$\nabla f = \hat{f}_0 - f_0 \quad (17)$$

文献[10]证明,可以利用离散频谱的能量重心位置来恢复真实的谱峰位置,实现谐波频率的校正估计,用公式表示为

$$f_0 = \frac{\sum_{i=-\infty}^{\infty} [|X(\hat{f}_i)|^2 \times \hat{f}_i]}{\sum_{i=-\infty}^{\infty} |X(\hat{f}_i)|^2}, \hat{f}_i = \hat{f}_0 + i \cdot \Delta f \quad (18)$$

实际应用中,在频谱能量比较集中的情况下,可以用主瓣内功率谱值较大的几条谱线做近似计算,即

$$f_0 = \frac{\sum_{i=-n}^n [|X(\hat{f}_i)|^2 \times \hat{f}_i]}{\sum_{i=-n}^n |X(\hat{f}_i)|^2}, \hat{f}_i = \hat{f}_0 + i \cdot \Delta f \quad (19)$$

式(19)是能量重心法频率校正原理。通过分析可知,对于某个频谱函数,能量重心校正法的适用有两个必要条件:

- (1) 该谱函数在真实谐波频率处形成谱峰,且谱函数关于该谱峰轴对称;
- (2) 离散谱函数的变换域总能量保持守恒,即满足

Parseval 定理。

另外需要注意的是,上述方法只适用于单频率成分或间隔比较远的多频率成分的离散谱校正。

2.2 基于 RAT 和 FRFT 的能量重心谱校正的理论基础

上文给出了基于 RAT 和 FRFT 的理想无限长 LFM 信号参数估计原理。然而,在实际应用中只能得到信号的有限长离散样本,由于时域截断以及栅栏效应的作用,将会导致谱峰搜索算法存在较大误差。本文拟采用能量重心法对观测信号的离散 RAT 和 FRFT 谱进行校正,进一步提高参数估计的精度。由于能量重心法目前只应用于 Fourier 域谱分析,因此本节将对矩形窗截断的 LFM 序列的 RAT 和 FRFT 谱结构进行分析,进而对能量重心校正法的适用条件进行证明。

考虑某一 LFM 信号 $s(t)$,对该信号加窗截断

$$x(t) = w(t)s(t) \quad (20)$$

式中, $w(t)$ 为长度为 T 的矩形窗,即

$$w(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (21)$$

为了便于分析,令矩形窗的中心位于坐标原点,并对信号做能量归一化,即

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp \{ j\pi(2f_0 t + \mu_0 t^2) \}, -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (22)$$

按照定义式对 $x(t)$ 进行模糊函数变换并取模

$$|AF_x(\tau, \xi)| = \left| \frac{\sin [\pi(T - |\tau|)(\xi - \mu_0 \tau)]}{\pi T(\xi - \mu_0 \tau)} \right| \quad (23)$$

$$-T \leq \tau \leq T$$

对式(23)作直线 $\xi = k\tau$ 上的 Radon 变换,即

$$\eta(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |AF_x(\tau, \xi)| \delta(\xi - k\tau) d\xi d\tau = \int_{-T}^T \left| \frac{\sin [\pi(T - |\tau|)(k - \mu_0)\tau]}{\pi T(k - \mu_0)\tau} \right| d\tau \quad (24)$$

显然当 $k = \mu_0$ 时, $\eta(k)$ 取得最大值。下面对矩形窗截断的 LFM 信号 RAT 谱函数对称性进行证明。

结论 1 矩形窗截断的有限长 LFM 信号的 RAT 谱函数关于其谱峰轴 $k = \mu_0$ 对称。

证明 为了证明上述结论,考察式(24)所示谱函数的移位函数 $g(\epsilon) = \eta(k + \epsilon)$, 则

$$g(\epsilon) = \int_{-T}^T \left| \frac{\sin [\pi(T - |\tau|)(k + \epsilon - \mu_0)\tau]}{\pi T(k + \epsilon - \mu_0)\tau} \right| d\tau \quad (25)$$

将谱峰位置 $k = \mu_0$ 代入式(25)并化简,得

$$g(\epsilon) = \int_{-T}^T \left| \frac{\sin [\pi(T - |\tau|)\epsilon\tau]}{\pi T\epsilon\tau} \right| d\tau \quad (26)$$

对于式(26)有

$$g(\epsilon) = g(-\epsilon) \quad (27)$$

即当 $k = \mu_0$ 时, $g(\epsilon)$ 是 ϵ 的偶函数,则可说明 $\eta(k)$ 关于 $k = \mu_0$ 轴对称。

证毕

为了进一步估计 LFM 信号的中心频率参数,对式(22)

进行能量聚集域 FRFT, 相应的变换角度由式(12)确定, 得

$$X_{\alpha_0}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K_{\alpha_0}(t, u) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{\sqrt{T}} \exp \{j\pi(2f_0 t + \mu_0 t^2)\} \sqrt{1 - j\cot \alpha_0} \cdot \exp \{j\pi[t^2 \cot \alpha_0 - 2tu \csc \alpha_0 + u^2 \cot \alpha_0]\} dt = \sqrt{\frac{1 - j\cot \alpha_0}{T}} \exp \{j\pi u^2 \cot \alpha_0\} \frac{\sin [\pi(f_0 - u \csc \alpha_0) T]}{\pi(f_0 - u \csc \alpha_0)} \quad (28)$$

对式(28)取模, 即

$$|X_{\alpha_0}(u)| = \sqrt{\frac{1 - j\cot \alpha_0}{T}} \exp \{j\pi u^2 \cot \alpha_0\} \frac{\sin [\pi(f_0 - u \csc \alpha_0) T]}{\pi(f_0 - u \csc \alpha_0)} \left| = \sqrt{\frac{1 + (\cot \alpha_0)^2}{T^2}} T |\operatorname{sinc} [(f_0 - u \csc \alpha_0) T]| \quad (29)$$

式(29)说明, 矩形窗截断的 LFM 信号的能量聚集域 FRFT 模谱函数是一个辛克(sinc)函数。显然, $|X_{\alpha_0}(u)|$ 的峰值点出现在 $u = f_0 / \csc \alpha_0$ 处, 和式(13)所示的中心频率估计公式相符。第一过零点位置为

$$u = u_0 \pm \frac{\sin \alpha_0}{T} \quad (30)$$

根据 sinc 函数的相关性质, 无需证明直接给出下面的结论。

结论 2 矩形窗截断的有限长 LFM 信号的能量聚集域 FRFT 模谱在 $u = f_0 / \csc \alpha_0$ 处出现谱峰, 且谱函数关于该谱峰轴对称。

此外, 由于模糊函数以及分数阶 Fourier 变换分别满足模糊区能量守恒和 Parseval 关系^[11], 即保持变换域能量守恒, 该性质与上述两个结论共同构成了基于 RAT 和 FRFT 的能量重心谱校正的理论基础。根据上述结论, 可以通过计算两个离散谱的能量重心位置来恢复真实的谱峰位置, 实现谱峰位置的超分辨率估计。

2.3 算法的实现步骤

将本文算法的主要步骤归纳如下:

步骤 1 对观测信号 $x(t)$ 作过原点的连续变化斜率的直线 $\xi = k\tau$ 上的 RAT, 得到关于 k 的离散谱 $\eta(k)$ 。对 $\eta(k)$ 进行谱峰扫描, 得到谱峰位置的粗略估计 \hat{k}_0 ;

步骤 2 在 $\eta(k)$ 的峰值谱线 $k = \hat{k}_0$ 两边分别取能量较大的 m 条谱线, 进行能量重心法谱校正, 得到谱峰位置的校正估计 k'_0 , 即

$$k'_0 = \frac{\sum_{i=-m}^m \{[\eta(\hat{k}_i)]^2 \times \hat{k}_i\}}{\sum_{i=-m}^m \{[\eta(\hat{k}_i)]^2\}}, \quad \hat{k}_i = \hat{k}_0 + i \cdot \Delta k \quad (31)$$

进而估计出输入信号的调频率, 即

$$\hat{\mu}_0 = k'_0 \quad (32)$$

步骤 3 根据所得的调频率估计值 $\hat{\mu}_0$, 按照式(12)计算出该信号的能量聚集域 FRFT 变换角度 α_0 , 对原信号做该角度上的 FRFT, 得到分数阶 Fourier 域离散谱 $|X_{\alpha_0}(u)|$ 。对 $|X_{\alpha_0}(u)|$ 进行谱峰扫描, 得到谱峰位置的粗略估计 \hat{u}_0 ;

步骤 4 在 $|X_{\alpha_0}(u)|$ 的峰值谱线 $u = \hat{u}_0$ 两边分别取能量较大的 n 条谱线, 进行能量重心法谱校正, 得到谱峰位置的校正估计 u'_0 , 即

$$u'_0 = \frac{\sum_{i=-n}^n [|X_{\alpha_0}(\hat{u}_i)|^2 \times \hat{u}_i]}{\sum_{i=-n}^n |X_{\alpha_0}(\hat{u}_i)|^2}, \quad \hat{u}_i = \hat{u}_0 + i \cdot \Delta u \quad (33)$$

进而估计出信号的中心频率, 即

$$\hat{f}_0 = u'_0 / \csc \alpha_0 \quad (34)$$

步骤 5 对于多分量 LFM 信号, 则不断从观测样本中减去已估计出的信号分量, 得到新的样本

$$x(t) = x(t) - \hat{a}_0 \exp \{j\pi(2\hat{f}_0 t + \hat{\mu}_0 t^2)\} \quad (35)$$

式中, \hat{a}_0 为该 LFM 信号分量的幅度估计, 即

$$\hat{a}_0 = \frac{|X_{\alpha_0}(u'_0)|}{T |\sqrt{1 - j\cot \alpha_0}|} \quad (36)$$

式中, T 为信号的观测窗长度。对新的信号 $x(t)$ 重复上述步骤, 直到估计出所有信号分量的参数。

2.4 高斯白噪声对算法校正精度影响的理论分析

实际应用中的观测信号通常伴随有噪声, 噪声干扰会影响算法的估计精度。和传统的频谱校正不同, 本文方法中的两个离散谱是在分数阶 Fourier 域中计算得到的 (FT 可视为变换角度 $\alpha = \pi/2$ 的 FRFT), 所以首先需要对噪声背景下信号的分数阶 Fourier 域谱的特征分布进行分析, 进而推导出噪声对本文方法校正精度的影响。

考虑附加噪声的有限长 LFM 信号

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad -T/2 \leq t \leq T/2 \quad (37)$$

式中, $s(t)$ 见式(22); $n(t)$ 为零均值复高斯白噪声, 且噪声方差为 σ_n^2 。根据 FRFT 的可加性, 该信号的旋转角度为 α 的 FRFT 表示为

$$X_x(u) = S_x(u) + N_x(u) \quad (38)$$

根据白噪声的统计特性可知, $X_x(u)$ 也是一个复高斯型随机变量, 其均值为

$$E[X_x(u)] = S_x(u) + E\left[\int_{-T/2}^{T/2} n(t) K_\alpha(t, u) dt\right] = S_x(u) \quad (39)$$

$X_x(u)$ 的方差为

$$D[X_x(u)] = E\{|X_x(u) - E[X_x(u)]|^2\} = E\left[\int_{-T/2}^{T/2} n(t_1) K_\alpha(t_1, u) dt_1 \int_{-T/2}^{T/2} n^*(t_2) K_\alpha^*(t_2, u) dt_2\right] = \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} K_\alpha(t_1, u) K_{-\alpha}^*(t_2, u) R_n(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \quad (40)$$

式中

$$R_n(\tau) = E[n(t)n^*(t - \tau)] \quad (41)$$

为噪声的时域自相关函数, 根据 $n(t)$ 的统计特性, 有

$$R_n(t_1 - t_2) = \sigma_n^2 \delta(t_1 - t_2) \quad (42)$$

此时

$$D[X_x(u)] = \sigma_n^2 \int_{-T/2}^{T/2} K_\alpha(t, u) K_{-\alpha}^*(t, u) dt = \sigma_n^2 |\csc \alpha| T \quad (43)$$

上述结果显示, $X_a(u)$ 是 $S_a(u)$ 的无偏估计, 且估计方差与噪声方差以及 FRFT 变换角度有关。另外, 观测信号的分数阶 Fourier 域功率谱为

$$|X_a(u)|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} [s(t_1) + n(t_1)][s^*(t_2) + n^*(t_2)] \times K_a(t_1, u) K_a^*(t_2, u) dt_1 dt_2 \quad (44)$$

确定其均值为

$$E[|X_a(u)|^2] = |S_a(u)|^2 + \sigma_n^2 |\csc \alpha| T \quad (45)$$

另外确定

$$E[|X_a(u)|^4] = |S_a(u)|^4 + 4 |S_a(u)|^2 \sigma_n^2 |\csc \alpha| T + 2\sigma_n^4 (\csc \alpha)^2 T^2 \quad (46)$$

根据式(45)和式(46)可得噪声背景下信号的分数阶 Fourier 域功率谱的方差为

$$D[|X_a(u)|^2] = 2 |S_a(u)|^2 \sigma_n^2 |\csc \alpha| T + \sigma_n^4 (\csc \alpha)^2 T^2 \quad (47)$$

由于 FRFT 对 LFM 信号具有能量聚集特性, 在谱峰附近近似有

$$|X_a(u)|^2 \sim N(|S_a(u)|^2, 2 |S_a(u)|^2 \sigma_n^2 |\csc \alpha| T) \quad (48)$$

以上结果表明, 在含有噪声的 LFM 信号的分数阶 Fourier 谱分析中, 可以认为观测信号功率谱是原始信号功率谱的无偏估计。根据上述结论, 结合文献[12]的相关分析, 可知本文提出的校正方法为无偏校正, 且校正误差的方差取决于噪声的方差以及 FRFT 的变换角度。

3 仿真实例

3.1 单分量情况

构造一个单分量 LFM 信号, 参数选取: $a_0 = 1$ 、 $f_0 = 10.725$ Hz、 $\mu_0 = 1.858$ Hz/s。信号的观测窗长 $T = 5$ s, 采样点数 $N = 501$, 干扰噪声为 10 dB 的高斯白噪声。图 2 为该信号的模糊函数, 图 3 为该信号的 RAT 谱以及能量聚集域 FRFT 谱。为了描述方便, 图 4 中的横轴以归一化的分数阶 Fourier 域数字频率作为量纲, 即有

$$\omega = 2\pi u \Delta t / s \quad (49)$$

式中, Δt 为信号的采样间隔; $s = \sqrt{T/f_s}$ 为量纲归一化因子。

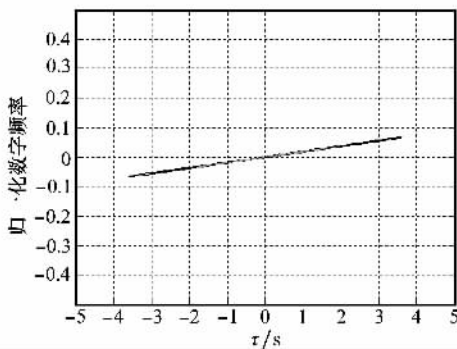


图 2 单分量 LFM 信号的模糊函数

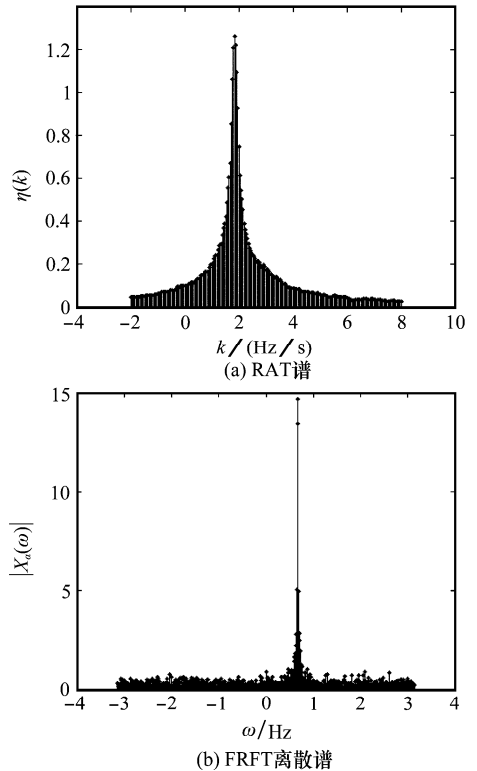


图 3 观测信号的 RAT 和 FRFT 离散谱

对信号的两个离散谱分别进行谱峰扫描, 以谱峰扫描的结果作为初始值, 采用本文方法对两个谱峰位置进行校正估计, 并按照式(32)和式(34)估计信号参数。重复进行 100 次 Monte Carlo 仿真, 对比校正前后的参数估计精度, 仿真结果如表 1 所示。

表 1 单信号分量情况的仿真结果

算法	参数估计		绝对误差/扫描步长	
	调频率/ (Hz/s)	中心频率/ Hz	$\frac{ \hat{k}_0 - k_0 }{\Delta k}$	$\frac{ \hat{u}_0 - u_0 }{\Delta u}$
真实值	1.858 00	10.725 00	—	—
校正前	1.840 00	10.645 67	45.00%	39.49%
校正后	1.858 62	10.734 92	1.55%	4.94%

在信号参数以及观测窗长不变的情况下, 改变噪声的强度, 分别采用能量重心法和插值校正法^[13]对两个离散谱进行校正, 并根据校正结果进行参数估计。图 4 给出了两种校正方法的参数估计均方误差(mean square error, MSE)随信噪比的变化曲线。所有仿真结果均为 100 次独立实验的平均。

上述实验结果显示, 本文方法对信号的 RAT 和 FRFT 谱峰位置的校正误差分别达到了扫描步长的 1.55% 和 4.94%, 比直接扫描方法降低了近一个数量级。此外, 随着信噪比的增大, 本文方法的估计误差呈不断下降的趋势, 和插值校正法的估计效果相比, 本文方法具有更加良好的抗噪声性能。

通过仿真结果还可以看到, 本文方法对 LFM 信号中心频率的估计精度低于调频率的精度, 其中的主要原因是: 该方法首先对信号调频率进行估计, 然后利用估计结果计算 FRFT 变换角度, 进而估计出中心频率, 这就导致了误差的累积和放大。这也是本文方法的一个主要缺点。

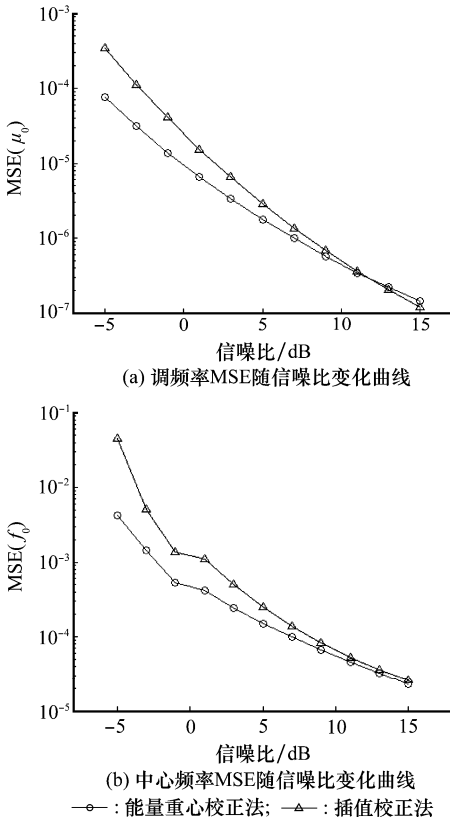


图 4 单分量参数估计的均方误差随信噪比的变化曲线

3.2 多分量情况

构造一个由两个等幅 LFM 信号组成的复合信号, 参数选取: $f_0 = 6.352 \text{ Hz}$ 、 $f_1 = 12.885 \text{ Hz}$ 、 $\mu_0 = 2.145 \text{ Hz/s}$ 、 $\mu_1 = 1.293 \text{ Hz/s}$ 。信号的观测窗长度、采样点数以及噪声强度的设置均和单分量实验相同。按照前文所述步骤对该复合

信号的参数进行估计, 重复进行 100 次 Monte Carlo 仿真, 统计结果如表 2 所示。

为了考察两个信号分量之间的相互干扰对参数估计精度的影响, 在信噪比等条件不变的情况下, 改变两个 LFM 信号的参数, 重复进行实验, 得到 MSE 随两信号相关系数变化的曲线, 如图 5 所示。所有仿真结果均为 100 次独立实验的平均。

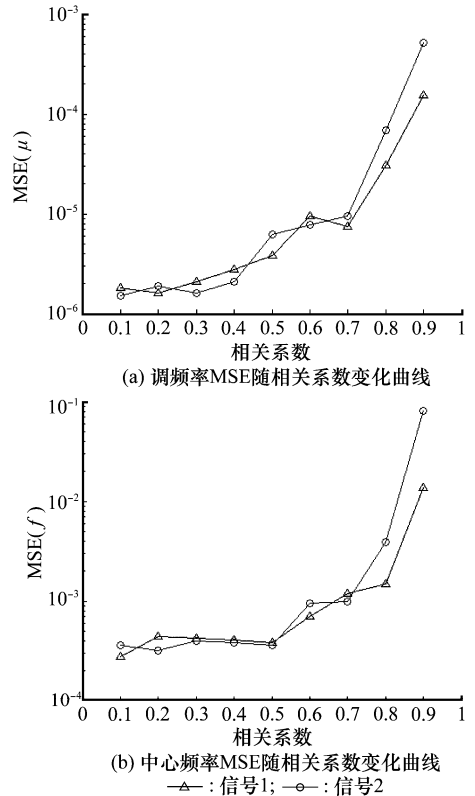


图 5 多分量参数估计的均方误差随相关系数的变化曲线

表 2 多信号分量情况的仿真结果

算法	参数估计				绝对误差/扫描步长			
	调频率/(Hz/s)		中心频率/Hz		$\frac{ \hat{k}_0 - k_0 }{\Delta k}$	$\frac{ \hat{k}_1 - k_1 }{\Delta k}$	$\frac{ \hat{u}_0 - u_0 }{\Delta u}$	$\frac{ \hat{u}_1 - u_1 }{\Delta u}$
	μ_0	μ_1	f_0	f_1				
真实值	2.145 00	1.293 00	6.352 00	12.885 00	—	—	—	—
校正前	2.160 00	1.280 00	6.436 62	12.826 79	37.50%	32.50%	42.09%	29.01%
校正后	2.142 55	1.294 72	6.330 24	12.901 57	6.13%	4.30%	10.82%	8.27%

通过表 2 可以看出, 对于两个 LFM 分量, 由于分量之间的交叉干扰, 使得本文方法的估计精度略有下降, 但仍然优于直接扫描的方法。图 5 表明, 当分量间相关性较小时, 利用本文方法可获得良好的估计精度。随着相关系数的增大, 估计误差也逐步增大, 特别是当 ρ 接近于 1 时, 估计性能加速恶化。这是因为, 随着信号间相关性的增大, 信号在时频面上的分布也逐步密集, 导致谱线间的串扰增大, 从而影响了谱峰位置的校正精度。

4 结 论

本文针对噪声环境中 LFM 信号参数的精确估计问题, 将离散谱线的能量重心校正法分别引入模糊域和分数阶

Fourier 域, 实现了谱峰位置的超分辨率估计, 在不增加运算量的基础上提高了参数估计的精度。由于传统的离散谱校正方法仅应用于 Fourier 域谱分析, 所以本文对矩形窗截断的 LFM 信号的 RAT 和 FRFT 谱线结构进行了分析, 证明了能量重心法在本文环境中的适用性, 然后对高斯白噪声环境下该方法的校正精度进行了理论分析。文章的最后通过多组仿真实验验证了该方法的有效性。

需要指出的是, 如何将本文方法应用于相干信源、有色噪声等更加复杂的环境中, 并进一步提高估计精度等, 都是需要进一步研究的课题。