2012,**32A**(5):892–903

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

http://actams.wipm.ac.cn

多线性 Marcinkiewicz 积分交换子的加权端点估计 *

[1] 张璞 [1] 武江龙 [2] 刘庆国

([1] 牡丹江师范学院数学系 黑龙江牡丹江 157011;

[2]Laboratory for Multiphase Processes, University of Nova Gorica, Nova Gorica 5000, Slovenia)

摘要: $\mu_{\Omega,\vec{b}}$ 是由 n 维 Marcinkiewicz 积分 μ_Ω 和 $b_j\in \mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$ $(1\le j\le m)$ 生成的多线性交换子, 当 Ω 满足一类 Dini 型条件时, 建立了 $\mu_{\Omega,\vec{b}}$ 的加权弱 $L(\log L)^m$ - 型估计.

关键词: Marcinkiewicz 积分; 多线性交换子; BMO($\mathbf{R}^n$); A_p 权.

MR(2000) 主题分类: 42B20; 42B25 **中图分类号**: O174.2 **文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2012)05-892-12

1 引言和结果

用 S^{n-1} 表示 $\mathbf{R}^n$ $(n\ge 2)$ 中的单位球面, 设 $\Omega(x)\in L^1(S^{n-1})$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的零次齐次函数且满足

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(x')\mathrm{d}x'=0, \tag{1.1}$$

其中 $x'=x/|x|$ $(x\ne 0)$.

1958 年, Stein[1] 引入了 n 维 Marcinkiewicz 积分的定义

$$\mu_\Omega(f)(x)=\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}f(y)\mathrm{d}y\bigg|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg)^{\frac12},\quad x\in\mathbf{R}^n.$$

$\mathbf{R}^n$ 上的非负局部可积函数称为权函数. 用 A_p $(1\le p\le\infty)$ 表示 Muckenhoupt 权函数类 (见文献 [2–3]). 对权函数 ω, 记

$$\|f\|_{L^p_\omega(\mathbf{R}^n)}=\bigg(\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\omega(x)\mathrm{d}x\bigg)^{1/p},\ \ \omega(E)=\int_E\omega(x)\mathrm{d}x.$$

设 $m\in\mathbf{Z}^+, b\in\mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$, 定义 Marcinkiewicz 积分交换子为

$$\mu^m_{\Omega,b}(f)(x)=\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{|x-y|\le t}\frac{(b(x)-b(y))^m\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}f(y)\mathrm{d}y\bigg|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg)^{\frac12}.$$

收稿日期: 2010-10-08; 修订日期: 2012-04-06

E-mail: puzhang@sohu.com

* 基金项目: 黑龙江省自然科学基金 (A200913) 资助

定义多线性 Marcinkiewicz 积分交换子 $\mu_{\Omega,\vec{b}}$ 为

$$\mu_{\Omega,\vec{b}}(f)(x)=\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x-y)f(y)}{|x-y|^{n-1}}\prod_{j=1}^m\Big(b_j(x)-b_j(y)\Big)\mathrm{d}y\bigg|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg)^{\frac12}.$$

显然，当 $b_1=\cdots=b_m=b$ 时有 $\mu_{\Omega,\vec{b}}=\mu^m_{\Omega,b}$.

2004 年，Ding, Lu 和 Zhang[4] 研究了当 $\Omega\in\mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})\,(0<\alpha\le1)$ 时 Marcinkiewicz 积分交换子 $\mu^m_{\Omega,b}$ 的加权弱 $L\log L$ - 型估计. 最近，Zhang[5] 考虑了当 Ω 满足一类 Dini 型条件时 $\mu^m_{\Omega,b}$ 的加权弱 $L(\log L)^m$ - 型估计. 2008 年，Zhang[6] 在 $\omega\in A_1$ 和 $\Omega\in\mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})\,(0<\alpha\le1)$ 时，证明了 $\mu_{\Omega,\vec{b}}$ 的加权弱 $L(\log L)^{1/r}$ - 型估计.

本文将利用 Calderón-Zygmund 分解理论，在 Ω 满足一类 Dini 型条件时，建立多线性交换子 $\mu_{\Omega,\vec{b}}$ 的加权弱 $L(\log L)^m$ - 型估计.

以下总假定 Ω 是零次齐次函数. 设 $\Omega\in L^r(S^{n-1})$ $(r\ge1)$, 定义 Ω 的 r 阶积分连续模为

$$\omega_r(\delta)=\sup_{|\rho|<\delta}\bigg(\int_{S^{n-1}}|\Omega(\rho x')-\Omega(x')|^r\mathrm{d}x'\bigg)^{1/r},$$

其中 ρ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的旋转，且 $|\rho|=\sup\limits_{x'\in S^{n-1}}|\rho x'-x'|$.

若 $\int_0^1\omega_r(\delta)\delta^{-1}\mathrm{d}\delta<\infty$, 则称 $\Omega\in L^r(S^{n-1})(r\ge1)$ 满足 L^r-Dini 条件.

本文的主要结果如下.

定理 1.1 设 $b_j\in\mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)(1\le j\le m)$, $\Omega\in L^r(S^{n-1})(r>1)$ 且 $\omega^{r'}\in A_1$. 若 Ω 满足 (1.1) 式和

$$\int_0^1\frac{\omega_r(\delta)}{\delta}\Big(\log\frac1\delta\Big)^m\mathrm{d}\delta<\infty,\tag{1.2}$$

则对所有的 $\lambda>0$, 存在不依赖于 f 和 λ 的常数 $C>0$, 使得

$$\omega(\{x\in\mathbf{R}^n:\mu_{\Omega,\vec{b}}(f)(x)>\lambda\})\le C\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|f(y)|}{\lambda}\bigg(1+\log^+\frac{|f(y)|}{\lambda}\bigg)^m\omega(y)\mathrm{d}y.$$

注 显然，条件 (1.2) 比 L^r-Dini 条件稍强，但比 $\mathrm{Lip}_\alpha(0<\alpha\le1)$ 弱. 另外，注意到 $\mathrm{Osc}_{\exp L^1}=\mathrm{BMO},\mathrm{Osc}_{\exp L^\tau}\subset\mathrm{BMO}$ $(\tau>1)$, 且当 $b_j=b(j=1,2,\cdots,m)$ 时 $\mu_{\Omega,\vec{b}}=\mu^m_{\Omega,b}$, 从而不难看出，定理 1.1 改进了文献 [5–6] 的相关结果.

在下文中，我们总是用 C 表示不依赖于主要参量的常数，出现在不同地方其大小可能不同. 用 $A\sim B$ 表示存在常数 $C>0$ 使得 $C^{-1}B\le A\le CB$. 对任意的 $p\in[1,\infty]$, 用 p' 表示 p 的共轭指标，即 $1/p+1/p'=1$.

2 预备知识和引理

本节主要给出一些预备知识和引理.

引理 2.1 [7] 设 $0<\alpha<n,r>1$ 且 Ω 满足 L^r-Dini 条件. 若存在常数 $C_0\in(0,1/2)$, 使得 $|y|<C_0K$, 则有

$$\begin{aligned}&\bigg(\int_{K<|x|<2K}\bigg|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x)}{|x|^{n-\alpha}}\bigg|^r\mathrm{d}x\bigg)^{1/r}\\&\le CK^{n/r-n+\alpha}\bigg(\frac{|y|}{K}+\int_{|y|/(2K)<\delta<|y|/K}\frac{\omega_r(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta\bigg).\end{aligned}$$

引理 2.2 [8] 设 $r>1$, $\Omega\in L^r(S^{n-1})$ 且 $\omega^{r'}\in A_1$. 则对任意的 $\lambda>0$, 存在不依赖于 f 和 λ 的常数 $C>0$, 使得

$$\omega(\{x\in\mathbf{R}^n:\mu_\Omega(f)(x)>\lambda\})\leq C\lambda^{-1}\|f\|_{L^1_\omega(\mathbf{R}^n)}.$$

引理 2.3 [9] 设 $b_j\in\mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$ $(1\leq j\leq m)$, $\Omega\in L^r(S^{n-1})$ $(r>1)$ 且满足 (1.1) 式和 (1.2) 式. 若 $\omega\in A_{p/r'}$, $r'<p<\infty$, 则存在不依赖于 f 的常数 $C>0$, 使得

$$\|\mu_{\Omega,\vec{b}}(f)\|_{L^p_\omega(\mathbf{R}^n)}\leq C\|\vec{b}\|_*\|f\|_{L^p_\omega(\mathbf{R}^n)}.$$

另外，我们还需要 Orlicz 空间的若干性质，有关 Orlicz 空间的详细内容见文献 [10].

函数 $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 称为 Young 函数，如果 φ 是连续的，严格递增的凸函数且满足 $\varphi(0)=0$ 和 $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$.

借助 Luxemburg 范数，定义函数 f 在方体 Q 上的 $\varphi-$ 平均如下

$$\|f\|_{\varphi,Q}=\inf\left\{\lambda>0:\frac{1}{|Q|}\int_Q\varphi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)\mathrm{d}y\leq 1\right\}.$$

下面的不等式成立 (见文献 [10, p69] 或文献 [11, 公式 (7)])

$$\|f\|_{\varphi,Q}\leq\inf\left\{\eta+\frac{\eta}{|Q|}\int_Q\varphi\left(\frac{|f(y)|}{\eta}\right)\mathrm{d}y\right\}\leq 2\|f\|_{\varphi,Q}. \tag{2.1}$$

本文将要使用的 Young 函数是 $\Phi_\alpha(t)=t(1+\log^+t)^\alpha(\alpha>0)$, 其 Young 补函数为 $\tilde{\Phi}_\alpha(t)\approx\exp(t^{1/\alpha})$. 记 $\|f\|_{L(\log L)^\alpha,Q}=\|f\|_{\Phi_\alpha,Q}$ 及 $\|f\|_{\exp L^{1/\alpha},Q}=\|f\|_{\tilde{\Phi}_\alpha,Q}$. 当 $\alpha=1$ 时，简记为 $\Phi(t)=t(1+\log^+t)$, $\tilde{\Phi}(t)\approx\mathrm{e}^t$ 以及 $\|f\|_{L\log L,Q}=\|f\|_{\Phi,Q}$ 和 $\|f\|_{\exp L,Q}=\|f\|_{\tilde{\Phi},Q}$.

设 Q 是 $\mathbf{R}^n$ 中的方体，则如下的广义 Hölder 不等式成立 (见文献 [12] 或 [13])

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_1(y)\cdots f_m(y)g(y)|\mathrm{d}y\leq C\|g\|_{L(\log L)^{1/r},Q}\prod_{j=1}^m\|f_j\|_{\exp L^{r_j},Q}. \tag{2.2}$$

其中 $r_1,\cdots,r_m\geq 1$ 且 $1/r=1/r_1+\cdots+1/r_m$.

对于局部可积函数 f 和方体 Q, 记 $(f)_Q=f_Q=|Q|^{-1}\int_Q f(y)\mathrm{d}y$. 设 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$, 对任意的方体 Q 和整数 $k\geq 0$, 有 (见文献 [2, p141])

$$|b_{2^{k+1}Q}-b_Q|\leq C(k+1)\|b\|_*, \tag{2.3}$$

其中 $tQ(t>0)$ 表示 Q 的 t 倍同心扩张， $\|b\|_*$ 表示 b 的 BMO 模.

利用 John-Nirenberg 不等式可得 (见文献 [14, p169])

$$\|b-b_Q\|_{\exp L,Q}\leq C\|b\|_*. \tag{2.4}$$

令 $M_{L(\log L)^\alpha}(f)(x)=\sup\limits_{Q\ni x}\|f\|_{L(\log L)^\alpha,Q}$. 用 M^k 表示 Hardy-Littlewood 极大函数 M 的 k 次复合，则 $M_{L(\log L)^k}\approx M^{k+1}$ $(k=0,1,2,\cdots)$. 在定理 1.1 的证明中还需要下述估计.

引理 2.4 [5] 设 $1\leq p<\infty$, $\omega^p\in A_1$, $b\in\mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$ 且 Q 是方体. 则对任意的 $y\in Q$ 和任意的正数 s, 有

$$\left(\frac{1}{|2^kQ|}\int_{2^kQ}|b(x)-b_Q|^{sp}\omega^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leq C\|b\|_*^s(k+1)^s\inf_{y\in Q}\omega(y),\ k=0,1,2,\cdots.$$

当 s 是正整数时，引理 2.4 在文献 [5] 已证明. 同样可以证明引理 2.4 当 s 是正数时也成立.

引理 2.5 设 $1 \le p < \infty$, $\omega^p \in A_1$, $b \in \mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$ 且 Q 是方体. 则对任意的 $y \in Q$ 和任意的正整数 m, 有

$$\left(\frac{1}{|2^kQ|}\int_{2^kQ}\omega^p(x)\prod_{j=1}^m\left|b_j(x)-(b_j)_Q\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le C\|\vec{b}\|_*(k+1)^m\inf_{y\in Q}\omega(y),\ k=0,1,2,\cdots.$$

证 设 $\gamma_j \ge 1 (j=1,2,\cdots,m)$ 且 $1=\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\cdots+\frac{1}{\gamma_m}$. 由 Hölder 不等式和引理 2.4 可得

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|2^kQ|}\int_{2^kQ}\omega^p(x)\prod_{j=1}^m\left|b_j(x)-(b_j)_Q\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&\le \prod_{j=1}^m\left(\frac{1}{|2^kQ|}\int_{2^kQ}\omega^p(x)\left|b_j(x)-(b_j)_Q\right|^{p\gamma_j}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p\gamma_j}}\\
&\le C\prod_{j=1}^m\left(\|b_j\|_*^{\gamma_j}(k+1)^{\gamma_j}\inf_{y\in Q}\omega(y)\right)^{\frac{1}{\gamma_j}}\\
&\le C\|\vec{b}\|_*(k+1)^m\inf_{y\in Q}\omega(y).
\end{aligned}$$

从而引理 2.5 得证. ▌

为证主要结果，我们还需下述概念. 对于 $\omega \in A_\infty$ 和方体 Q, 分别记

$$\|f\|_{L(\log L)^m,Q,\omega}=\inf\left\{\lambda>0:\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q\Phi_m\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)\omega(y)\mathrm{d}y\le 1\right\},$$

$$\|f\|_{\exp L^{1/m},Q,\omega}=\inf\left\{\lambda>0:\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q\tilde{\Phi}_m\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)\omega(y)\mathrm{d}y\le 1\right\}.$$

类似于 (2.1) 式有 (见文献 [10, p69])

$$\|f\|_{L(\log L)^m,Q,\omega}\sim\inf\left\{\eta+\frac{\eta}{\omega(Q)}\int_Q\Phi_m\left(\frac{|f(y)|}{\eta}\right)\omega(y)\mathrm{d}y\right\}. \tag{2.5}$$

类似于 (2.2) 式，对 $r_1,\cdots,r_m\ge 1$ 和 $1/r=1/r_1+\cdots+1/r_m$, 有如下的广义 Hölder 不等式成立

$$\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q|f_1(y)\cdots f_m(y)g(y)|\omega(y)\mathrm{d}y\le C\|g\|_{L(\log L)^{1/r},Q,\omega}\prod_{j=1}^m\|f_j\|_{\exp L^{r_j},Q,\omega}. \tag{2.6}$$

另外，对任意的 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$, 任意的方体 Q 和任意的权函数 $\omega\in A_\infty$, 有

$$\|b-b_Q\|_{\exp L,Q,\omega}\le C\|b\|_*. \tag{2.7}$$

事实上，由 John-Nirenberg 不等式，存在正常数 C_1 和 C_2, 使得

$$|\{x\in Q:|b(x)-b_Q|>t\}|\le C_1|Q|\mathrm{e}^{-C_2t/\|b\|_*}.$$

注意到 $\omega\in A_\infty$, 由文献 [15, 定理 5] 的证明可知，存在 $\delta>0$, 使得

$$\omega(\{x\in Q:|b(x)-b_Q|>t\})\le C_1\omega(Q)\mathrm{e}^{-C_2\delta t/\|b\|_*}.$$

又类似于文献 [3, p528, 推论 7.1.7] 的证明，有

$$\frac{1}{\omega(Q)}\int_Q \exp\left(\frac{|b(x)-b_Q|}{C_3\|b\|_*}\right)\omega(x)\mathrm{d}x \le C. \tag{2.8}$$

(2.8) 式蕴含着 (2.7) 式.

为证明定理 1.1, 还需要下面的记号. 类似于文献 [12], 对任意的正整数 m 和 $j\in[1,m]$, 用 $\mathcal{C}_j^m$ 表示 $\{1,2,\cdots,m\}$ 中所有具有 j 个不同元素的有限集 $\sigma=\{\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(j)\}$ 构成的集族. 对任意的 $\sigma\in\mathcal{C}_j^m$, 把 σ 的余集记为 $\sigma'=\{1,2,\cdots,m\}\setminus\sigma$.

设 $\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$. 对任意的 $1\le j\le m$ 和 $\sigma=\{\sigma(1),\sigma(1),\cdots,\sigma(j)\}\in\mathcal{C}_j^m$, 记

$$\vec{b}_\sigma=(b_{\sigma(1)},b_{\sigma(2)},\cdots,b_{\sigma(j)}),\quad b_\sigma=b_{\sigma(1)}b_{\sigma(2)}\cdots b_{\sigma(j)}.$$

并记

$$\big(b(x)-b(y)\big)_\sigma=\big(b_{\sigma(1)}(x)-b_{\sigma(1)}(y)\big)\cdots\big(b_{\sigma(j)}(x)-b_{\sigma(j)}(y)\big)$$

和

$$\big(b_Q-b(y)\big)_\sigma=\big((b_{\sigma(1)})_Q-b_{\sigma(1)}(y)\big)\cdots\big((b_{\sigma(j)})_Q-b_{\sigma(j)}(y)\big).$$

另外，对 $b_j\in\mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)\ (1\le j\le m)$, 记

$$\|\vec{b}_\sigma\|_*=\|b_{\sigma(1)}\|_*\|b_{\sigma(2)}\|_*\cdots\|b_{\sigma(j)}\|_*,\qquad \|\vec{b}\|_*=\|b_1\|_*\|b_2\|_*\cdots\|b_m\|_*.$$

3 定理 1.1 的证明

定理 1.1 的证明 对于给定的 $\lambda>0$, 使用 Calderón-Zygmund 分解，可得到一系列互不相交的二进方体 $\{Q_i\}$, 其中 Q_i 是各边平行于坐标轴，以 x_i 为中心，以 $l(Q_i)$ 为边长的方体，使得 $|f(x)|\le C\lambda$, a.e. $x\in\mathbf{R}^n\setminus\cup_iQ_i$ 且

$$\lambda<\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i}|f(y)|\mathrm{d}y\le 2^n\lambda,\qquad i=1,2,\cdots. \tag{3.1}$$

把函数 f 分解为 $f=g+h$, 其中

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\mathbf{R}^n\setminus\cup_iQ_i,\\ f_{Q_i}, & x\in Q_i, i=1,2,\cdots.\end{cases}$$

则 $h(x)=f(x)-g(x)=\sum_i h_i(x)$, 其中 $h_i(x)=(f(x)-f_{Q_i})\chi_{Q_i}(x)$. 显然， $\mathrm{supp}h_i\subset Q_i$, $\int_{Q_i}h_i(y)\mathrm{d}y=0$ 且

$$|g(x)|\le 2^n\lambda,\qquad \text{a.e. } x\in\mathbf{R}^n. \tag{3.2}$$

注意到，当 $\omega^{r'}\in A_1$ 时，有 $\omega\in A_1$. 于是 $M(\omega)(x)\le C\omega(x)$, a.e. $x\in\mathbf{R}^n$. 由 (3.1) 式和

$$|Q_i|^{-1}\omega(Q_i)=|Q_i|^{-1}\int_{Q_i}\omega(x)\mathrm{d}x\le C\inf_{y\in Q_i}\omega(y),$$

可得

$$\omega(Q_i)\le C|Q_i|\inf_{y\in Q_i}\omega(y)\le C\lambda^{-1}\int_{Q_i}|f(y)|\mathrm{d}y\inf_{y\in Q_i}\omega(y)\le C\lambda^{-1}\int_{Q_i}|f(y)|\omega(y)\mathrm{d}y. \tag{3.3}$$

记 $E=\cup_i(2Q_i)$, 由 (3.3) 式可得

$$\omega(E)\le C\sum_i\int_{2Q_i}\omega(x)\mathrm{d}x=C\sum_i\omega(2Q_i)\le C\sum_i\omega(Q_i)\le C\lambda^{-1}\|f\|_{L^1_\omega(\mathbf{R}^n)}.$$

于是有

$$\begin{aligned}\omega(\{x\in\mathbf{R}^n:\mu_{\Omega,\vec{b}}(f)(x)>\lambda\})&\le\omega(\{x\in\mathbf{R}^n\setminus E:\mu_{\Omega,\vec{b}}(f)(x)>\lambda\})+\omega(E)\\&\le\omega(\{x\in\mathbf{R}^n\setminus E:\mu_{\Omega,\vec{b}}(g)(x)>\lambda/2\})\\&\quad+\omega(\{x\in\mathbf{R}^n\setminus E:\mu_{\Omega,\vec{b}}(h)(x)>\lambda/2\})+\omega(E)\\&\le I_1+I_2+C\lambda^{-1}\|f\|_{L^1_\omega(\mathbf{R}^n)}.\end{aligned}$$

下面先来考虑 I_1 . 对于 $\omega^{r'}\in A_1$ 有 $\omega\in A_1$. 注意到 $A_1\subset A_s$ $(s\ge1)$, 则对任意的 $p>r'$, 有 $\omega\in A_{p/r'}$. 于是，由引理 2.3, (3.2) 和 (3.3) 式可得

$$\begin{aligned}I_1&=\omega(\{x\in\mathbf{R}^n\setminus E:\mu_{\Omega,\vec{b}}(g)(x)>\lambda/2\})\le C\lambda^{-p}\int_{\mathbf{R}^n}\big[\mu_{\Omega,\vec{b}}(g)(x)\big]^p\omega(x)\mathrm{d}x\\&\le C\lambda^{-p}\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)|^p\omega(x)\mathrm{d}x\le C\lambda^{-1}\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)|\omega(x)\mathrm{d}x\\&\le C\lambda^{-1}\bigg\{\int_{\mathbf{R}^n\setminus\cup_iQ_i}|g(x)|\omega(x)\mathrm{d}x+\int_{\cup_iQ_i}|g(x)|\omega(x)\mathrm{d}x\bigg\}\\&\le C\lambda^{-1}\bigg\{\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|\omega(x)\mathrm{d}x+\sum_i\int_{Q_i}|f_{Q_i}|\omega(x)\mathrm{d}x\bigg\}\\&\le C\lambda^{-1}\|f\|_{L^1_\omega(\mathbf{R}^n)}+C\lambda^{-1}\sum_i\int_{Q_i}|f(y)|\mathrm{d}y\bigg(\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i}\omega(x)\mathrm{d}x\bigg)\\&\le C\lambda^{-1}\|f\|_{L^1_\omega(\mathbf{R}^n)}+C\lambda^{-1}\sum_i\int_{Q_i}|f(y)|\mathrm{d}y\inf_{y\in Q_i}\omega(y)\\&\le C\lambda^{-1}\|f\|_{L^1_\omega(\mathbf{R}^n)}+C\lambda^{-1}\sum_i\int_{Q_i}|f(y)|\omega(y)\mathrm{d}y\\&\le C\lambda^{-1}\|f\|_{L^1_\omega(\mathbf{R}^n)}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

(3.4) 式的证明过程蕴含着下式

$$\sum_i\int_{Q_i}|f_{Q_i}|\omega(x)\mathrm{d}x\le C\|f\|_{L^1_\omega(\mathbf{R}^n)}.\tag{3.5}$$

现在来估计 I_2. 注意到

$$\prod_{j=1}^m\big(b_j(x)-b_j(y)\big)=\sum_{j=0}^m\sum_{\sigma\in\mathcal{C}_j^m}\big(b(x)-b_{Q_i}\big)_\sigma\big(b_{Q_i}-b(y)\big)_{\sigma'},$$

则由 μ_Ω 和 $\mu_{\Omega,\vec{b}}$ 的定义，可得

$$\begin{aligned}&\mu_{\Omega,\vec{b}}(h)(x)\\&=\bigg(\int_0^\infty\bigg|\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x-y)h(y)}{|x-y|^{n-1}}\sum_{j=0}^m\sum_{\sigma\in\mathcal{C}_j^m}\big(b(x)-b_{Q_i}\big)_\sigma\big(b_{Q_i}-b(y)\big)_{\sigma'}\mathrm{d}y\bigg|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg)^{\frac12}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \bigg(\int_0^\infty \bigg|\int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)h(y)}{|x-y|^{n-1}} \prod_{j=1}^m \big(b_j(x)-(b_j)_{Q_i}\big)\mathrm{d}y\bigg|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg)^{\frac12}\\
&\quad +\bigg(\int_0^\infty \bigg|\int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)h(y)}{|x-y|^{n-1}} \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in\mathcal{C}_j^m} \big(b(x)-b_{Q_i}\big)_\sigma \big(b_{Q_i}-b(y)\big)_{\sigma'}\mathrm{d}y\bigg|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg)^{\frac12}\\
&\quad +\bigg(\int_0^\infty \bigg|\int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)h(y)}{|x-y|^{n-1}} \prod_{j=1}^m \big((b_j)_{Q_i}-b_j(y)\big)\mathrm{d}y\bigg|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg)^{\frac12}\\
&\leq \sum_i \prod_{j=1}^m |b_j(x)-(b_j)_{Q_i}|\mu_\Omega(h_i)(x) + \sum_i\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in\mathcal{C}_j^m} \big|\big(b(x)-b_{Q_i}\big)_\sigma\big|\mu_\Omega\big(h_i\big(b_{Q_i}-b\big)_{\sigma'}\big)(x)\\
&\quad +\mu_\Omega\bigg(\sum_i h_i \prod_{j=1}^m \big((b_j)_{Q_i}-b_j\big)\bigg)(x).
\end{aligned}
$$

于是，I_2 可写成

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \omega(\{x\in\mathbf{R}^n\setminus E: \mu_{\Omega,\vec{b}}(h)(x)>\lambda/2\})\\
&\leq \omega\bigg(\bigg\{x\in\mathbf{R}^n\setminus E: \sum_i\prod_{j=1}^m |b_j(x)-(b_j)_{Q_i}|\mu_\Omega(h_i)(x)>\lambda/6\bigg\}\bigg)\\
&\quad +\omega\bigg(\bigg\{x\in\mathbf{R}^n\setminus E: \sum_i\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in\mathcal{C}_j^m} \big|\big(b(x)-b_{Q_i}\big)_\sigma\big|\mu_\Omega\big(h_i(b_{Q_i}-b)_{\sigma'}\big)(x)>\lambda/6\bigg\}\bigg)\\
&\quad +\omega\bigg(\bigg\{x\in\mathbf{R}^n\setminus E: \mu_\Omega\bigg(\sum_i h_i\prod_{j=1}^m \big((b_j)_{Q_i}-b_j\big)\bigg)(x)>\lambda/6\bigg\}\bigg)\\
&=: I_{21}+I_{22}+I_{23}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

对于 I_{21}, 利用 Chebyshev 不等式和 Minkowski 不等式，有

$$
\begin{aligned}
I_{21} &\leq C\lambda^{-1}\sum_i \int_{\mathbf{R}^n\setminus 2Q_i} \prod_{j=1}^m |b_j(x)-(b_j)_{Q_i}|\mu_\Omega(h_i)(x)\omega(x)\mathrm{d}x\\
&\leq C\lambda^{-1}\sum_i \int_{\mathbf{R}^n\setminus 2Q_i} \prod_{j=1}^m |b_j(x)-(b_j)_{Q_i}|\\
&\quad\times\bigg(\int_0^{|x-x_i|+n^{1/2}l(Q_i)} \bigg|\int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)h_i(y)}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y\bigg|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg)^{\frac12}\omega(x)\mathrm{d}x\\
&\quad +C\lambda^{-1}\sum_i \int_{\mathbf{R}^n\setminus 2Q_i} \prod_{j=1}^m |b_j(x)-(b_j)_{Q_i}|\\
&\quad\times\bigg(\int_{|x-x_i|+n^{1/2}l(Q_i)}^\infty \bigg|\int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)h_i(y)}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y\bigg|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\bigg)^{\frac12}\omega(x)\mathrm{d}x\\
&=: I_{211}+I_{212}.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

注意到当 $x\in\mathbf{R}^n\setminus 2Q_i$ 和 $y\in Q_i$ 时，有 $|x-y|\leq|x-x_i|+\frac12 n^{1/2}l(Q_i)$ 和 $|x-y|\sim|x-x_i|\sim|x-x_i|+n^{1/2}l(Q_i)$, 于是

$$
\int_{|x-y|}^{|x-x_i|+n^{1/2}l(Q_i)} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac12\bigg(\frac{1}{|x-y|^2}-\frac{1}{(|x-x_i|+n^{1/2}l(Q_i))^2}\bigg) \leq \frac{Cl(Q_i)}{|x-y|^3}.
$$

注意到 $\mathrm{supp} h_i \subset Q_i$, 由 Minkowski 不等式，得

$$
\begin{aligned}
I_{211} \le{}& C\lambda^{-1}\sum_i \int_{\mathbf{R}^n\setminus 2Q_i}\prod_{j=1}^m \big|b_j(x)-(b_j)_{Q_i}\big| \\
&\times\Big\{\int_{Q_i}\frac{|\Omega(x-y)||h_i(y)|}{|x-y|^{n-1}}\Big(\int_{|x-y|}^{|x-x_i|+n^{1/2}l(Q_i)}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\Big)^{\frac12}\mathrm{d}y\Big\}\omega(x)\mathrm{d}x \\
\le{}& C\lambda^{-1}\sum_i l(Q_i)^{1/2}\int_{\mathbf{R}^n\setminus 2Q_i}\prod_{j=1}^m \big|b_j(x)-(b_j)_{Q_i}\big| \\
&\times\Big(\int_{Q_i}\frac{|\Omega(x-y)||h_i(y)|}{|x-y|^{n+1/2}}\mathrm{d}y\Big)\omega(x)\mathrm{d}x \\
\le{}& C\lambda^{-1}\sum_i l(Q_i)^{1/2}\int_{Q_i}|h_i(y)| \\
&\times\sum_{k=1}^\infty\Big\{\int_{2^{k+1}Q_i\setminus 2^kQ_i}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n+1/2}}\prod_{j=1}^m\big|b_j(x)-(b_j)_{Q_i}\big|\omega(x)\mathrm{d}x\Big\}\mathrm{d}y \\
\le{}& C\lambda^{-1}\sum_i l(Q_i)^{1/2}\int_{Q_i}|h_i(y)|\sum_{k=1}^\infty\Big\{\Big(\int_{2^{k+1}Q_i\setminus 2^kQ_i}\frac{|\Omega(x-y)|^r}{|x-y|^{n+1/2}}\mathrm{d}x\Big)^{1/r} \\
&\times\Big(\int_{2^{k+1}Q_i\setminus 2^kQ_i}\frac{\omega^{r'}(x)}{|x-y|^{n+1/2}}\prod_{j=1}^m\big|b_j(x)-(b_j)_{Q_i}\big|^{r'}\mathrm{d}x\Big)^{1/r'}\Big\}\mathrm{d}y. \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

由于当 $y\in Q_i$ 和 $x\in 2^{k+1}Q_i\setminus 2^kQ_i$ 时，有 $2^{k-1}l(Q_i)\le|x-y|\le 2^{k+2}l(Q_i)$, 从而

$$
\begin{aligned}
\Big(\int_{2^{k+1}Q_i\setminus 2^kQ_i}\frac{|\Omega(x-y)|^r}{|x-y|^{n+1/2}}\mathrm{d}x\Big)^{1/r} &\le \Big(\int_{2^{k-1}l(Q_i)\le|x-y|\le 2^{k+2}l(Q_i)}\frac{|\Omega(x-y)|^r}{|x-y|^{n+1/2}}\mathrm{d}x\Big)^{1/r} \\
&\le \Big\{\int_{2^{k-1}l(Q_i)}^{2^{k+2}l(Q_i)}\rho^{n-1}\Big(\int_{S^{n-1}}\frac{|\Omega(x')|^r}{\rho^{n+1/2}}\mathrm{d}x'\Big)\mathrm{d}\rho\Big\}^{1/r} \\
&\le C\big(2^kl(Q_i)\big)^{-\frac{1}{2r}}\|\Omega\|_{L^r(S^{n-1})}. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

注意到 $\omega^{r'}\in A_1$, 使用 Hölder 不等式， Minkowski 不等式， $\mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$ 函数的性质以及引理 2.5, 得

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_{2^{k+1}Q_i\setminus 2^kQ_i}\frac{\omega^{r'}(x)}{|x-y|^{n+1/2}}\prod_{j=1}^m\big|b_j(x)-(b_j)_{Q_i}\big|^{r'}\mathrm{d}x\Big)^{1/r'} \\
\le{}& C\big(2^{k+1}l(Q_i)\big)^{-(n+\frac12)/r'}\Big(\int_{2^{k+1}Q_i}\omega^{r'}(x)\prod_{j=1}^m\big|b_j(x)-(b_j)_{Q_i}\big|^{r'}\mathrm{d}x\Big)^{1/r'} \\
\le{}& C\big(2^{k+1}l(Q_i)\big)^{-(n+\frac12)/r'}\Big(\frac{|2^{k+1}Q_i|}{|2^{k+1}Q_i|}\int_{2^{k+1}Q_i}\omega^{r'}(x)\prod_{j=1}^m\big|b_j(x)-(b_j)_{Q_i}\big|^{r'}\mathrm{d}x\Big)^{1/r'} \\
\le{}& C\|\vec{b}\|_*\big(2^kl(Q_i)\big)^{-\frac{1}{2r'}}(k+1)^m\inf_{y\in Q_i}\omega(y). \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

由 (3.8), (3.9) 和 (3.10) 式可得

$$
I_{211}\le C\|\Omega\|_{L^r(S^{n-1})}\|\vec{b}\|_*\lambda^{-1}\sum_i l(Q_i)^{1/2}\int_{Q_i}|h_i(y)|\Big(\sum_{k=1}^\infty(k+1)^m\big(2^kl(Q_i)\big)^{-\frac12}\Big)\omega(y)\mathrm{d}y
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\|\vec{b}\|_{*}\lambda^{-1}\sum_{i}\int_{Q_i}|h_i(y)|\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)^m 2^{-k/2}\Big)\omega(y)\mathrm{d}y \\
&\leq C\|\vec{b}\|_{*}\lambda^{-1}\sum_{i}\int_{Q_i}|h_i(y)|\omega(y)\mathrm{d}y. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

接下来考虑 I_{212}. 记 $K(x,y,x_i)=\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x-x_i)}{|x-x_i|^{n-1}}$. 由于对任意的 $y\in Q_i$, 任意的 $x\in \mathbf{R}^n\setminus 2Q_i$ 以及满足 $|x-x_i|+n^{1/2}l(Q_i)\leq t$ 的 t, 有 $|x-y|\leq |x-x_i|+\frac{1}{2}n^{1/2}l(Q_i)<t$, 因此，利用 h_i 的消失性条件可得

$$
\begin{aligned}
I_{212} &\leq C\lambda^{-1}\sum_{i}\int_{\mathbf{R}^n\setminus 2Q_i}\prod_{j=1}^{m}|b_j(x)-(b_j)_{Q_i}| \\
&\qquad \times\Big\{\int_{Q_i}|K(x,y,x_i)||h_i(y)|\Big(\int_{|x-x_i|+n^{1/2}l(Q_i)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\Big)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\Big\}\omega(x)\mathrm{d}x \\
&\leq C\lambda^{-1}\sum_{i}\int_{\mathbf{R}^n\setminus 2Q_i}\prod_{j=1}^{m}|b_j(x)-(b_j)_{Q_i}|\Big(\int_{Q_i}\frac{|K(x,y,x_i)||h_i(y)|}{|x-x_i|}\mathrm{d}y\Big)\omega(x)\mathrm{d}x \\
&\leq C\lambda^{-1}\sum_{i}\int_{Q_i}|h_i(y)|\sum_{k=1}^{\infty}\big(2^k l(Q_i)\big)^{-1} \\
&\qquad \times\Big(\int_{2^{k+1}Q_i\setminus 2^kQ_i}|K(x,y,x_i)|\prod_{j=1}^{m}|b_j(x)-(b_j)_{Q_i}|\omega(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

用 s 表示使 $2^s>n^{1/2}$ 成立的最小正整数，由 Hölder 不等式，引理 2.1 和引理 2.5, 可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{2^{k+1}Q_i\setminus 2^kQ_i}|K(x,y,x_i)|\prod_{j=1}^{m}|b_j(x)-(b_j)_{Q_i}|\omega(x)\mathrm{d}x \\
&\leq\Big(\int_{2^{k-1}l(Q_i)\leq|x-x_i|\leq n^{1/2}2^kl(Q_i)}|K(x,y,x_i)|^r\mathrm{d}x\Big)^{1/r} \\
&\quad\times\Big(\int_{2^{k+1}Q_i}\prod_{j=1}^{m}|b_j(x)-(b_j)_{Q_i}|^{r'}\omega^{r'}(x)\mathrm{d}x\Big)^{1/r'} \\
&\leq\Big(\sum_{\ell=1}^{s}\int_{2^{k+\ell-1}l(Q_i)\leq|x-x_i|\leq 2^{k+\ell}l(Q_i)}|K(x,y,x_i)|^r\mathrm{d}x\Big)^{1/r} \\
&\quad\times\Big(\int_{2^{k+1}Q_i}\prod_{j=1}^{m}|b_j(x)-(b_j)_{Q_i}|^{r'}\omega^{r'}(x)\mathrm{d}x\Big)^{1/r'} \\
&\leq C\|\vec{b}\|_{*}(k+1)^m 2^k l(Q_i)\sum_{\ell=1}^{s}2^{(\ell-1)(n/r-n+1)} \\
&\quad\times\Big\{2^{-k-\ell+1}+\int_{\frac{|y-x_i|}{2^{k+\ell}l(Q_i)}}^{\frac{|y-x_i|}{2^{k+\ell-1}l(Q_i)}}\frac{\omega_r(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta\Big\}\inf_{y\in Q_i}\omega(y) \\
&\leq C\|\vec{b}\|_{*}(k+1)^m 2^k l(Q_i) \\
&\quad\times\Big\{2^{-k}\cdot\sum_{\ell=1}^{s}2^{\frac{(1-\ell)n}{r'}}+\sum_{\ell=1}^{s}2^{(\ell-1)(1-n/r')}\int_{\frac{|y-x_i|}{2^{k+\ell}l(Q_i)}}^{\frac{|y-x_i|}{2^{k+\ell-1}l(Q_i)}}\frac{\omega_r(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta\Big\}\inf_{y\in Q_i}\omega(y)
\end{aligned}
$$

$$\leq C\|\vec{b}\|_*(k+1)^m 2^k l(Q_i)\bigg\{2^{-k}+\sum_{\ell=1}^{s}\int_{\frac{|y-x_i|}{2^{k+\ell}l(Q_i)}}^{\frac{|y-x_i|}{2^{k+\ell-1}l(Q_i)}}\frac{\omega_r(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta\bigg\}\inf_{y\in Q_i}\omega(y).$$

于是有

$$\begin{aligned}
I_{212} &\leq \lambda^{-1}\sum_i\int_{Q_i}|h_i(y)|\omega(y)\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)^m\bigg\{2^{-k}+\sum_{\ell=1}^{s}\int_{\frac{|y-x_i|}{2^{k+\ell}l(Q_i)}}^{\frac{|y-x_i|}{2^{k+\ell-1}l(Q_i)}}\frac{\omega_r(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta\bigg\}\inf_{y\in Q_i}\omega(y)\\
&\leq \frac{C}{\lambda}\sum_i\int_{Q_i}|h_i(y)|\omega(y)\bigg\{\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)^m 2^{-k}+\int_0^1\frac{\omega_r(\delta)}{\delta}\Big(\log\frac{1}{\delta}\Big)^m\mathrm{d}\delta\bigg\}\mathrm{d}y\\
&\leq \frac{C}{\lambda}\sum_i\int_{Q_i}|h_i(y)|\omega(y)\mathrm{d}y. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

又由于当 $y\in Q_i$ 时有 $h_i(y)=f(y)-f_{Q_i}$, 从而由 (3.5), (3.7), (3.11) 和 (3.12) 式，有

$$I_{21}\leq\frac{C}{\lambda}\sum_i\int_{Q_i}|h_i(y)|\omega(y)\mathrm{d}y\leq\frac{C}{\lambda}\sum_i\int_{Q_i}(|f(y)|+|f_{Q_i}|)\omega(y)\mathrm{d}y\leq\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1_\omega(\mathbf{R}^n)}.$$

为了估计 I_{23}, 注意到 $\Omega\in L^r(S^{n-1})$ $(r>1)$ 和 $\omega^{r'}\in A_1$, 利用引理 2.2, 引理 2.5, (2.5), (2.6), (2.7) 以及 (3.3) 式可得

$$\begin{aligned}
I_{23} &\leq \omega\bigg(\bigg\{x\in\mathbf{R}^n:\mu_\Omega\bigg(\sum_i h_i\prod_{j=1}^{m}((b_j)_{Q_i}-b_j)\bigg)(x)>\lambda/6\bigg\}\bigg)\\
&\leq C\lambda^{-1}\int_{\mathbf{R}^n}\sum_i|h_i(x)|\omega(x)\prod_{j=1}^{m}\big|(b_j)_{Q_i}-b_j(x)\big|\mathrm{d}x\\
&\leq C\lambda^{-1}\sum_i\bigg(\int_{Q_i}|f(x)|\omega(x)\prod_{j=1}^{m}\big|(b_j)_{Q_i}-b_j(x)\big|\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{Q_i}|f_{Q_i}|\omega(x)\prod_{j=1}^{m}\big|(b_j)_{Q_i}-b_j(x)\big|\mathrm{d}x\bigg)\\
&\leq C\lambda^{-1}\sum_i\omega(Q_i)\|f\|_{L(\log L)^m,Q_i,\omega}\prod_{j=1}^{m}\big\||b_j-(b_j)_{Q_i}|\big\|_{\exp L,Q_i,\omega}\\
&\quad+C\lambda^{-1}\sum_i\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i}|f(y)|\mathrm{d}y\int_{Q_i}\omega(x)\prod_{j=1}^{m}\big|(b_j)_{Q_i}-b_j(x)\big|\mathrm{d}x\\
&\leq \lambda^{-1}\sum_i\bigg(\omega(Q_i)\|f\|_{L(\log L)^m,Q_i,\omega}+\int_{Q_i}|f(y)|\mathrm{d}y\inf_{y\in Q_i}\omega(y)\bigg)\\
&\leq C\lambda^{-1}\sum_i\bigg(\omega(Q_i)\inf\bigg\{\lambda+\frac{\lambda}{\omega(Q_i)}\int_{Q_i}\Phi_m\Big(\frac{|f(y)|}{\lambda}\Big)\omega(y)\mathrm{d}y\bigg\}+\int_{Q_i}|f(y)|\omega(y)\mathrm{d}y\bigg)\\
&\leq C\sum_i\bigg(\omega(Q_i)+\int_{Q_i}\Phi_m\Big(\frac{|f(y)|}{\lambda}\Big)\omega(y)\mathrm{d}y\bigg)+C\lambda^{-1}\int_{\mathbf{R}^n}|f(y)|\omega(y)\mathrm{d}y\\
&\leq C\sum_i\bigg(\int_{Q_i}\frac{|f(y)|}{\lambda}\omega(y)\mathrm{d}y+\int_{Q_i}\frac{|f(y)|}{\lambda}\Big(1+\log^+\frac{|f(y)|}{\lambda}\Big)^m\omega(y)\mathrm{d}y\bigg)\\
&\quad+C\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|f(y)|}{\lambda}\omega(y)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\leq C\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|f(y)|}{\lambda}\left(1+\log^+\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)^m\omega(y)\mathrm{d}y.$$

现在来估计 I_{22}. 由 Minkowski 不等式，有

$$\begin{aligned}
I_{22}\leq\ & C\lambda^{-1}\sum_i\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\int_{\mathbf{R}^n\backslash 2Q_i}\left|\left(b(x)-b_{Q_i}\right)_\sigma\right|\mu_\Omega\left(h_i\left(b_{Q_i}-b\right)_{\sigma'}\right)(x)\omega(x)\mathrm{d}x\\
\leq\ & C\lambda^{-1}\sum_i\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\int_{\mathbf{R}^n\backslash 2Q_i}\left|\left(b(x)-b_{Q_i}\right)_\sigma\right|\\
&\times\left(\int_0^{|x-x_i|+n^{1/2}l(Q_i)}\left|\int_{|x-y|\leq t}\frac{\Omega(x-y)h_i(y)}{|x-y|^{n-1}}\left(b_{Q_i}-b(y)\right)_{\sigma'}\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac12}\omega(x)\mathrm{d}x\\
&+C\lambda^{-1}\sum_i\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\int_{\mathbf{R}^n\backslash 2Q_i}\left|\left(b(x)-b_{Q_i}\right)_\sigma\right|\\
&\times\left(\int_{|x-x_i|+n^{1/2}l(Q_i)}^\infty\left|\int_{|x-y|\leq t}\frac{\Omega(x-y)h_i(y)}{|x-y|^{n-1}}\left(b_{Q_i}-b(y)\right)_{\sigma'}\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\right)^{\frac12}\omega(x)\mathrm{d}x\\
=:\ & C\lambda^{-1}\sum_i\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}(I_{221}+I_{222}).
\end{aligned}$$

对于 I_{221} 和 I_{222}, 类似于 I_{21} 和 I_{23} 的估计，有

$$\begin{aligned}
I_{221}\leq\ & Cl(Q_i)^{1/2}\int_{\mathbf{R}^n\backslash 2Q_i}\left|\left(b(x)-b_{Q_i}\right)_\sigma\right|\\
&\times\left(\int_{Q_i}\frac{|\Omega(x-y)||h_i(y)|}{|x-y|^{n+1/2}}\left(b_{Q_i}-b(y)\right)_{\sigma'}\mathrm{d}y\right)\omega(x)\mathrm{d}x\\
\leq\ & C\|\vec{b}_\sigma\|_*\|\vec{b}_{\sigma'}\|_*\left(\omega(Q_i)\inf\left\{\lambda+\frac{\lambda}{\omega(Q_i)}\int_{Q_i}\Phi_m\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)\omega(y)\mathrm{d}y\right\}\right.\\
&\left.+\int_{Q_i}|f(y)|\omega(y)\mathrm{d}y\right)\\
\leq\ & C\|\vec{b}\|_*\left(\omega(Q_i)+\int_{Q_i}\Phi_m\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)\omega(y)\mathrm{d}y+\int_{Q_i}|f(y)|\omega(y)\mathrm{d}y\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{222}\leq\ & C\int_{\mathbf{R}^n\backslash 2Q_i}\left|\left(b(x)-b_{Q_i}\right)_\sigma\right|\left(\int_{Q_i}\frac{|K(x,y,x_i)||h_i(y)|}{|x-x_i|}\left(b_{Q_i}-b(y)\right)_{\sigma'}\mathrm{d}y\right)\omega(x)\mathrm{d}x\\
\leq\ & C\|\vec{b}_\sigma\|_*\int_{Q_i}|h_i(y)|\left|\left(b_{Q_i}-b(y)\right)_{\sigma'}\right|\omega(y)\mathrm{d}y\\
\leq\ & C\|\vec{b}_\sigma\|_*\|\vec{b}_{\sigma'}\|_*\left(\omega(Q_i)\inf\left\{\lambda+\frac{\lambda}{\omega(Q_i)}\int_{Q_i}\Phi_m\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)\omega(y)\mathrm{d}y\right\}\right.\\
&\left.+\int_{Q_i}|f(y)|\omega(y)\mathrm{d}y\right)\\
\leq\ & C\|\vec{b}\|_*\left(\omega(Q_i)+\int_{Q_i}\Phi_m\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)\omega(y)\mathrm{d}y+\int_{Q_i}|f(y)|\omega(y)\mathrm{d}y\right).
\end{aligned}$$

于是得

$$I_{22} \leq C\lambda^{-1} \sum_{i} \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{\sigma \in C_j^m} (I_{221} + I_{222}) \leq \int_{\mathbf{R}^n} \frac{|f(y)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f(y)|}{\lambda}\right)^m \omega(y)\mathrm{d}y.$$

从而定理 1.1 得证. ∎

参 考 文 献

[1] Stein E M. On the functions of Littlewood-Paley, Lusin and Marcinkiewicz. Trans Amer Math Soc, 1958, **88**: 430–466

[2] Stein E M. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1993

[3] Grafakos L. Classical and Modern Fourier Analysis. New Jersey: Pearson Education, 2004

[4] Ding Y, Lu S Z, Zhang P. Weighted weak type estimates for commutators of the Marcinkiewicz integrals. Science in China (Ser A), 2004, **47**(1): 83–95

[5] Zhang P. Weighted endpoint estimates for commutators of Marcinkiewicz integrals. Acta Math Sin, 2010, **26**(9): 1709-1722

[6] Zhang P. Weighted estimates for multilinear commutators of Marcinkiewicz integrals. Acta Math Sin, 2008, **24**(8): 1387–1400

[7] Ding Y, Lu S Z. Homgeneous fractional integrals on Hardy spaces. Tôhoku Math J, 2000, **52**: 153–162

[8] Fan D, Sato S. Weak type (1, 1) estimates for Marcinkiewicz integrals with rough kernels. Tôhoku Math J, 2001, **53**(2): 265–284

[9] 刘庆国. 关于 Marcinkiewicz 积分交换子的若干问题 [D]. 哈尔滨：黑龙江大学， 2010

[10] Rao M M, Ren Z D. Theory of Orlicz Spaces. New York: Marcel Dekker, Inc, 1991

[11] Pérez C, Pradolini G. Sharp weighted endpoint estimates for commutators of singular integrals. Michigan Math J, 2001, **49**: 23–37

[12] Pérez C, Trujillo-González R. Sharp weighted estimates for multilinear commutators. J London Math Soc, 2002, **65**(2): 672–692

[13] O'Neil R. Fractional integration in Orlicz spaces. Tran Amer Math Soc, 1963, **115**(1): 300–328

[14] Pérez C. Endpoint estimates for commutators of singular integral operators. J Funct Anal, 1995, **128**: 163–185

[15] Muckenhoupt B, Wheeden R L. Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform. Studia Math, 1976, **54**(3): 221–237

Weighted Endpoint Estimates for Multilinear Commutators of Marcinkiewicz Integrals

[1]Zhang Pu [1]Wu Jianglong [2]Liu Qingguo

([1]*Department of Mathematics, Mudanjiang Normal University, Heilongjiang Mudanjiang 157011;*
[2]*Laboratory for Multiphase Processes, University of Nova Gorica, Nova Gorica 5000, Slovenia*)

Abstract: Let $\mu_{\Omega,\vec{b}}$ be the multilinear commutator generalized by μ_Ω, the n-dimensional Marcinkiewicz integral, and $b_j \in \mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leq j \leq m)$. The authors establish the weighted weak $L(\log L)^m$-type estimates for $\mu_{\Omega,\vec{b}}$ when Ω satisfies a kind of Dini conditions.

Key words: Marcinkiewicz integral; Multilinear commutator; $\mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$; A_p weight.

MR(2000) Subject Classification: 42B20; 42B25