

基于滤波器结构的压缩感知雷达感知矩阵优化

张劲东^{*}, 张弓, 潘汇, 贲德

南京航空航天大学 电子信息工程学院, 江苏 南京 210016

摘要: 压缩感知雷达的目标场景恢复性能要求不同目标的反射回波在压缩空间上的互相关性尽可能小。基于该思想,提出了压缩感知雷达感知矩阵优化模型,根据系统参数和任务信息,以降低感知矩阵互相关性为目标,自适应地构造发射波形和测量矩阵,提升系统性能。分别给出了基于滤波器结构的压缩感知雷达发射波形优化、测量矩阵优化以及波形-测量矩阵联合优化算法。仿真结果表明:本文提出的压缩感知雷达感知矩阵优化模型和算法能够有效地提高场景恢复精度。

关键词: 压缩感知雷达; 感知矩阵优化; 发射波形优化; 测量矩阵优化; 滤波器结构

中图分类号: V243.2; TN958.4

文献标识码: A

文章编号: 1000-6893(2013)04-0864-09

大多数情况下雷达所需探测的目标相对于整个场景是高度稀疏的,压缩感知(Compressed Sensing, CS)^[1]的出现为充分利用目标的稀疏性提供了理论基础。2007年,Baraniuk在文献[2]中首次提出了压缩感知雷达(Compressed Sensing Radar, CSR)的概念,经过学者们数年的研究,CSR已成为当前雷达领域一个新的研究热点。与传统雷达相比,CSR具有3个明显优势:1)接收端采样率低,场景恢复所需数据量小,能够降低系统对A/D、存储设备、信号处理等硬件的性能要求;2)不需要匹配滤波,降低了系统复杂度;3)突破了雷达测不准原理,能够同时获得时域和频域高分辨率^[2]。

有关CSR的研究可分为3部分内容:基于雷达回波信号模型的稀疏基构造;回波信号的压缩观测;采用重构算法完成稀疏场景恢复。目前,大

多数CSR系统所采用的是确定的发射波形和随机的测量矩阵。现有的CS研究文献从两个角度给出了重构算法能够准确恢复出原信号需要满足的条件——有限等间距性质(Restricted Isometry Property, RIP)^[3]和感知矩阵非相关性条件^[4-5],这两个约束条件都指出:感知矩阵归一化互相关系数越小,则CS算法的稀疏度上限越大,在噪声中恢复信号的能力越强,精度越高。因此,在给定的场景信息和系统参数下,自适应地设计发射波形和测量矩阵以降低不同目标的反射回波在压缩空间上的互相关性,能够提升CSR的系统性能。

针对CS中稀疏基和测量矩阵优化的问题,已有一些学者开展了研究,并提出了自适应压缩感知(Adaptive Compressed Sensing, ACS)的概念^[6]。如文献[7]中提出了一种针对图像压缩的稀疏基-测量矩阵联合优化算法,仿真表明该算法

收稿日期: 2012-03-15; 退修日期: 2012-08-29; 录用日期: 2012-12-10; 网络出版时间: 2013-01-05 11:23

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20130105.1123.001.html

基金项目: 国家自然科学基金(61071163, 61201367, 61071164, 61271327); 江苏省自然科学基金(BK2012382); 中国博士后科学基金(20100481143); 江苏省博士后科研资助计划(1109093C); 中央高校基本科研业务费(NS2012020); 江苏高校优势学科建设工程资助项目

* 通讯作者 Tel.: 025-84892410 E-mail: zhangjd@nuaa.edu.cn

引用格式: Zhang J D, Zhang G, Pan H, et al. Optimized sensing matrix design of filter structure based compressed sensing radar. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 33(4): 864-872. 张劲东, 张弓, 潘汇, 等. 基于滤波器结构的压缩感知雷达感知矩阵优化. 航空学报, 2013, 34(4): 864-872.

能够获得更高的重构精度;文献[8]提出了一种梯度下降优化算法对稀疏基和测量矩阵进行联合优化,统计实验表明通过该算法优化后的重构正确率高于未经优化的测量-重构算法。但 CSR 中稀疏基和测量矩阵的结构不同于图像或普通信号,上述算法并不适用于 CSR。在 CSR 感知矩阵优化方面,文献[9]最早开展了一些开拓性研究,以提高感知矩阵正交性为优化目标,提出一种基于奇异值分解(SVD)的复数波形-复数测量矩阵联合优化算法,并将 CSR 理论与认知雷达(Cognitive Radar, CR)概念相结合,构建了面向动态场景探测的自适应压缩感知雷达(Adaptive Compressed Sensing Radar, ACSR)系统,根据实时反馈的场景信息更新波形与测量矩阵,调整特定原子间的正交性,从而改善目标探测性能,证明了 CSR 感知矩阵优化对于 CSR 系统性能提升的重要性。

本文根据 CSR 感知矩阵优化思想,基于滤波器结构的测量矩阵实现方式,提出了 CSR 波形优化、测量矩阵优化以及两者联合优化算法,从而降低不同目标的反射回波在压缩空间上的互相关性,提升 CSR 在噪声中恢复稀疏场景的精度,增大系统的稀疏度上限。

1 基于滤波器结构的 CSR 信号处理

假设雷达照射区域在距离-多普勒平面上进行了离散化,则根据文献[2],雷达信号回波可表示为

$$s_r = \sum_{k=1}^K \sigma_k \mathbf{F}^{f_k} \mathbf{T}(t_k) s_t + \mathbf{n} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{T}(t_k)_{n \times l}$ = $\begin{bmatrix} \text{Zeros}(t_k, l) \\ \text{diag}(\text{ones}(1, l)) \\ \text{Zeros}(n-l-t_k, l) \end{bmatrix}$ 为时延矩阵;

阵; $\mathbf{F}_{n \times n} = \text{diag}(\omega_m^0, \omega_m^1, \dots, \omega_m^n)$ 为单位频移矩阵; \mathbf{n} 为噪声; s_t 为发射信号矢量; σ_k 为第 k 个目标的散射系数; K 为目标稀疏度; 时延量 $t_k = \text{Round}(\tau_k / \Delta t)$, Δt 为时延分辨率; 多普勒频移 $f_k = \text{Round}(f_{dk} / \Delta f_d)$, $\Delta f_d = 2\pi/m$ 为多普勒分辨率。

将雷达感兴趣的距离范围 \mathbf{I} 、速度范围 \mathbf{J} 内的所有可能的 g 个目标回波矢量组成冗余字典 $\Psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_g]$; 则式(1)可重写为

$$s_r = \Psi \alpha + \mathbf{n} \quad (2)$$

式中: $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_g]^T$, 即 α 中含有 K 个非零值。因此, α 为 K 稀疏信号, Ψ 为稀疏基。

对回波信号 s_r 用 $q \times n$ ($q \ll n$) 的测量矩阵 Φ 进行观测得到 $n \times 1$ 维观测矢量:

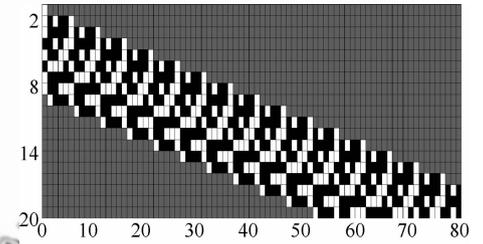
$$y = \Phi s_r = \Phi(\Psi \alpha + \mathbf{n}) = \Gamma \alpha + \mathbf{z} \quad (3)$$

式中: $\Gamma = \Phi \Psi$ 为感知矩阵; $\mathbf{z} = \Phi \mathbf{n}$ 为噪声矢量。

为便于对 s_r 进行实时测量,本文采用文献[10]所提出的滤波器结构实现测量过程,测量流程如图 1(a)所示。首先对回波信号进行 A/D 转换得到回波信号矢量 s_r , 然后通过长度为 d 的 FIR 滤波器,接着通过一个下采样滤波器降低采样速率,得到观测矢量 y 。滤波器系数 h 可选为高斯随机变量或 Rademacher 分布的 ± 1 等。



(a) Signal measurement scheme based on filter structure



(b) Equivalent matrix diagram

图 1 基于滤波器结构的信号观测

Fig. 1 Signal measurement based on filter structure

由以上测量过程可知其对应的测量矩阵为 h 逐行移 e 位所构成的 $q \times n$ 维矩阵。当 $q = 20$ 、 $n = 80$ 、 $e = 2$ 、 $d = 40$ 、 h 为 Rademacher 分布 ± 1 时,滤波器结构等效测量矩阵如图 1(b)所示。

选定测量矩阵,得到观测信号和感知矩阵之后,就可以选用合适的重构算法完成目标场景恢复。基于 l_0 范数最小化的优化模型为

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_{l_0}, \quad \text{s. t.} \quad y = \Phi \Psi \alpha \quad (4)$$

求解式(4)是一个 NP-hard 问题。文献[11]指出求解 l_1 范数最小可以得到等价解,即:

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_{l_1}, \quad \text{s. t.} \quad y = \Phi \Psi \alpha \quad (5)$$

求解式(5)的重构方法又称基追踪(Basis Pursuit, BP)^[12]法,运算复杂度高、速度慢。因此运算速度较快的贪婪算法应用更为广泛,典型算法

有匹配追踪 (Match Pursuit, MP) 算法和正交匹配追踪 (Orthogonal Match Pursuit, OMP)^[13] 算法。

2 CSR 感知矩阵优化模型

测量矩阵实现了压缩采样,但是,如果测量过程破坏了原信号所包含的信息,CS 重构算法将难以从测量值中恢复原信号。首先,感知矩阵应满足 RIP 准则,要求对任意 K 稀疏信号 $\boldsymbol{\eta}$, 存在约束等容常量 (RIC) $\gamma_k \in (0, 1)$ 满足:

$$(1 - \gamma_k) \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 \leq \|\bar{\mathbf{I}}\boldsymbol{\eta}\|_2^2 \leq (1 + \gamma_k) \|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 \quad (6)$$

式中: $\bar{\mathbf{I}}$ 表示 \mathbf{I} 中各列归一化后的矩阵。这一性质要求测量矩阵不会把两个不同的 K 稀疏信号映射为两个近似的压缩域信号,其实质是保证 \mathbf{I} 中任意少于 K 列组成的子矩阵满足近似正交性^[14],即要求 \mathbf{I} 各列间归一化互相关系数充分小。

除了 RIP 准则之外,文献[4]和文献[5]从重构算法性能分析的角度对感知矩阵归一化互相关系数进行了研究。定义感知矩阵相关系数 μ_r 为 \mathbf{I} 各列间归一化互相关系数的绝对值中的最大值,即

$$\mu_r = \max_{u \neq v} \left| \frac{\langle \mathbf{I}(u), \mathbf{I}(v) \rangle}{\|\mathbf{I}(u)\|_2 \|\mathbf{I}(v)\|_2} \right| \quad (7)$$

式中: $\mathbf{I}(u)$ 表示 \mathbf{I} 的第 u 列。文献[4]指出,在无噪情况下,稀疏度 K 与 μ_r 的关系满足式(8)时,信号有唯一的最稀疏表示形式,且算法能够准确地将其恢复出来:

$$K < (1 + \mu_r^{-1})/2 \quad (8)$$

在有噪声情况下,设 \mathbf{x}_0 为理想的无噪声信号, \mathbf{x} 为含噪信号,假设 \mathbf{x}_0 的变换域系数为 K 稀疏的 $\boldsymbol{\alpha}_0$, 有界噪声功率 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2 \leq \epsilon \leq \delta$, 利用 l_0 范数恢复所得结果 $\boldsymbol{\alpha}_{0,\delta}$ 与正确解 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 之间的误差满足如下关系式:

$$\|\boldsymbol{\alpha}_{0,\delta} - \boldsymbol{\alpha}_0\|_2 \leq \Lambda_0(K, \mu_r)(\epsilon + \delta) \quad \forall \delta \geq \epsilon > 0 \quad (9)$$

式中: $\Lambda_0(K, \mu_r)^2 = 1/(1 - \mu_r(2K - 1))$ 为稳定系数。求解 l_1 范数最小的重构算法也有类似的结果:

$$\|\boldsymbol{\alpha}_{1,\delta} - \boldsymbol{\alpha}_0\|_2 \leq \Lambda_1(K, \mu_r)(\epsilon + \delta) \quad \forall \delta \geq \epsilon > 0 \quad (10)$$

式中: 稳定系数 $\Lambda_1(K, \mu_r)^2 = 1/[1 - \mu_r(4K - 1)]$ 。

由式(8)~式(10)可见, μ_r 越小,则算法的稀疏度上限 K_{\max} 越大,从噪声中恢复信号的精度越高,抗噪声能力越强。感知矩阵两列间归一化互相关系数可写为如下形式:

$$\mu_{uv}(u \neq v) = \left| \frac{\langle \Phi \boldsymbol{\psi}^{i_u j_u}, \Phi \boldsymbol{\psi}^{i_v j_v} \rangle}{\|\Phi \boldsymbol{\psi}^{i_u j_u}\|_2 \|\Phi \boldsymbol{\psi}^{i_v j_v}\|_2} \right| = \left| \frac{\langle \Phi \mathbf{F}^{i_u} \mathbf{T}(j_u) \mathbf{s}_t, \Phi \mathbf{F}^{i_v} \mathbf{T}(j_v) \mathbf{s}_t \rangle}{\|\Phi \mathbf{F}^{i_u} \mathbf{T}(j_u) \mathbf{s}_t\|_2 \|\Phi \mathbf{F}^{i_v} \mathbf{T}(j_v) \mathbf{s}_t\|_2} \right| \quad (11)$$

可见, μ 的大小与测量矩阵 Φ 、发射信号矢量 \mathbf{s}_t 、雷达所要探测的距离范围 \mathbf{I} 、速度范围 \mathbf{J} 有关,还与多普勒分辨率单元数 m 及距离门个数 n 有关。当雷达的任务信息(包括 \mathbf{I} 、 \mathbf{J})和系统参数(包括 m 、 n)确定后,以提高感知矩阵正交性为目标设计 \mathbf{s}_t 和 Φ , 能够提高雷达系统稀疏场景恢复的可观测目标个数上限,提高场景恢复的精度和抗噪能力。

据此,本文提出 CSR 感知矩阵优化的概念,在获取雷达任务信息和系统参数后,构造相应的发射波形和测量矩阵,使 CSR 的感知矩阵原子间归一化互相关系数最小,从而达到近似最优的场景重构性能。CSR 感知矩阵优化的系统框图如图 2 所示。

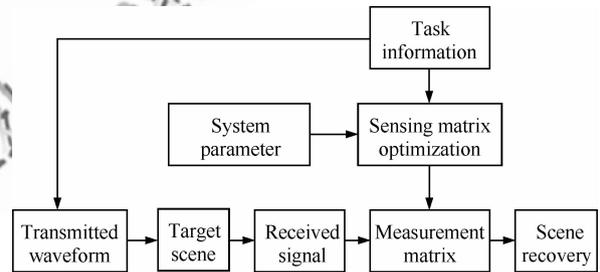


图 2 CSR 感知矩阵优化系统框图

Fig. 2 Diagram of the sensing matrix optimization system of CSR

3 CSR 感知矩阵优化设计算法

3.1 发射波形优化

本节介绍一种在测量矩阵 Φ 给定时实现 CSR 波形优化的迭代算法。

根据以上分析,感知矩阵归一化互相关系数越小,则 CSR 的性能越好。因此将波形优化目标设定为所有感知矩阵各列间归一化互相关系数的

平均数最小,即:

$$\bar{\mu} = \frac{2}{g(g-1)} \sum_{u=1}^g \sum_{v=1, v \neq u}^g \mu_{uv} \quad (12)$$

由式(7)可知, μ_{uv} ($u \neq v$) 的大小既与 $\Gamma(u)$ 和 $\Gamma(v)$ 之间的互相关系数有关,也与 $\Gamma(u)$ 和 $\Gamma(v)$ 各自的自相关系数有关。为简便起见,这里将两者分开考虑。首先, Γ 的自相关系数、互相关系数分别可写为以下形式:

$$\langle \Gamma(u), \Gamma(v) \rangle = \mathbf{s}_t^H \mathbf{T}(j_v)^H (\mathbf{F}^v)^H \Phi^H \Phi \mathbf{F}^u \mathbf{T}(j_u) \mathbf{s}_t \quad (13)$$

$$\|\Gamma(u)\|_2 = \mathbf{s}_t^H \mathbf{T}(j_u)^H (\mathbf{F}^u)^H \Phi^H \Phi \mathbf{F}^u \mathbf{T}(j_u) \mathbf{s}_t \quad (14)$$

要使 $\bar{\mu}$ 最小,应在使 $|\langle \Gamma(u), \Gamma(v) \rangle|$ 尽可能小的同时使 $\|\Gamma(u)\|_2$ 和 $\|\Gamma(v)\|_2$ 尽可能大。但是如式(7)所示的优化目标难以求解,因此将这种优化期望转化为

$$\beta = \sum_{u=1}^g \sum_{v=1, v \neq u}^g \langle \Gamma(u), \Gamma(v) \rangle^2 - \vartheta \sum_{u=1}^g \|\Gamma(u)\|_2^2 \quad (15)$$

式中: ϑ 为加权系数。将式(13)、式(14)代入式(15),则

$$\beta = \left\{ \sum_{u=1}^g \sum_{v=1, v \neq u}^g \mathbf{s}_t^H \mathbf{T}(j_u)^H (\mathbf{F}^u)^H \Phi^H \Phi \mathbf{F}^v \mathbf{T}(j_v) \mathbf{s}_t \cdot \mathbf{s}_t^H \mathbf{T}(j_v)^H (\mathbf{F}^v)^H \Phi^H \Phi \mathbf{F}^u \mathbf{T}(j_u) \mathbf{s}_t \right\} - \vartheta \left\{ \sum_{u=1}^g \mathbf{s}_t^H \mathbf{T}(j_u)^H (\mathbf{F}^u)^H \Phi^H \Phi \mathbf{F}^u \mathbf{T}(j_u) \mathbf{s}_t \cdot \mathbf{s}_t^H \mathbf{T}(j_u)^H (\mathbf{F}^u)^H \Phi^H \Phi \mathbf{F}^u \mathbf{T}(j_u) \mathbf{s}_t \right\} \quad (16)$$

将式(16)合并同类项可得:

$$\beta = \mathbf{s}_t^H \Omega \mathbf{s}_t \quad (17)$$

式中:

$$\Omega = \sum_{u=1}^g \sum_{v=1, v \neq u}^g \mathbf{T}(j_u)^H (\mathbf{F}^u)^H \Phi^H \Phi \mathbf{F}^v \mathbf{T}(j_v) \mathbf{s}_t \cdot \mathbf{s}_t^H \mathbf{T}(j_v)^H (\mathbf{F}^v)^H \Phi^H \Phi \mathbf{F}^u \mathbf{T}(j_u) - \vartheta \sum_{u=1}^g \mathbf{T}(j_u)^H (\mathbf{F}^u)^H \Phi^H \Phi \mathbf{F}^u \mathbf{T}(j_u) \mathbf{s}_t \cdot \mathbf{s}_t^H \mathbf{T}(j_u)^H (\mathbf{F}^u)^H \Phi^H \Phi \mathbf{F}^u \mathbf{T}(j_u) \quad (18)$$

对 Ω 进行特征分解有:

$$\Omega = \mathbf{U} \Lambda \mathbf{U}^H \quad (19)$$

式中: $\mathbf{U} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_n]$ 为特征向量矩阵; $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, 且有 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 。

式(15)中的优化目标转化为 β 的最小化问题,根据特征分解定理, \mathbf{s}_t 取为最小特征值对应的特征向量:

$$\mathbf{s}_t = \mathbf{e}_n \quad (20)$$

基于以上分析,CSR 波形优化设计算法步骤如下:

步骤 1 随机产生初始波形 \mathbf{s}_t , 设置迭代终止门限 ξ 。

步骤 2 根据式(19)计算矩阵 Ω 。

步骤 3 对 Ω 进行特征分解, \mathbf{s}_{new} 取为最小特征值对应的特征向量。

步骤 4 计算 $\Delta E = \|\mathbf{s}_{\text{new}} - \mathbf{s}_t\|_2$, 若 $\Delta E < \xi$, 则算法终止; 否则 $\mathbf{s}_t \leftarrow \mathbf{s}_{\text{new}}$, 重复步骤 2 和步骤 3。

在步骤 1 中, \mathbf{s}_t 可初始化为高斯分布或均匀分布的随机序列,也可初始化为已有的序列,如 Alltop 序列。最终得到的波形会有不同,但都具有优良的性能。 ξ 一般可设为 10^{-3} 或更小的值。

3.2 测量矩阵优化

本节介绍一种在波形给定(即稀疏基 Ψ 给定)时,基于滤波器结构的测量矩阵优化设计方法。

定义相关测度矩阵:

$$\mathbf{G}_{g \times g} = \Gamma^H \Gamma \quad (21)$$

式中: $\Gamma = \Phi \Psi = \Phi [\psi_1 \ \psi_2 \ \cdots \ \psi_g]$ 。 \mathbf{G} 的主对角线上为感知矩阵各列的自相关系数;非对角线上的值为感知矩阵各列间互相关系数。由第 2 节的分析可知,CSR 感知矩阵的优化目标是使感知矩阵各列间归一化互相关系数尽可能地小,因此优化目标可转化为使 \mathbf{G} 逼近对角矩阵 $\rho \mathbf{I}$ 。其中 ρ 为对角矩阵,具有如下形式:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_g \end{bmatrix} \quad (22)$$

式中:

$$\rho_x = \|\Phi \psi_x\|_2, x \in [1, g] \quad (23)$$

这里将优化目标设为寻找 Γ 使式(24)最小化:

$$\|\Gamma^H \Gamma - \rho \mathbf{I}\|_F^2 \quad (24)$$

鉴于式(24)是 Γ 的四次型,求解困难,文献[15]指出,式(24)的最小化问题与式(25)的最小化问题是几乎等价的:

$$\|\Gamma - \mathbf{U} \sqrt{\rho}\|_F^2 \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad (25)$$

式中: \mathbf{U} 为 $q \times g$ 维的半正定矩阵。若 $\mathbf{\Gamma}^H$ 的奇异值(SVD)分解表示为

$$\mathbf{\Gamma}^H = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}_2^H \quad (26)$$

式中: \mathbf{U}_1 为 $g \times g$ 维酉矩阵; $\mathbf{\Sigma}$ 为 $g \times g$ 维正交矩阵; \mathbf{U}_2 为 $q \times g$ 维半正定矩阵。则矩阵 \mathbf{U} 可由下式给出^[16]:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^H \quad (27)$$

因此,优化目标函数为

$$\min_{\mathbf{r}} \|\mathbf{\Gamma} - \mathbf{U} \sqrt{\boldsymbol{\rho}}\|_{\text{F}}^2 \quad (28)$$

则最理想情况是

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{U} \sqrt{\boldsymbol{\rho}} \quad (29)$$

本文采用 2.2 节所述的滤波器结构, Φ 为 FIR 滤波器系数逐行移 e 位得到的 $q \times n$ 维矩阵,因此 Φ 的每一行 $\Phi(x, :)$ ($x \in [1, q]$) 可表达为如下形式:

$$\Phi(x, :) = \mathbf{h}^T \mathbf{M}_x \quad (30)$$

式中: \mathbf{M}_x ($e \times n$ 维) 为与 $\Phi(x, :)$ 对应的移位矩阵(例如 $\mathbf{M}_1 = [\text{diag}(\text{ones}(1, d)) \quad \text{Zeros}(d, n-d)]_{d \times n}$); \mathbf{h}^T 为滤波器系数向量的转置。当稀疏基 Ψ 给定时,式(30)可重写为

$$\mathbf{h}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_q \end{bmatrix} \Psi = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho_1} \mathbf{U}(:, 1) & \sqrt{\rho_2} \mathbf{U}(:, 2) & \cdots & \sqrt{\rho_g} \mathbf{U}(:, g) \end{bmatrix} \quad (31)$$

对式(31)取转置可得:

$$\begin{bmatrix} \Psi^T \mathbf{M}_1^T \mathbf{h} & \Psi^T \mathbf{M}_2^T \mathbf{h} & \cdots & \Psi^T \mathbf{M}_q^T \mathbf{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\xi_1} \mathbf{U}(:, 1)^T \\ \sqrt{\xi_2} \mathbf{U}(:, 2)^T \\ \vdots \\ \sqrt{\xi_g} \mathbf{U}(:, g)^T \end{bmatrix} \quad (32)$$

定义等式右边为矩阵 \mathbf{B} , 则式(32)又可重写为

$$\Psi^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^T \\ \mathbf{M}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{M}_q^T \end{bmatrix} \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(:, 1) \\ \mathbf{B}(:, 2) \\ \vdots \\ \mathbf{B}(:, q) \end{bmatrix} \quad (33)$$

令 $\mathbf{A} = \Psi^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^T \\ \mathbf{M}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{M}_q^T \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(:, 1) \\ \mathbf{B}(:, 2) \\ \vdots \\ \mathbf{B}(:, q) \end{bmatrix}$, 即 \mathbf{b} 是 \mathbf{B} 按列拉

成的列向量, 则式(33)可写为

$$\mathbf{A} \mathbf{h} = \mathbf{b} \quad (34)$$

式中: \mathbf{A} 为 $gq \times d$ 维矩阵; \mathbf{b} 为 $gq \times 1$ 维向量; \mathbf{h} 包含 d 个未知数(一般情况下 $d \ll gq$)。因此,式(34)中独立方程的个数大于未知数个数,不是一致方程,可采用最小二乘法求取最优解:

$$\mathbf{h}_{\text{LMS}} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{b} \quad (35)$$

基于以上分析,基于随机滤波器结构的观测矩阵优化算法如下。

步骤 1 随机产生单位向量 \mathbf{h} ; 根据给定的发射波形 s_i 和任务参数、场景参数构造稀疏基 Ψ ; 根据滤波器参数构造移位矩阵 \mathbf{M}_x ($x \in [1, q]$); 构造矩阵 \mathbf{A} ; 设置迭代终止门限 ξ 。

步骤 2 根据 \mathbf{h} 构造测量矩阵 Φ ; 计算感知矩阵 $\mathbf{\Gamma}$; 由式(23)、式(27)分别计算 $\boldsymbol{\rho}$ 和 \mathbf{U} ; 计算向量 \mathbf{b} 。

步骤 3 由式(35)计算 \mathbf{h}_{LMS} , 做归一化处理:

$$\mathbf{h}_{\text{new}} = \frac{\mathbf{h}_{\text{LMS}}}{\|\mathbf{h}_{\text{LMS}}\|_2} \quad (36)$$

步骤 4 计算 $\Delta E = \|\mathbf{h}_{\text{new}} - \mathbf{h}\|_2$, 若 $\Delta E < \xi$, 则算法终止; 否则 $\mathbf{h} \leftarrow \mathbf{h}_{\text{new}}$, 重复步骤 2 和步骤 3。

在步骤 1 中 \mathbf{h} 可初始化为高斯分布的随机序列。不同的初始值最终得到的优化结果不同,但是具有相近的性能。 ξ 一般可设为 10^{-3} 或更小的值。

3.3 波形-测量矩阵联合优化

根据上述分析,影响 $\mathbf{\Gamma}$ 的有 Ψ 和 Φ 两个参数。显然,当波形和测量矩阵都成为待优化的变量时,优化变量更多,解空间更大,应当能够获得相比单独优化更好的效果。本节即介绍基于前述两种算法的波形-测量矩阵联合优化算法,算法流程如下:

步骤 1 随机产生初始波形 s_i , 滤波器系数单位向量 \mathbf{h} ; 根据滤波器参数构造移位矩阵 \mathbf{M}_x ; 构造矩阵 \mathbf{A} ; 设置迭代终止门限 ξ 。

步骤 2 根据式(19)计算矩阵 $\mathbf{\Omega}$ 。

步骤 3 对 $\mathbf{\Omega}$ 进行特征分解, s_{new} 取为最小特征值对应的特征向量。

步骤 4 根据 s_{new} 、任务参数和场景参数构造稀疏基 Ψ_{new} ; 根据 \mathbf{h} 和 \mathbf{M}_x 构造测量矩阵 Φ ;

构造矩阵 A 。

步骤 5 计算 Γ ; 由式(23)、式(27)和式(34)计算 ρ 、 U 和 b 。

步骤 6 由式(35)和式(36)计算 h_{LMS} , 做归一化处理。

步骤 7 根据 s_{new} 、 h_{new} 计算感知矩阵 Γ_{new} , 计算 $\Delta E = \|\Gamma_{new} - \Gamma\|_F$, 若 $\Delta E < \xi$, 则算法终止; 否则 $s_i \leftarrow s_{new}$ 、 $h \leftarrow h_{new}$, 重复步骤 2~步骤 6。

3.4 算法分析

本节中提出了发射波形、测量矩阵以及波形-测量矩阵联合优化的 3 种方法, 应该指出这 3 种方法都是基于循环算法(Cyclic Algorithm, CA)的局部优化方法。CA 算法首先由 Peter Stoica 等人提出, 并引入波形设计领域, 具有收敛速度快的特点。本节中提出的方法在计算机仿真过程中也验证了这一特点。但值得注意的是, 由于发射波形和测量矩阵优化过程中分别要求特征值分解和奇异值分解, 因此对运算平台的计算能力提出了较高的要求。在计算机仿真过程中, 对于小场景和低维观测场景来说, 本节中提出的方法是较为适合的; 对于某些大观测场景来说, 则必须考虑运算能力、运算实时性等问题。

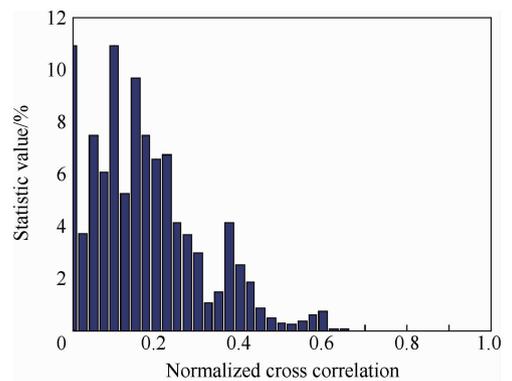
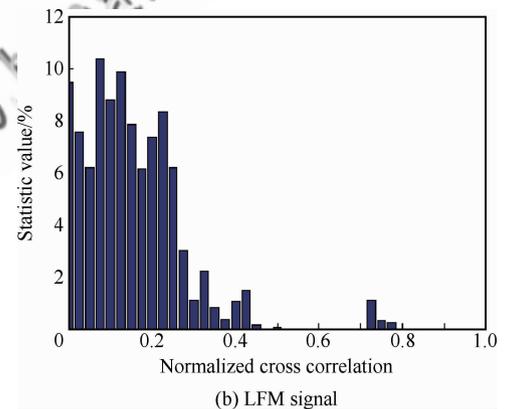
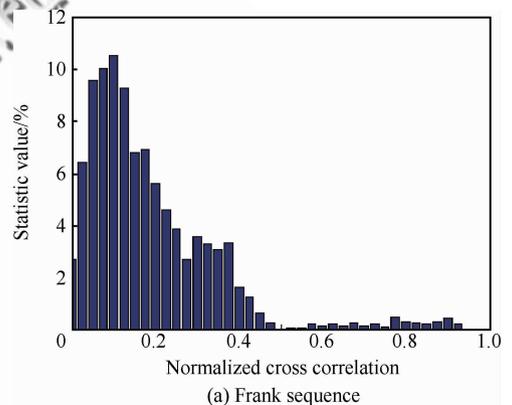
本节提出的 3 种算法中发射波形和测量矩阵优化算法是联合优化算法的基础, 在联合优化算法的单次迭代过程中分别实现了固定测量矩阵下的发射波形优化, 以及固定发射波形下的测量矩阵优化, 这种思路常用在多变量的优化问题中。由于联合优化算法实现了对发射波形和测量矩阵的同步优化, 变量自由度更高, 因此具有更好的优化性能。

4 仿真结果与分析

系统参数设置如下: 采样点数 $n = 80$, 多普勒分辨单元数 $m = 1$, 发射信号码长 $l = 19$; 测量矩阵采用滤波器结构, h 长度 $d = 40$, 观测矢量维数 $q = 40$, 下采样滤波器在 $2\Delta t$ 时刻开始工作, 每 $2\Delta t$ 采样 1 次 ($e = 2$)。为验证算法有效性, 证明经过优化后的感知矩阵具有比未经优化的感知矩阵更为良好的正交性, 将优化前后的感知矩阵各列间归一化互相关系数的绝对值以 0.025 为间隔进行统计, 给出统计直方图进行对比。

4.1 波形优化仿真

图 3 所示的是在给定测量矩阵 Φ 时, 各码型所对应的感知矩阵各列间归一化互相关系数绝对值的统计直方图。其中, 传统雷达信号中 Frank 码、线性调频信号、Alltop 序列对应的感知矩阵相关性起伏较大, 且都出现了较多的极大值, 会导致目标参数估计误差较大且系统的抗噪性能急剧下降, 非常不利于 CSR 的目标场景恢复。而经本文算法优化得到的波形对应的感知矩阵起伏较小, 因此感知矩阵具备更好的正交性, 能够提升噪声中稀疏场景恢复的精度, 并增大系统所能探测的目标个数上限。



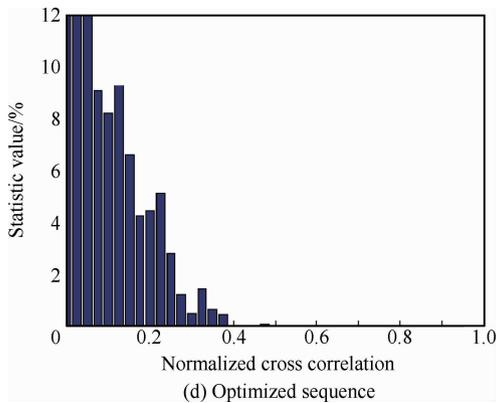
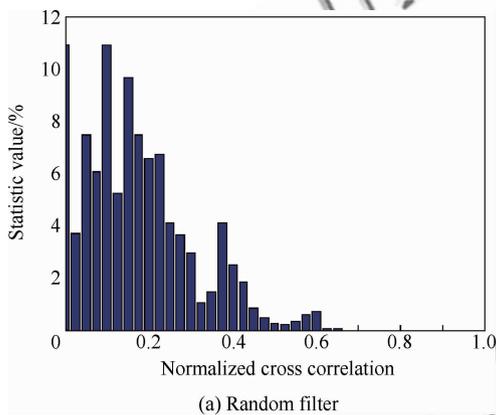


图3 感知矩阵归一化互相关系数绝对值统计直方图

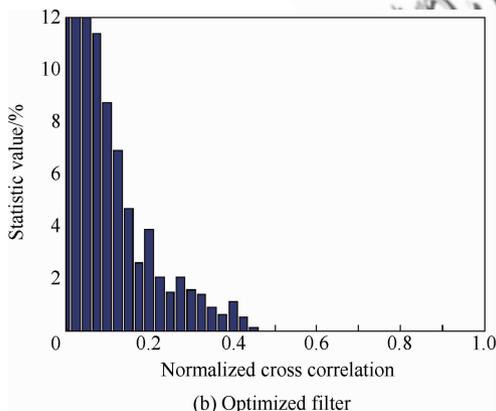
Fig. 3 Statistical histogram of the normalized cross correlation of the sensing matrix

4.2 测量矩阵优化仿真

图4所示的是在发射波形选为 Alltop 序列时,采用随机生成的滤波器和优化算法得到的滤波器所对应的感知矩阵归一化互相关系数绝对值



(a) Random filter



(b) Optimized filter

图4 采用 Alltop 序列时感知矩阵归一化互相关系数绝对值统计直方图

Fig. 4 Statistical histogram of the normalized cross correlation of the sensing matrix in Alltop sequence

的统计直方图。由仿真结果可见,测量矩阵优化算法的效果十分明显,感知矩阵各列间归一化互相关系数绝对值集中于小于 0.4 的区域,使测量矩阵不仅起到了降低数据量的作用,还能够在波形给定的情况下进一步提升系统性能。

4.3 联合优化仿真

相同的场景参数和任务信息下,不同的波形和测量矩阵组合所对应的感知矩阵相关性统计数据如表1所示。

表1 感知矩阵归一化互相关系数绝对值统计表
Table 1 Statistical table of the normalized cross correlation of the sensing matrix

Sequence	Random filter	Optimized filter
Frank	0.199 2/0.947 0	0.107 6/0.792 9
LFM	0.164 1/0.794 4	0.078 4/0.539 5
Alltop	0.173 1/0.785 5	0.106 0/0.463 3
Optimized waveform	0.107 0/0.494 4	0.080 0/0.341 1

可以看出,经过联合优化,波形和测量矩阵相互作用得到的感知矩阵各列间归一化互相关系数绝对值的平均值最小, μ_r 最小,达到了更好的效果。此外,本文提出的一系列算法虽然是以降低整体平均值为优化目标,但同时 μ_r 也明显降低。由此可见,图2所示的 CSR 感知矩阵优化系统框架能够为 CS 在雷达系统的应用提供最优的波形和测量矩阵,降低 CSR 在噪声中恢复场景的误差,提升恢复稳健性,提高系统可检测目标个数的上限。

4.4 RIP 验证

将式(6)重写为如下形式:

$$(1 - \gamma_k) \leq \alpha_0^H \Gamma_k^H \Gamma_k \alpha_0 \leq (1 + \gamma_k) \quad (37)$$

式中: $\alpha_0 = \alpha_k / \|\alpha_k\|_2$, α_k 为 k 维向量; Γ_k 为 Γ 中任意 k 个原子组成的子矩阵。验证感知矩阵是否满足 K-RIP 准则,需要枚举所有 $\Gamma_k^H \Gamma_k$ 的特征值是否介于 $(1 - \gamma_k)$ 和 $(1 + \gamma_k)$ 之间,运算量巨大。采用以下折中方案,即以 $\Gamma_k^H \Gamma_k$ 的最大/最小特征值的蒙特卡罗分布作为衡量标准,若 $\Gamma_k^H \Gamma_k$ 的最大/最小特征值分布中心越接近 1,发散程度越小,则感知矩阵性能越好。图5(a)给出的是目前较为常用的 Alltop 序列加随机滤波器所对应感

知矩阵的 RIP 验证图;图 5(b)给出的是联合优化后的感知矩阵所对应的蒙特卡罗实验结果,每个稀疏度 k 都进行了 6 000 次重复试验。由图 5(b)中可以看出,优化过后的感知矩阵最大/最小特征值更接近 1,且收敛程度明显优于未经优化的感知矩阵。从图 5(b)中还可看出,优化后的感知矩阵在 $k = 8$ 时最大/最小特征值仍在 $[0, 2]$ 之间,而图 5(a)中当 $k > 3$ 时就已超出了范围。证明通过优化系统的稀疏度上限得到了显著提高。

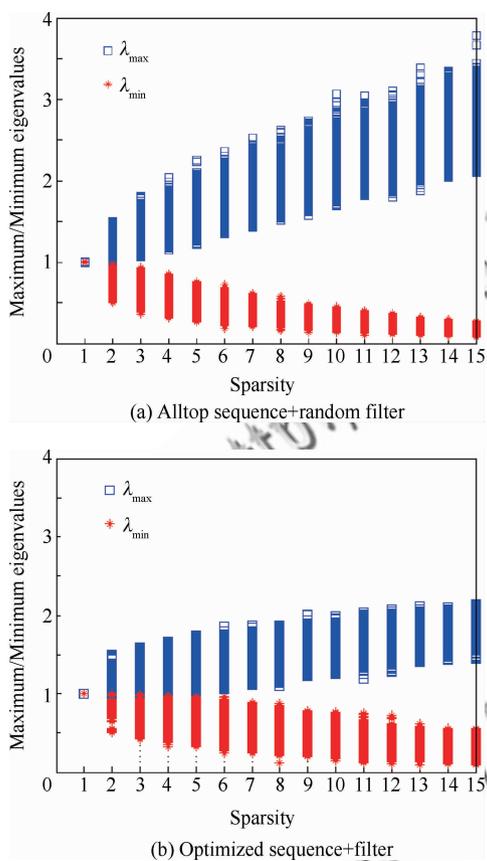


图 5 感知矩阵 RIP 验证图

Fig. 5 RIP verification for the sensing matrix

5 结论

本文提出了基于滤波器结构的 CSR 感知矩阵优化模型。根据场景参数和任务信息优化构造发射波形和测量矩阵,降低了感知矩阵的相关性,从而减小了目标信息的估计误差,提升了系统在噪声中恢复场景的精度,提高了可检测目标参数的上限,显著地提升了系统性能。此外,分别提出了发射波形优化算法、测量矩阵优化算法以及两

者的联合优化算法,能够有效降低感知矩阵相关性,证明本文提出的感知矩阵优化思想是可行且有效的。

参 考 文 献

- [1] Candes E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 21-30.
- [2] Baraniuk R, Steeghs P. Compressive radar imaging. *IEEE Radar Conference*, 2007: 128-133.
- [3] Candes E. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes Rendus Mathématique*, 2008, 346(9): 589-592.
- [4] Tropp J A. Greed is good; algorithmic results for sparse approximation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(10): 2231-2242.
- [5] Donoho D L, Elad M, Temlyakov V N. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(1): 6-18.
- [6] Ji S H, Xue Y, Carin L. Bayesian compressive sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(6): 2346-2356.
- [7] Duarte-Carvajalino J M, Sapiro G. Learning to sense sparse signals: simultaneous sensing matrix and sparsifying dictionary optimization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, 18(7): 1395-1408.
- [8] Abolghasemi V, Saideh F, Bahador M. On optimization of the measurement matrix for compressive sensing. *18th European Signal Processing Conference*, 2010: 23-27.
- [9] Zhang J D, Zhu D Y, Zhang G. Adaptive compressed sensing radar oriented towards cognitive detection in dynamic sparse target scene. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(4): 1718-1729.
- [10] Tropp J A, Wakin M B. Random filters for compressive sampling and reconstruction. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 2006: 872-875.
- [11] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Review*, 2001, 1(43): 129-159.
- [12] Candes E, Romberg J, Terence T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489-509.
- [13] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from partial information by orthogonal matching pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [14] Liu J Y, Zhu J B, Yan F X, et al. Design of remote sensing. © 航空学报编辑部 <http://hkxb.buaa.edu.cn>

ing imaging system based on compressive sensing. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(8): 1618-1623. (in Chinese)

刘吉英, 朱炬波, 严奉霞, 等. 基于压缩感知理论的稀疏遥感成像系统设计. *系统工程与电子技术*, 2010, 32(8): 1618-1623.

- [15] Peter S, Hao H, Jian L. New algorithms for designing unimodular sequences with good correlation properties. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, 17(3): 253-256.
- [16] Stoica P, Li J, Zhu X. Waveform synthesis for diversity-based transmit beampattern design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(6): 2593-2598.

作者简介:

张劲东 男, 博士, 讲师。主要研究方向: 雷达信号处理, 压缩感知理论。

Tel: 025-84892410

E-mail: zhangjd@nuaa.edu.cn

张弓 男, 博士, 教授, 博士生导师。主要研究方向: 新体制雷达, 雷达信号处理。

Tel: 025-84892410

E-mail: gzhang@nuaa.edu.cn

潘汇 男, 硕士研究生。主要研究方向: 压缩感知雷达。

Tel: 025-84892410

E-mail: panhui.com@gmail.com

贲德 男, 中国工程院院士, 南京航空航天大学电子信息工程学院院长, 教授, 博士生导师。主要研究方向: 雷达信号处理。

Optimized Sensing Matrix Design of Filter Structure Based Compressed Sensing Radar

ZHANG Jindong^{*}, ZHANG Gong, PAN Hui, BEN De

College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China

Abstract: The sparse scene recovery performance of a compressed sensing radar (CSR) requires that the cross correlations between the atoms of the sensing matrix be as small as possible. Based on this thought, a CSR optimal sensing matrix design system is proposed. According to the information of the radar system task and target scene, it can optimize the transmitted waveform and measurement matrix adaptively for the purpose of reducing the coherence of the sensing matrix to improve the system performance. The algorithms for optimizing the transmitted waveform and measurement matrix separately and jointly are presented. Simulation results demonstrate that the proposed methods can effectively improve scene recovery accuracy.

Key words: compressed sensing radar; sensing matrix optimization; waveform optimization; measurement matrix optimization; filter structure

Received: 2012-03-15; **Revised:** 2012-08-29; **Accepted:** 2012-12-10; **Published online:** 2013-01-05 11:23

URL: www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20130105.1123.001.html

Foundation items: National Natural Science Foundation of China (61071163, 61201367, 61071164, 61271327); Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK2012382); China Postdoctoral Science Foundation (20100481143); Jiangsu Planned Projects for Postdoctoral Research Funds (1109093C); Fundamental Research Funds for the Central Universities (NS2012020); A Project Funded by the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions

^{*} **Corresponding author.** Tel.: 025-84892410 E-mail: zhangjd@nuaa.edu.cn