

# 基于 FRFT 的雷达信号 chirp 基稀疏特征提取及分选

黄宇, 刘锋\*, 王泽众, 向崇文

海军航空工程学院 电子信息工程系, 山东 烟台 264001

**摘要:** 特征分析是雷达信号分选识别的基础, 利用稀疏分解思想对新体制雷达信号进行特征提取是一个新的研究方向。本文以分数阶 Fourier 变换的核函数作为稀疏分解的 chirp 基函数, 将具有相近特征参数的 chirp 基函数构成基函数族用于稀疏分量提取, 推导了在分数阶 Fourier 域基于匹配跟踪的 chirp 基函数族稀疏分解公式, 然后利用 chirp 基稀疏分量的调频率和初始频率构成特征参数序列, 将雷达信号脉冲分成 5 大类进行分选和识别, 仿真分析验证了推导结果的有效性。结果表明对于具有线性或曲线时频特征的雷达信号在信噪比为 -3 dB, 采样频率为 500 MHz, 观测时间为 2  $\mu$ s, 调频率不超过 100 MHz/ $\mu$ s 时, 仍然具有 95% 的正确分选概率。

**关键词:** 分数阶 Fourier 变换; 稀疏分解; 信号分选; chirp 基; 特征提取

中图分类号: V433+.2; TN971; TN974 文献标识码: A 文章编号: 1000-6893(2013)02-0393-08

雷达信号从传统的频率和时间调制发展到时频联合调制, 已经不能简单地利用频域或时域参数全面描述其特征, 尤其是复杂调制雷达信号, 例如线性调频、非线性调频和相位编码等, 对这类信号的分选识别已经成为热点和难点问题<sup>[1]</sup>。目前, 对雷达信号的时频特征分析出现了许多方法, 并取得了不少成果, 但是这些方法都具有较大的局限性, 特别是在非合作条件下对多种类型的雷达信号的分选识别问题仍然没有得到很好解决<sup>[2]</sup>。

信号的稀疏分解(SD)是近年来的研究热点, 它在超完备库上根据信号本身的特点, 自适应地选择基函数对信号进行投影分解, 得到信号的稀疏表示<sup>[3-6]</sup>。雷达信号的时频特征具有很强的规律性, 绝大部分雷达信号的时频特征以线性或曲线形式存在。由于 chirp 信号在时频面上的能量

聚集为一条直线, 如果以 chirp 信号作为基函数, 对于具有时频曲线特征的雷达信号, 可以利用稀疏分解的思想将信号分解成能量最大的 chirp 基函数线性组合<sup>[7-8]</sup>, 根据稀疏分解得到的参数特征实现信号的分选识别。

目前, 采用 chirplet 字典作为超完备库的稀疏分解算法<sup>[9-11]</sup>虽然可以将信号分解成 chirplet 函数的线性组合, 得到信号的 chirp 基特征, 但是字典维数较大, 稀疏分量存在 4 个变量参数, 计算量大。而分数阶 Fourier 变换(FRFT), 可以很好的提取雷达信号的 chirp 基函数特征, 运算速度快, 检测概率和参数估计精度高, 但由于是对信号的 chirp 基正交分解, 具有大量的基函数冗余<sup>[12]</sup>。

本文结合 FRFT 和稀疏分解思想, 取长补短, 以 FRFT 的核函数作为稀疏分解基函数, 利用具有相近特征参数的 chirp 基构成基函数族,

收稿日期: 2012-02-24; 退修日期: 2012-04-13; 录用日期: 2012-07-26; 网络出版时间: 2012-08-28 11:16

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20120828.1116.003.html

基金项目: 国家自然科学基金(60902054); 中国博士后科学基金(20090460114, 201003758)

\* 通讯作者. Tel.: 0535-6635821 E-mail: fengliuhy@163.com

引用格式: Huang Y, Liu F, Wang Z Z, et al. Chirp function sparse feature extraction and sorting of radar signals based on FRFT. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 34(2): 393-400. 黄宇, 刘锋, 王泽众, 等. 基于 FRFT 的雷达信号 chirp 基稀疏特征提取及分选. 航空学报, 2013, 34(2): 393-400.

采用基函数族进行信号分解和分量提取,推导了在分数阶 Fourier 域(FRFD)中的稀疏分解公式。基于 FRFT 的稀疏分解将 chirp 基的调频率和初始频率参数分别转化为分数阶旋转角和分数阶 Fourier 域值,采用 FRFT 快速算法进行计算,提高了分解效率。最后,依据 chirp 基稀疏分量特征将雷达信号脉冲分为 5 大类,并在此基础上提出了一种雷达信号分选方法。仿真结果表明,在低信噪比条件下对于具有线性或曲线时频特征的雷达信号仍然具有较高的正确分选概率。

## 1 分数阶 Fourier 变换

FRFT 的定义<sup>[12]</sup>为

$$X_a(u) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K_a(t, u) dt \quad (1)$$

式中:  $\alpha$  为 FRFT 的旋转角;  $u$  为 FRFT 的域值;  $x(t)$  为连续函数;  $t$  为积分变量。设  $m \in \mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}$  为整数域,  $\delta(t)$  为单位冲激函数,则核函数为

$$K_a(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} e^{j\frac{t^2+u^2}{2} \cot \alpha - jtu \csc \alpha} & \alpha \neq m\pi \\ \delta(t - u) & \alpha = 2m\pi \\ \delta(t + u) & \alpha = (2m + 1)\pi \end{cases}$$

FRFT 算子  $F$  具有如下性质:

1) 与常规 Fourier 变换的一致性,  $F^{\pi/2}$  等价于 Fourier 变换。

2) 旋转可加性,即  $F^a F^b = F^{a+b}$ 。

3) 旋转  $2\pi$  周期性,即  $F^{2\pi} = F^0 = I$ 。

4) 线性,即  $F^p \left[ \sum_n c_n x_n(t) \right] = \sum_n c_n [F^p x_n(t)]$ 。

5) Parseval 关系,即

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \langle F^p x(t), F^p y(t) \rangle。$$

其中:  $a, b, c_n \in \mathbf{R}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\mathbf{R}$  为实数域;  $p$  为 FRFT 的阶数,  $p = 2\alpha/\pi$ ;  $I$  为恒等算子;  $\langle x(t), y(t) \rangle$  为函数  $x(t)$  和  $y(t)$  的内积。

将式(1)写成内积形式为

$$X_a(u) = \langle x(t), \overline{K_a(t, u)} \rangle。$$

式中:  $\bar{\cdot}$  表示共轭复数。若只考虑  $\alpha \neq n\pi$  的情况,核函数可以表示为

$$K_a(t, u) = \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} e^{j\frac{t^2+u^2}{2} \cot \alpha} e^{-j(ut \csc \alpha - \frac{1}{2}t^2 \cot \alpha)} = A_a(u) e^{-jut \csc \alpha + j\frac{1}{2}t^2 \cot \alpha}$$

式中:  $A_a(u) = \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} e^{j\frac{1}{2}u^2 \cot \alpha}$  为 FRFD 的幅频特征函数。在相位函数中定义初始频率  $f$  和调频率  $\mu$  分别为

$$\begin{cases} f = u \csc \alpha \\ \mu = -\cot \alpha \end{cases} \quad (2)$$

因此 FRFT 其实是对信号的 chirp 基分解,将 chirp 基函数中的调频率和初始频率进行变量替换,换成分数阶旋转角  $\alpha$  和在 FRFD 中对应的  $u$  值。chirp 基函数中只包含了调频率和初始频率 2 个自由度。

## 2 Chirp 基稀疏分解

在  $L^2[a, b]$  平方可积函数空间中,定义内积  $\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt$ ,  $\overline{y(t)}$  为函数  $y(t)$  的共轭复数,范数  $\|x\|_2 = \left( \int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ 。

若以 FRFT 的核函数  $K_a(t, u)$  作为 chirp 基函数,并组成 Hilbert 空间中的超完备字典集  $G = \{g_{a,u}(t) \mid g_{a,u}(t) = \overline{K_a(t, u)}\}$ ,定义  $R^n$  为  $n$  阶递推算子,利用稀疏分解匹配跟踪思想<sup>[13]</sup>,则有

$$\begin{cases} R^1 x = R^0 x - \langle R^0 x, g_{a_1, u_1}(t) \rangle g_{a_1, u_1}(t) \\ R^0 x = x \end{cases}$$

在超完备字典集  $G = \{g_{a,u}(t)\}$  中,使得

$$|\langle R^0 x, g_{a_1, u_1}(t) \rangle| = \sup_{\alpha \notin m\pi, u \in \mathbf{R}} |\langle R^0 x, g_{a,u}(t) \rangle| \quad (3)$$

假设  $s_n(t)$  为第  $n$  个分解出来的信号分量,则稀疏分解的递推公式为

$$s_n(t) = \langle R^{n-1} x, g_{a_n, u_n}(t) \rangle g_{a_n, u_n}(t) \quad (4)$$

$$R^n x = R^{n-1} x - s_n(t) \quad (5)$$

式中:  $R^n x$  为函数  $x(t)$  进行第  $n$  次递推后的剩余信号;  $g_{a_n, u_n}(t)$  为在第  $n$  次递推时  $R^{n-1} x$  具有最大能量投影的 chirp 基函数。

具有  $N$  个稀疏分量的信号可稀疏表示为

$$x(t) = \sum_{n=0}^N \langle R^n x, g_{a_n, u_n}(t) \rangle g_{a_n, u_n}(t) + R^{N+1} x = \sum_{n=0}^N s_n(t) + R^{N+1} x \quad (6)$$

因此,信号可以递推分解成  $N$  个 chirp 函数的线性组合。式(4)和式(5)保证了稀疏分解信号

分量的正交性,对式(6)两边取范数有

$$\|x(t)\|_2 = \left\| \sum_{n=0}^N s_n(t) + R^{N+1}x \right\|_2 = \sum_{n=0}^N \|s_n(t)\|_2 + \|R^{N+1}x\|_2 \quad (7)$$

稀疏分解实际上是利用能量检测的方法,将信号在基函数上的投影或分解系数从大到小依次提取出来。如果把提取出来的基函数按先后顺序构成序列  $\{g_{\alpha_n, u_n}(t)\}$ ,  $\alpha_n$  和  $u_n$  为第  $n$  个信号分量参数,那么这个序列就可以作为雷达信号的特征表示。又由于每个 chirp 基函数都由参数  $(\alpha_n, u_n)$  决定,信号的特征序列可以表示成 chirp 基函数的参数对形式  $\{(\alpha_n, u_n)\}$ 。这里采用的 chirp 基函数具有 2 个参数变量,利用式(3)进行计算时,每次迭代都需要进行二维搜索。为了更好地描述信号的特征,需要的迭代次数也很多,而不像其他信号的分解方法,只需要一次计算就可以得到信号在一组基函数上的系数分量。

利用稀疏分解的思想,其实是希望用很少的基函数来表征信号的特征。然而在得到的参数序列  $\{(\alpha_n, u_n)\}$  中,会出现很多相近的参数,可以解释为信号对某一类基函数具有很强的相似性。对这类基函数进行稀疏分解时,实际上是进行了重复计算,如果能一次对一类基函数进行分解提取,就可以较大地减少计算量,而且对信号的特征提取也不会有太大影响。因此,可以将参数在  $[\alpha_n - \Delta\alpha, \alpha_n + \Delta\alpha]$  和  $[u_n - \Delta u, u_n + \Delta u]$  内的基函数构成基函数族,并用  $(\alpha_n, u_n)$  表示其特征,此时式(4)改为如下形式

$$s_n(t) = \int_{u_n - \Delta u}^{u_n + \Delta u} \int_{\alpha_n - \Delta\alpha}^{\alpha_n + \Delta\alpha} \langle R^{n-1}x, g_{\alpha, u}(t) \rangle g_{\alpha, u}(t) d\alpha du \quad (8)$$

式中:  $\{(\alpha_n, u_n)\} = \sup_{\alpha \in m\pi, u \in \mathbf{R}} |\langle R^{n-1}x, g_{\alpha, u}(t) \rangle|$ 。

式(8)表示第  $n$  个稀疏分量是信号  $R^n x$  的 chirp 基投影在具有最大投影系数的 chirp 基函数  $g_{\alpha_n, u_n}(t)$  附近对参数  $\alpha$  和  $u$  积分后所得,积分区间分别为  $[\alpha_n - \Delta\alpha, \alpha_n + \Delta\alpha]$  和  $[u_n - \Delta u, u_n + \Delta u]$ ,  $\Delta u$  和  $\Delta\alpha$  为基函数族的参数范围。因此,利用式(8)可以得到信号在一组具有相似参数基函数族上的投影分量,减少分解的迭代次数,提高稀疏分解的效率。通过上述稀疏分解,信号被分解成多个近似 chirp 信号分量的线性组合,信号

特征表示为 chirp 信号分量的参数序列  $\{(\alpha_n, u_n)\}$ 。下面讨论如何采用 FRFT 对式(8)进行求解。

### 3 基于 FRFT 的 chirp 基函数族稀疏分解

式(2)表明 chirp 基的调频率和初始频率参数由 FRFT 的旋转角  $\alpha$  和  $u$  值决定,根据 FRFT 的性质可以确定参数的范围<sup>[12]</sup>为

$$\alpha \in [0, \pi], u \in [-\sqrt{f_{\max} T/2}, \sqrt{f_{\max} T/2}]$$

式中:  $f_{\max}$  为雷达信号的最高频率;  $T$  为脉冲持续时间(数字信号处理中可以用采样频率和采样时间代替)。此时,保证了雷达信号参数的范围为调频率  $\mu \in (-\infty, +\infty)$ , 初始频率  $f \in [f_{\min}, f_{\max}]$ 。

FRFT 实际上是在平面  $P(\alpha, u)$  内对信号进行分解,确定  $\Delta\alpha$  和  $\Delta u$ , 相当于确定平面  $P(\alpha, u)$  的分辨率以及超完备字典集  $G$  的原子数,大大减少了计算量。假设原子总数为  $J \times K$ , 超完备字典集  $G$  可表示为矩阵形式:

$$G = \begin{bmatrix} g_{a_1, u_1}(t) & g_{a_1, u_2}(t) & \cdots & g_{a_1, u_K}(t) \\ g_{a_2, u_1}(t) & g_{a_2, u_2}(t) & \cdots & g_{a_2, u_K}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{a_J, u_1}(t) & g_{a_J, u_2}(t) & \cdots & g_{a_J, u_K}(t) \end{bmatrix}$$

稀疏分解的实质是将平面  $P(\alpha, u)$  划分成  $J \times K$  个栅格构成超完备字典集  $G$ , 确定存在信号最大投影的栅格。

取矩阵  $G$  中的任意原子  $g_{a_j, u_k}(t)$ ,  $1 \leq j \leq J$ ,  $1 \leq k \leq K$ 。当  $\Delta u \rightarrow 0$  时, 设  $g_{a_j}(t, u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} g_{a_j, u_k}(t)$ , 则信号  $R^n x$  和  $g_{a_j}(t, u)$  的内积可表示为

$$\langle R^n x, g_{a_j}(t, u) \rangle = \langle R^n x, \overline{K_{a_j}(t, u)} \rangle = F^p(R^n x) = X_{a_j}^n(u) \quad (9)$$

式(9)表明 FRFT 和稀疏分解完备字典集  $G$  之间的关系, FRFT 实际上是信号在一组  $\alpha_j$  为定值的 chirp 基函数的投影。因此,在分辨率为  $(\Delta\alpha, \Delta u)$  的情况下,利用 FRFT 可以得到信号在平面  $P(\alpha, u)$  上的投影系数,即信号的能量分布。参数  $(\alpha_n, u_n)$  可以利用 FRFT 对平面  $P(\alpha, u)$  进行能量峰值搜索得到,即

$$\{(\alpha_n, u_n)\} = \sup_{\alpha \in m\pi, u \in \mathbf{R}} | [R^n x, g_{\alpha, u}(t)] |^2 = \arg \max_{\alpha, u} | X_{\alpha}^n(u) |^2 \quad (10)$$

式中:  $\arg \max(\cdot)$  表示取对应最大值的参数值。

式(10)将对信号最大 chirp 基分解系数的求解,转化为对信号在 FRFD 中的最大能量峰值求解,结合能量峰值对应的坐标参数  $(\alpha, u)$  和式(2)可以求得 chirp 基的特征参数。采用 FRFT 的核函数作为稀疏分解基函数,可以利用 FRFT 快速算法进行计算。此时,基于 FRFT 快速算法的计算复杂度为  $O(JK \lg K)$  [14],直接计算的复杂度为  $O(JK^2)$ 。

根据式(8)计算信号稀疏分量  $s_n(t)$  时,需要计算 2 重积分,在实际应用中为了简化计算,可以采用  $\Delta\alpha$  为步长对  $\alpha$  进行取值,将 2 重积分化为 1 重积分。此时式(8)可化为

$$s_n(t) = \int_{u_n - \Delta u}^{u_n + \Delta u} \langle R^{n-1} x, g_{\alpha_n}(u, t) \rangle g_{\alpha_n}(u, t) du \quad (11)$$

式(11)将参数  $\alpha$  作为定值,对  $u$  在点  $u_n$  附近进行积分,此时稀疏信号分量  $s_n(t)$  可表示为一组具有相同调频率和相近初始频率的 chirp 基函数的线性组合。利用 FRFT 进行计算,将式(9)代入式(11)可得

$$s_n(t) = \int_{u_n - \Delta u}^{u_n + \Delta u} \langle R^{n-1} x, g_{\alpha_n}(u, t) \rangle g_{\alpha_n}(u, t) du = \int_{u_n - \Delta u}^{u_n + \Delta u} X_{\alpha_n}^{n-1}(u) g_{\alpha_n}(u, t) du = \int H_{\alpha_n}^n(u - u_n) X_{\alpha_n}^{n-1}(u) g_{\alpha_n}(u, t) du$$

继续用式(9)和 FRFT 的性质 2) 旋转可加性,上式化为

$$s_n(t) = \langle H_{\alpha_n}^n(u - u_n) X_{\alpha_n}^{n-1}(u), \overline{g_{\alpha_n}(u, t)} \rangle = F^{-p_n} [H_{\alpha_n}^n(u - u_n) X_{\alpha_n}^{n-1}(u)] = F^{-p_n} [H_{\alpha_n}^n(u - u_n) F^{p_n}(R^{n-1} x)] \quad (12)$$

式中:  $H_{\alpha_n}^n(u - u_n)$  为在阶数为  $p_n$  时 FRFD 的矩形窗函数,

$$H_{\alpha_n}^n(u - u_n) = \begin{cases} 1 & u \leq |u_n \pm \Delta u| \\ 0 & u > |u_n \pm \Delta u| \end{cases}$$

式(12)表明,特征参数为  $(u_n, p_n)$  的 chirp 基稀疏分量  $s_n(t)$  可以对  $n$  阶剩余信号  $R^n x$  先进行  $p_n$  阶 FRFT,然后在 FRFD 点  $u_n$  处窄带滤波,最后进行  $p_n$  阶反 FRFT 后获得。

将式(12)代入递推式(5)得

$$R^n x = R^{n-1} x - s_n(t) = F^{-p_n} [F^{p_n}(R^{n-1} x)] - F^{-p_n} [H_{\alpha_n}^n(u - u_n) F^{p_n}(R^{n-1} x)] = F^{-p_n} \{ [I - H_{\alpha_n}^n(u - u_n)] F^{p_n}(R^{n-1} x) \} \quad (13)$$

式(13)表明,对于剩余分量  $R^n x$  可以在时域利用  $R^{n-1} x$  减去第  $n$  个稀疏分量  $s_n(t)$  求得,或者在  $p_n$  阶 FRFD,利用函数  $I - H_{\alpha_n}^n(u - u_n)$  对  $R^{n-1} x$  的  $p_n$  阶 FRFT 滤波后,再进行  $p_n$  阶反 FRFT 获得。

根据式(12)、式(13)、FRFT 的性质 2) 和 5),有

$$\begin{aligned} \langle R^n x, s_n(t) \rangle &= \langle F^{-p_n} \{ [I - H_{\alpha_n}^n(u - u_n)] \cdot F^{p_n}(R^{n-1} x) \}, F^{-p_n} [H_{\alpha_n}^n(u - u_n) F^{p_n}(R^{n-1} x)] \rangle = \\ &= \langle [I - H_{\alpha_n}^n(u - u_n)] F^{p_n}(R^{n-1} x), H_{\alpha_n}^n(u - u_n) F^{p_n}(R^{n-1} x) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

式(10)~式(14)表明,利用 FRFT 变换可以在 FRFD 对信号进行 chirp 基函数族的稀疏分量提取,并且不改变信号分量  $s_n(t)$  和剩余分量  $R^n x$  的正交性,期间需要进行 FRFT 的正反变换和 FRFD 的滤波,具体算法如下:

- 1) 寻找  $\max \{ |F^{p_n}(R^{n-1} x)|^2 \} > D$  在平面  $P(\alpha, u)$  上对应的  $(\alpha_n, u_n)$ ,  $D$  为阈值。
- 2) 构造矩形窗函数  $H_{\alpha_n}^n(u - u_n)$ , 计算  $H_{\alpha_n}^n(u - u_n) X_{\alpha_n}^{n-1}(u)$ 。
- 3) 计算  $s_n(t) = F^{-p_n} [H_{\alpha_n}^n(u - u_n) X_{\alpha_n}^{n-1}(u)]$ 。
- 4) 更新  $R^n x = R^{n-1} x - s_n(t)$ , 重复上述步骤直到提取出所有稀疏分量。

#### 4 基于 chirp 基稀疏特征的雷达信号分选

利用 FRFT 对雷达信号脉冲进行 chirp 基稀疏分解,可以得到表示信号特征的有限序列  $\{(\mu_n, f_n)\}$ , 其中  $\mu_n$  为第  $n$  个 chirp 信号分量的调频率,  $f_n$  为初始频率。虽然并不能得到信号的具体参数,但是不同雷达信号调制类型在 chirp 基稀疏分解条件下的特征参数不同,利用提取出来的稀疏成分  $n$  阶参数序列,可以实现雷达信号的分选(分类),通过进一步分析还可以实现雷达调制类型的初步识别。按照不同雷达信号的 chirp 基稀疏分解特征,即调频率和初始频率的不同取值组合,可以将具有时频线特征的典型雷达信号分为 5 大类,每种类型的判决条件和部分典型信号如表 1 所示。

**实验 1** 对雷达信号脉冲进行 chirp 基特征提取。雷达信号模型为  $s(t) = \exp(j2\pi t f(t))$ ,  $f(t)$  为信号调频函数。5 个仿真信号分别取自按 chirp 基分类后的 5 类信号,依次为:单载频(第 I

类),  $f(t) = 150 \text{ MHz}$ ,  $t \in [0, 2] \mu\text{s}$ ; 频率编码 (第 II 类),  $f(t)$  分别取 50, 125, 75, 200 MHz, 对应时间  $t$  分别为  $[0, 0.25)$ ,  $[0.25, 1)$ ,  $[1, 1.5)$ ,  $[1.5, 2] \mu\text{s}$ ; LFM 信号 (第 III 类),  $f(t) = 100 + 75t \text{ MHz}$ ,  $t \in [0, 1] \mu\text{s}$ ; Frank 码 (第 IV 类), 中心频率 200 MHz, 取 8 相位 4 码组,  $t \in [0, 2] \mu\text{s}$ ; 二次调频 (第 V 类):  $f(t) = 100 + 100t^2 \text{ MHz}$ ,  $t \in [-1, 1] \mu\text{s}$ 。采样频率 500 MHz, 搜索步长取  $\Delta p = 0.05$ ,  $\Delta u$  取信号数据长度的 5%, 阈值  $D$  取第 1 次迭代所得 chirp 基稀疏成分能量的 40%。

不同雷达信号稀疏分解后的 chirp 基特征参数见表 2, 利用较少的迭代次数就可以提取出信号的 chirp 基特征参数, 并得到部分信号类型的特征参数, 例如频率编码, LFM 等, 这证明了上述

理论推导的有效性和信号分类的合理性。因此, 如果雷达信号的时频特征具有线性或曲线性质, 利用稀疏分解后的 chirp 基特征参数, 就可以对其进行初分选。另外, 从表 2 可以得出, 在算法阈值确定的情况下, 信号的调频率和初始频率决定了提取出的 chirp 基函数族个数。例如对于调频率为零的单载频和频率编码信号, 由于频率编码信号具有多个初始频率(频点), 因此提取出的基函数族比单载频信号要多; 对于调频率不为零的 LFM 和 Frank 码信号, 由于 LFM 信号的初始频率和调频率均唯一, 只能提取出 1 个函数族, 而 Frank 码信号近似由调频率相同但初始频率不同的 2 个 LFM 信号组成, 能够提取出 2 个函数族; 对于调频率随着时间不断变化的二次调频信号, 则会提取出多个。

表 1 基于 chirp 基特征参数的雷达信号调制类型分类

Table 1 Radar signal modulation classification based on chirp function characteristic parameters

Items	Type I	Type II	Type III	Type IV	Type V (NLFM signal)	
chirp-ratio	0	0	$\neq 0$ , Unique	$\neq 0$ , Unique	$\neq 0$ , Non-unique	$\neq 0$ , Non-unique
Initial frequency	Unique	Non-unique	Unique	Non-unique	Unique	Non-unique
Typical radar signal modulation type	Constant FM; BPSK	FSK; Frequency code	LFM; P3 code; P4 code	Frank code; P1 code; P2 code	V-shaped FM	Polynomial FM; Cosine FM

表 2 雷达信号的 chirp 基特征参数

Table 2 Chirp function characteristic parameters of radar signals

Signal modulation type	$p_n$			$u_n$			$\mu_n / (\text{MHz} \cdot \mu^{-1} \cdot \text{s}^{-1})$			$f_n / \text{MHz}$		
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
Constant FM	1.00			401			0			150.00		
Frequency code	1.00	1.00	1.00	751	901	651	0	0	0	125.38	200.45	75.33
LFM	1.14			458			74.51			56.02		
Frank code	1.05	1.05		668	730		25.75	25.75		187.10	227.80	
Quadratic FM	0.73	1.34		628	582		-112.88	147.85		69.67	47.05	

实验 2 分析雷达信号脉冲在加性高斯白噪声背景下, 采用 chirp 基特征参数进行分类(分选)的性能。仿真信号同实验 1, 每个信号在不同信噪比下进行 Monte-Carlo 仿真  $N=1000$  次, 信噪比 SNR 依次取 -13, -10, -7, -3, 0, 3, 7, 10 dB, 按表 1 的分类方法对信号类型进行分类。假设信噪比为  $j$  时, 第  $i$  个信号被正确分类的个数为  $n_{i,j}$ , 被错误分选为第  $k$  类的个数为  $m_{i,j}$ ,  $N_i$  为信号总数,  $N_k$  为类型总数, 则

正确分选概率为

$$p_{i,j} = n_{i,j} / N$$

总正确分选概率为

$$P_j = \sum_{i=1}^{N_i} p_{i,j} = \sum_{i=1}^{N_i} n_{i,j} / N$$

错误分选为第  $k$  类的概率(虚警概率)为

$$q_{k,j} = \sum_{i=1}^{N_i} m_{i,j} / N$$

总错误分选概率为

$$Q_j = \sum_{k=1}^{N_k} q_{k,j} = \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{i=1}^{N_i} m_{i,j} / N = 1 - P_j$$

如图 1 所示, ①在低信噪比条件下, 对不同类型的雷达信号进行初分选仍然具有很高的正确分选(分类)概率, 在  $-3$  dB 时达到 95% 以上。这是因为信号在时频面上具有很强的能量聚集性, 呈现出线性或曲线时频特征, 可以用 chirp 基进行线性组合表示, 而 FRFT 可以较好的检测出 chirp 基成分。②在相同信噪比下, LFM 比单载频信号的正确分选概率要低, 这是受 LFM 信号调频率的估计误差和观测时间较短的影响, 降低搜索步长  $\Delta p$  并增加观测时长可以解决这个问题。由于对 NLFM 的判别条件是最宽泛的, 二次调频在低信噪比下仍然具有较高的正确分选概率。③在相同的观测时间和采样频率条件下, 频率编码比单载频信号在相同信噪比下的正确分选概率要低, 这说明信号的函数族越多, 在 FRFD 的能量聚集性越差(对 chirp 基的匹配性越差), 在噪声背景下对 chirp 基的能量检测误差也会越大, 因此信号的正确分选概率反而会降低。然而对于 LFM 和 Frank 码信号, 虽然 Frank 码具有 2 个 chirp 基函数族(见表 2), 但是 Frank 码的观测时间(采样点数)是 LFM 信号的 2 倍, 每个 chirp 基函数族的稀疏分量和 LFM 信号相当, 因此具有相近的正确分选概率。

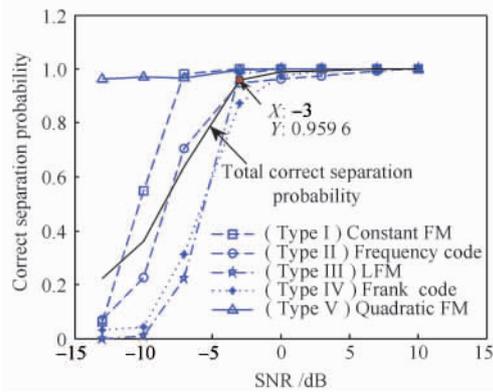


图 1 不同信噪比下的正确分选概率

Fig. 1 Correct separation probability of different SNRs

如图 2 所示, 随着信噪比降低, 信号被错误分选为第 V 类 NLFM 信号的概率增加, 基本和总错误分选概率相当, 而第 I ~ IV 类错误分选概率却

较小且比较稳定。这是因为随着噪声的增强, 使信号出现了新的 chirp 基稀疏分解成分, 错误分选主要是将第 I ~ IV 类信号分选为第 V 类 NLFM 信号。图 1 和图 2 说明, 在低信噪比下对第 I ~ IV 类信号分选具有很高的正确分选概率和较低且稳定的错误分选概率, 利用这点可以设计具有恒虚警概率的信号分类器。

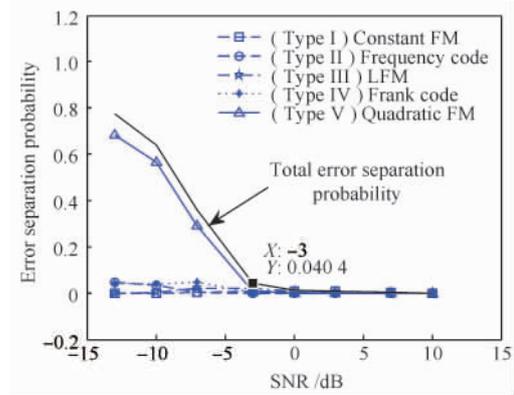


图 2 不同信噪比下的错误分选概率

Fig. 2 False separation probability of different SNRs

实验 3 比较采用 chirp 基函数和 chirp 基函数族进行稀疏分解的分解效率。仿真信号采用二次调频  $f(t) = 100 + 100t^2$  MHz,  $t \in [-1, 1]$   $\mu$ s, 其他条件同实验 1。利用文献[9]中的算法对信号进行 chirp 基函数稀疏分解。剩余分量的能量系数定义为  $r_n = \|R^n x\|_2 / \|x\|_2$ , 如图 3 所示。2 种方法所得稀疏分量的伪 Wigner-Ville 分布(PWVD)线性组合分别如图 4 和图 5 所示。

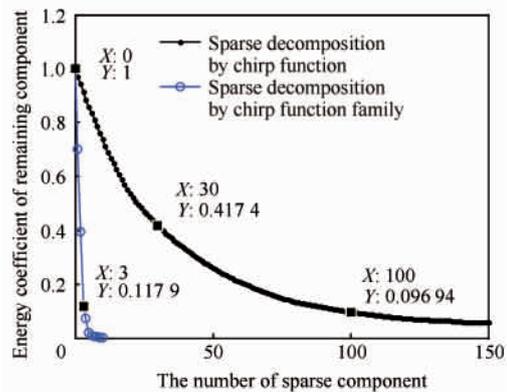


图 3 剩余分量的能量系数

Fig. 3 Energy coefficient of remaining component

从图 3 可以看出,基于 chirp 基函数族的稀疏分解算法经过 3 次迭代计算后,信号的剩余分量能量系数为 0.117 9,而基于单个 chirp 基的稀疏分解算法达到同样的效果需要迭代约 100 次。因此,在分解效率上,基于 chirp 基函数族的稀疏分解算法具有明显优势,收敛速度更快。

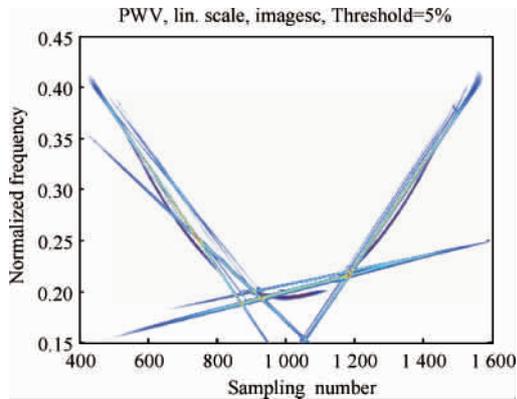


图 4 Chirp 基稀疏分量的 PWVD 线性组合

Fig 4 Linear combination of chirp function sparse components' Pseudo Wigner-Ville distribution

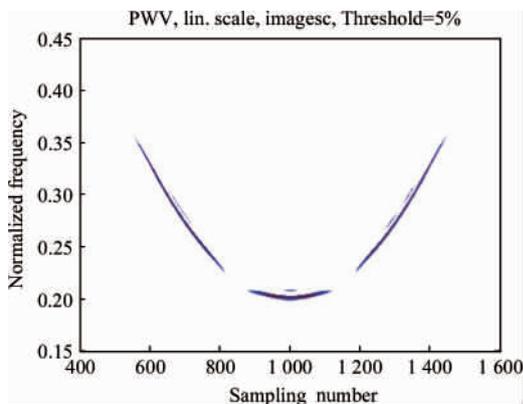


图 5 Chirp 基函数族稀疏分量的 PWVD 线性组合

Fig 5 Linear combination of chirp function family sparse components' Pseudo Wigner-Ville distribution

比较图 4 和图 5 不难发现,不同方法所得稀疏分量的 PWVD 线性组合具有明显差异,基于 chirp 基函数族的稀疏分解能更好的反映出信号的时频特征,这是因为 chirp 基缺少时延和时宽 2 个参数,导致基于单个 chirp 基的稀疏分量丢失了部分时频信息,而基于 chirp 基函数族的稀疏分解在提取时进行了窄带滤波,同时提取具有相近参数的 chirp 基函数,保留了由于采用单个 chirp 基提取时丢失的信息。

## 5 结 论

1) 利用 FRFT 和基函数族的思想对信号进行 chirp 基稀疏成分提取,减少了基函数字典集的原子数,减少了分解迭代次数,提高了分解效率。

2) 采用信号的 chirp 基稀疏分解特征参数,将雷达信号分为 5 大类,可以有效地对具有线性或曲线时频特征的雷达信号进行初步分类识别,并且在低信噪比下仍然具有较高的正确分选概率和较低的错误分选概率,为后续雷达侦察信号处理中按信号类型进行分类处理奠定了基础。

3) 雷达信号的 chirp 基稀疏分解特征除调频率和初始频率之外,还包括分解系数等,当信号时频特征不明显时,如何综合利用这些特征进行分选识别,还需要进一步的探讨研究。

## 参 考 文 献

- [1] Pace P E. Detecting and classifying low probability of intercept radar. 2nd ed. Norwood: Artech House, 2009: 31-37.
- [2] Si X C, Chai J F. Feature extraction and auto-sorting to envelope function of rotation angle  $\alpha$  domain of radar signals based on FRFT. Journal of Electronics & Information Technology, 2009, 31(8): 1892-1897. (in Chinese) 司锡才, 柴娟芳. 基于 FRFT 的  $\alpha$  域-包络曲线的雷达信号特征提取及自动分类. 电子与信息学报, 2009, 31(8): 1892-1897.
- [3] López-Risueno G, Grajal J. Unknown signal detection via atomic decomposition. Proceedings of the 11th IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal Processing, 2001: 174-177.
- [4] López-Risueno G, Grajal J. Multiple signal detection and estimation using atomic decomposition and EM. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2006, 42(1): 84-102.
- [5] López-Risueno G, Grajal J, Yeste-Ojeda O. Atomic decomposition-based radar complex signal interception. IEEE Proceedings Radar, Sonar and Navigation, 2003, 150(4): 323-331.
- [6] Fadili M J, Starck J L, Bobin J, et al. Image decomposition and separation using sparse representations: an overview. Proceedings of the IEEE, 2010, 98(6): 983-994.
- [7] Mann S, Haykin S. The chirplet transform: physical considerations. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(11): 2745-2761.

- [8] Bultan A. A four-parameter atomic decomposition of chirplets. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, 47(3): 731-745.
- [9] Greenberg J M, Wang Z S, Li J. New approaches for chirplet approximation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(2): 734-741.
- [10] Cho N, Kuo C C J. Sparse music representation with source-specific dictionaries and its application to signal separation. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2011, 19(2): 326-337.
- [11] Luo J S, Yu D J, Peng F Q. Multicomponent LFM signals detection based on multi-scale chirplet sparse signal decomposition. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(11): 2781-2785. (in Chinese)  
罗洁思, 于德介, 彭富强. 基于多尺度线性调频基信号稀疏分解的多分量 LFM 信号检测. *电子与信息学报*, 2009, 31(11): 2781-2785.
- [12] Tao R, Deng B, Wang Y. *Fractional Fourier transform and its applications*. Beijing: Tsinghua University Press, 2009: 12-26. (in Chinese)  
陶然, 邓兵, 王越. *分数阶傅里叶变换及其应用*. 北京: 清华大学出版社, 2009: 12-26.
- [13] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Scientific Computing*, 1998, 20(1), 33-61.
- [14] Bultheel A. A two-phase implementation of the fractional Fourier transform. TW 588, Leuven: Katholieke Universiteit Leuven, 2011: 1-11.
- [15] Skolnik M I. *Radar handbook*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Companies, 2008: 8 1-8 26.
- 作者简介:  
黄宇 男, 博士研究生。主要研究方向: 复杂调制信号截获、分选与识别。  
Tel: 0535-6635821  
E-mail: huangyu.yantai@163.com
- 刘锋 男, 博士, 教授, 博士生导师。主要研究方向: 综合电子战与网络对抗。  
Tel: 0535-6635821  
E-mail: fengliuhy@163.com

## Chirp Function Sparse Feature Extraction and Sorting of Radar Signals Based on FRFT

HUANG Yu, LIU Feng<sup>\*</sup>, WANG Zezhong, XIANG Chongwen

*Department of Electronic and Information Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China*

**Abstract:** Feature analysis is the basis of radar signal sorting and identifying, and feature extraction of a new system radar signals through sparse decomposition is a new research topic. This paper uses the fractional Fourier transform kernel function as the basic chirp function of sparse decomposition to make up chirp functions with similar parameters into a function family for extracting sparse components, and derive the sparse decomposition formula with a matching pursuit in the fractional Fourier domain. Then a characteristic parameter sequence is formed consisting of chirp-based sparse components' chirp-ratio and initial frequency, and the radar signal pulses are divided into five classes for sorting and identifying. Simulation analysis proves the validity of the derived conclusion, and results show that the linear or curved time-frequency characteristics of radar signals still have 95% correct sorting probability when the SNR is  $-3$  dB, sampling frequency is 500 MHz, observed time is 2  $\mu$ s, and the chirp-ratio is no more than 100 MHz/ $\mu$ s.

**Key words:** fractional Fourier transform; sparse decomposition; signal sorting; chirp function; feature extraction

Received: 2012-02-24; Revised: 2012-04-13; Accepted: 2012-07-26; Published online: 2012-08-28 11:16

URL: [www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20120828.1116.003.html](http://www.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20120828.1116.003.html)

Foundation items: National Natural Science Foundation of China (60902054); China Postdoctoral Science Foundation (20090460114, 201003758)

<sup>\*</sup> Corresponding author. Tel.: 0535-6635821 E-mail: fengliuhy@163.com