第5卷 第2期
1997年 6月

中国管理科学
Chinese Journal of Management Science

Vol. 5, No.2
June., 1997

漂移型线性规划理论及应用①

黎 新
(中国民航飞行学院科研处 四川广汉 618307)

徐玖平
(四川联合大学信息与决策研究所 四川成都 610065)

摘 要 到目前为止，有关灰色线性规划问题有不少研究，如灰色预测型线性规划[1~6]灰色区间型线性规划[7]等．本文在文献[1~7]的基础上，针对漂移型线性规划问题，运用参数线性规划理论与方法，对其满意解及其性质等进行探研，并提出了一些新的结论，不仅为漂移型线性规划作了一些理论讨论，而且还以应用实例给予示范．

关键词 线性规划 漂移型线性规划 决策

1 引 言

文献[1~5]描述的所谓漂移型线性规划是指一类特殊的线性规划模型．在此模型中的所有系数，包括目标系数 C_i、资源约束系数 b_i、消耗约束系数 a_{ij} 均为灰数，一般特指区间灰数．若 a_{ij}、b_i、c_j 为白化值的灰数分别记为$\otimes(a_{ij})$、$\otimes(b_i)$、$\otimes(c_j)$，灰数的区间分别为$[\underline{a}_{ij},\bar{a}_{ij}]$、$[\underline{b}_i$、$\bar{b}_i]$、$[\underline{c}_j$、$\bar{c}_j]$;$0\leqslant\underline{a}_{ij}$、$0\leqslant\underline{b}_i$、$0\leqslant\underline{c}_j$，则有灰色线性规划模型

$$\max f(\otimes)=\otimes^T(c)x \tag{1.1}$$

$$GLP\quad s.t.\ \begin{cases}\otimes(A)X\leqslant\otimes(b)\\ X\geqslant\bar{0}\end{cases}$$

这里$\otimes(A)=[\otimes(a_{ij})]\ m\times n$, $\otimes(a_{ij})=[\underline{a}_{ij},\bar{a}_{ij}]$, $i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$.

$\otimes(b)=[\otimes(b_1),\otimes(b_2),\cdots,\otimes(b_m)]^T$, $\otimes(b_i)=[\underline{b}_i,\bar{b}_i]$, $i=1,2,\cdots,m$.

$\otimes(c)=[\otimes(c_1),\otimes(c_2),\cdots,\otimes(c_n)]^T$, $\otimes(c_j)=[\underline{c}_j,\bar{c}_j]$, $j=1,2,\cdots,n$.

设$\tilde{\otimes}(c_j)$、$\tilde{\otimes}(b_i)$、$\tilde{\otimes}(a_{ij})$ 分别为灰数$\otimes(c_j)$, $\otimes(b_i)$、$\otimes(a_{ij})$ 的白化值，α_c、α_b、α_{ij} 分别为灰数$\otimes(c_j)$、$\otimes(b_i)$、$\otimes(a_{ij})$ 的白化值的摄取系数，即

$$\tilde{\otimes}(c_j)=\bar{c}_j\alpha_c+(1-\alpha_c)\underline{c}_j,\alpha_c\in[0,1]、\otimes(c_j)=[\underline{c}_j,\bar{c}_j] \tag{1.2}$$

$$\tilde{\otimes}(b_i)=\bar{b}_i\alpha_b+(1-\alpha_b)\underline{b}_i,\alpha_b\in[0,1]、\otimes(b_i)=[\underline{b}_i,\bar{b}_i] \tag{1.3}$$

$$\tilde{\otimes}(a_{ij})=\bar{a}_{ij}\alpha+(1-\alpha_{ij})\underline{a}_{ij}、\alpha_{ij}\in[0,1],\ \otimes(a_{ij})=[\underline{a}_{ij},\bar{a}_{ij}] \tag{1.4}$$

当 $\otimes(c_j)=\underline{c}_j$ 时，则称$\tilde{\otimes}(c_j)$ 为$\otimes(c_j)$ 的下界、或者下限值，记为 $\underline{c}$; 当$\tilde{\otimes}(c_j)=\bar{c}_j$ 时，则称$\otimes(c_j)$ 为$\otimes(c_j)$ 的上界，或者上限值，记为 $\bar{c}$. 仿此有$\otimes(b_i)$、$\otimes(a_{ij})$ 的边界值．

当 $\alpha_c=\alpha_b=\alpha_{ij}=\alpha$ 时，则称 $\otimes(c_j)$、$\otimes(b_i)$、$\otimes(a_{ij})$ 取数一致．相应地称 (1.2)、(1.3)、(1.4) 为以 α 为摄取系数的一致取数值，或简称一致值．

① 本文1997年3月11日收到．本研究工作获成都科技大学青年基金资助．

由于灰色线性规划（1.1）的约束条件是一个变动的，因此其目标值也是变动的，记其上、下限目标值为 f_{sup}、f_{inf}。于是灰色线性规划（1.1）的极限区间为

$$R_0 = [f_{inf}, f_{sup}] \tag{1.5}$$

其满意区间为

$$R_s = [f_*、f_{sup}] \subseteq R0 \tag{1.6}$$

若取

$$R\mu s = [\mu^*, 1), \ \mu^* = f_*/f_{sup} \tag{1.7}$$

则称 $R\mu s$ 为灰色线性规划（1.1）的灰靶。一般认为只要落入灰靶的解便是满意解。漂移型灰色线性规划的基本思路是：找出取数非一致情况下，规划的值的上限、下限，然后当目标值落入预先规定的灰靶区间域内 $R\mu s$, 求其满意解。

2 最优解与满意解及其性质

定义 2.1 (1) 若存在$\otimes$ (A) 与$\otimes$ (b) 的白化值$\tilde{\otimes}$ (A) 与$\tilde{\otimes}$(b)，使得

$$\tilde{\otimes}(A)\ X \leqslant \tilde{\otimes}(b),\ X \geqslant 0 \tag{2.1}$$

那么称 X 为 GLP 的白化可行解，白化可行解集记为 F[GLP], 即

$$F[GLP] = \{x| \otimes (A)\ X \leqslant \otimes (b),\ X \geqslant 0\} \tag{2.2}$$

(2) 若存在$\otimes$(c) 的白化值$\tilde{\otimes}$(c)，满足

$$\max f = \tilde{\otimes}(c)^T X,\ s.t. \tilde{\otimes}(A)\ X \leqslant \tilde{\otimes}(b),\ x \geqslant 0 \tag{2.3}$$

那么称 x 为 GLP 的白化最优值，白化最优值集记为 0[GLP], 即

$$O[GLP] = \{f|f = \max \otimes (C)^T X、\ X \in F[GLP]\} \tag{2.4}$$

为了研究 GLP, 我们首先考虑如下参数线性规划

$$\max f(\alpha) = c(\alpha)^T X$$

$$LP(x) \quad s.t \quad \begin{cases} A(\alpha)x \leqslant b(\alpha),\ x \geqslant 0. \\ C(\alpha) = \bar{c}\alpha + (1-\alpha)\underline{c},\ b(\alpha) = \bar{b}\alpha + (1-\alpha)\underline{b} \\ A(\alpha) = \underline{A}\alpha + (1-\alpha)\bar{A},\ \alpha \in [0,1] \\ \bar{C} = [\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_n]、\ \underline{c} = [\underline{c}_1, \underline{c}_2, \cdots, \underline{c}_n] \\ \bar{b} = [\bar{b}_1, \bar{b}_2, \cdots, \bar{b}_m]^T,\ \underline{b} = [\underline{b}_1, \underline{b}_2, \cdots, \underline{b}_m] \\ \bar{A} = [\underline{a}_{ij}]_{m \times n}.\ \bar{A} = [\bar{a}_{ij}]_{m \times n} \end{cases} \tag{2.5}$$

于是有如下定理

定理 2.1 若 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$，那 F [<P($\alpha_1$)] $\subseteq$ F [LP(α_2)],

证明 因为

$$A(\alpha_1) - A(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\underline{A} - \bar{A}) \geqslant 0 \tag{2.6}$$

$$b(\alpha_1) - b(\alpha_2) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\bar{b} - \underline{b}) \leqslant 0 \tag{2.7}$$

所以由 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$、$x \geqslant \bar{0}$, 可推出

$$A(\alpha_1)x \geqslant A(\alpha_2)x, b(\alpha_1) \leqslant b(\alpha_2)$$

设任意，$x_0 \in$F [LP(α_1)]，则

$$A(\alpha_1)x_0 \leqslant b(\alpha_1) \tag{2.8}$$

从而有

$$A(\alpha_2)x0 \leqslant A(\alpha_1)x_0 \leqslant b(\alpha_1) \leqslant b(\alpha_2) \tag{2.9}$$

故 $x_0 \in F$〔<$P(\alpha_2)$〕，即 ⊆〔$LP(\alpha_1)$〕 ⊆ F〔$LP(\alpha_2)$〕

推论 1 (1)F〔LP(0)〕 ⩽ F〔LP(1)〕；(2) ⋃ F〔LP(α)〕⊆ F〔GLP〕。

定理 2.2 F〔GLP〕=F〔LP(1)〕

证明 由定义 2.1, 可得

$$F〔GLP〕 \geqslant F〔LP11)〕 \tag{2.10}$$

现假设任意 $x_0 \in F$〔GLP〕，则有

$$\widetilde{\otimes}(A)\ x_0 \leqslant \widetilde{\otimes}(b) \tag{2.11}$$

从而可得

$$A \times x_0 \leqslant \widetilde{\otimes}(A)\ \times x_0 \leqslant \widetilde{\otimes}(b) \times \leqslant \bar{b} \tag{2.12}$$

故 $x0 \in F$〔LP(1)〕，即 F〔LP(1)〕⊇ F〔GLP〕

从而结合 (2.10) 可得 F〔GLP〕=F〔LP(1)〕

定理 2.3 设 $\widetilde{f}$ 为 GLP 的最优解，那么 $f \in$〔f_{min}, f_{max}〕，f_{min} 是 LP(0) 的最优解，f_{max} 是 LP(1) 的最优解。

证明 从推论 1 与 LP(i)(i=1,2) 的性质可得。

定理 2.4 若参数线性规划 LP(α) 对 $\forall \alpha \in$〔0,1〕，它不是退化的，那么 LP(α) 的最优值函数 f(α) 是一个单调递增函数。

证明设 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$, 那么

$$c(\alpha_1)-c(\alpha_2)=(\alpha_1-\alpha_2)(c-c) \leqslant 0 \tag{2.13}$$

根据定理 2.1 的结论，我们有

F〔$LP(\alpha_1)$〕⊆ F〔$LP(\alpha_2)$〕

于是

$$f^*(\alpha_1)=\max_{x \in F(LP(\alpha_1))} C(\alpha_1)^T X \leqslant \max_{x \in F(LP(\alpha_2))} C(\alpha_2)^T X = f^*(\alpha_2)$$

故 $f^*(\alpha_1) \leqslant f^*(\alpha_2)$

引理 1 [8] 若 $C(\alpha)^T x$、$A(\alpha)X$、$b(\alpha)$ 是关于自变量 α 在区间〔0,1〕的连续函数，且 LP(α) 对 $\alpha \in$〔0,1〕非退化，那么 LP(α) 的最优值函数 f(α)在区间〔0,1〕上也是连续的。

引理 2 [9] 设 f(x) 在闭区间〔a、b〕上的连续函数，那么对任意 $\nu \in$〔f(a), f(b)〕一定存在 $x_0 \in$〔a、b〕使得

$$f(x_0)=\nu$$

定理 2.5 若 $\widetilde{f} \in$〔f_{inf}, f_{sup}〕，那么 $\widetilde{f}$ 一定是 GLP 的后化最优值。

证明 根据闭区间上连续函数的介值定理（引理 2），我们可从定理 2.1,2.3,2.4 和引理 1 可直接获证。

定理 2.6 GLP 有白化解的充分必要条件为

$$F〔LP(1)〕 \neq \phi \text{ 且 } O〔LP(0)〕 \neq \phi$$

证明 可直接由定义 1.1 与 F〔LP(0)〕⊆ F(GLP〕⊆ F〔LP(1)〕获证。

3　漂移型线性规划在投资决策中的应用

某企业生产甲、乙两种产品，其产品的消耗约束主要由工时、外购件、电力、钢材、铝材等组成，这些约束在计划期间的供给分别为32000－37000小时、60000－70000元、36000－43800千瓦、50000－59000公斤、3000－3590公斤。在企业现有的科学技术进步与管理条件下，生产甲、乙两种产品的消耗定额与计划单位产品利润如下表所示

项目 / 约束	单位产品消耗定额		计划期物资条件	计量单位
	A产品	B产品		
工　时	1.7－2	8.3－10.0	32000－37000	小时
外购件	5.3－6	10.7－12	60000－70000	元
电　力	4.6－5.0	5.5－6.0	36000－438000	千瓦
钢　材	7.3－8.0	3.7－4.0	50000－59000	公斤
铝　材	.0.27－0.3	0.44－0.5	3000－3590	公斤

根据市场预测与变化分析、甲、乙两种产品其销售后的产品利润分别为

甲产品：30至58元/每件

乙产品：50至83元/每件

如果该企业能把最大生产潜力的83%发挥出来，那么该企业的利润目标将为多少？

为了解决该问题，设 x_1、x_2 分别为该企业生产产品A与产品B的数量，于是由上述的条件，我们有如下生产利润模型。

$$\max f_{\otimes} = \otimes(c_1)\,x_1 + \otimes(c_2)\,x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases} \otimes(a_{11})\,x_1 + \otimes(a_{12})\,x_2 \leqslant \otimes(b_1) & \text{(工时约束)} \\ \otimes(a_{21})\,x_1 + \otimes(a_{22})\,x_2 \leqslant \otimes(b_2) & \text{(外购件约束)} \\ \otimes(a_{31})\,x_1 + \otimes(a_{32})\,x_2 \leqslant \otimes(b_3) & \text{(电力约束)} \\ \otimes(a_{41})\,x_1 + \otimes(a_{42})\,x_2 \leqslant \otimes(b_4) & \text{(钢材约束)} \\ \otimes(a_{51})\,x_1 + \otimes(a_{52})\,x_2 \leqslant \otimes(b_5) & \text{(铝材约束)} \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

式中

$\otimes(c_1) = [30,58]$,　　$\otimes(c_2) = [50,83]$

$\otimes(a_{11}) = [1.7,2]$,　　$\otimes(a_{12}) = [8.3,10]$

$\otimes(a_{21}) = [5.3,6]$,　　$\otimes(a_{22}) = [10.7,12]$

$\otimes(a_{31}) = [4.6,5.0]$,　　$\otimes(a_{32}) = [5.5,6.0]$

$\otimes(a_{41}) = [7.3,8.0]$,　　$\otimes(a_{42}) = [3.7,4.0]$

$\otimes(a_{51}) = [0.27,0.3]$,　　$\otimes(a_{52}) = [0.44,0.5]$

$\otimes(b_1) = [32000,37000]$,　　$\otimes(b_2) = [6000,70000]$

$\otimes(b_3) = [36000,43800]$,　　$\otimes(b_4) = [50000,59000]$

$\otimes(b_5) = [3000,3590]$

将模型(3.1)转化为如下参数线性规划

$$\max f_{\alpha} = (30+28\alpha)x_1 + (50+33\alpha)x_2$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}(2-0.3\alpha)x_1+(10-1.7\alpha)x_2 \leqslant 32000+5000\alpha \\ (6-0.7\alpha)x_1+(12-1.3\alpha)x_2 \leqslant 60000+10000\alpha \\ (5-0.4\alpha)x_1+(6-0.5\alpha)x_2 \leqslant 36000+7800\alpha \\ (8-0.7\alpha)x_1+(4-0.3\alpha)x_2 \leqslant 50000+90000\alpha \\ (0.3-0.03\alpha)x_1+(0.5-0.06)x_2 \leqslant 3000+590\alpha \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\end{cases} \tag{3.2}$$

再由定理 2.3 ~ 2.4 可得模型（3.1）的最大利润由模型（3.2）中当 $\alpha=1$ 时的下列模型确定

$$\max f_1=58x_1+83x_2$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}1.7x_1+8.3x_2 \leqslant 37000 \\ 5.3x_1+10.7x_2 \leqslant 70000 \\ 4.6x_1+5.5x_2 \leqslant 43800 \\ 7.3x_1+3.7x_2 \leqslant 59000 \\ 0.27x_1+0.44x_2 \leqslant 3590 \\ x_1 \geqslant 0、x_2 \geqslant 0\end{cases} \tag{3.3}$$

其解为

$$f_{max}=597597.64(\text{元})$$

要让企业把最大生产潜力的 83%(即目标函数最优值的 83%) 发挥出来，其实质是在模型 (3.2) 中选取 α 使得

$$\mu_\alpha=f_\alpha/f_{max} \geqslant 83\%$$

于是由定理 2.1, f_α 是关于 α 是单调递增的，所以取 $\alpha=0.85$ 时，代入（3.2）得

$$f_{0.85}=499682.5(\text{元})$$

$$\mu_{0.85}=0.836>83\%$$

故若该企业所将最大生产潜力发挥出来，那么其理想利润目标为 49.97 万元。

主要参考文献

〔1〕邓聚龙，灰色预测与决策，华中理工大学出版社，pp.280－306. (1986)
〔2〕邓聚龙，灰色系统基本方法，华中理工大学出版社，pp.179－196. (1987)
〔3〕J. L. Deng, Grey system, China Ocean Press, pp. 132－136. (1988)
〔4〕邓聚龙，多维灰色规划，华中理工大学出版社，pp.178－185. (1989)
〔5〕邓聚龙，灰色系统理论教程，华中理工大学出版社，pp.415－420. (1990)
〔6〕J. P. Xu Theory of Grey Interval's Linear Progamminy and It's Applicaslon to LP's Paradox Research, The Journal of Grey System, Vol. 5 No.3, pp 197－204 (1993a)
〔7〕徐玖平，预测型线性规划理论与应用，中国管理科学，Vol. 1 No.4. pp35－42(1993)
〔8〕Gal. T. Linear Programming－A brief Survey, Math. Prog. Study, 24. (1984)
〔9〕Albert A. Blank Calculus, Houghton Mifflin Company(Boston), p.92. (1968)

Theory in Drift Linear Programiming and It's Application

Li Xin

(Dept. of Scientific Research, Civil Aviation Flying College of China, Guanghan, Sichuan, 618307)

Xu Jiuping

(Inst of Info & Decision Making, Sichuan Union University, Chengdu, Sichuan, 610065)

Abstract: Upto now, there are many kinds and theory on grey linear programming, such as grey forecasting linear programming, grey target programmming, linear programming of grey interval, and linear programming with grey numbers [1 ~17]. The objective of this paper is to deal with a kind of grey drift linear programming (GLP) through the mediums of procedure that turning GLP into parametric linear programming via the mathematic programming. Some useful results for the benefit of solving GLP is expounded and proved, discussed and developed.

Keyworks: Linear programming, Drift linear programming, Decision making.