第 5 卷 第 2 期 1997 年 6 月
中国管理科学
Chinese Journal of Management Science
Vol. 5, No.2 June., 1997

一类宏观经济不失平衡的充要条件①

胡发胜

山东大学数学系　济南　250100

摘　要　本文给出了一类宏观经济模型，并给出了模型中的经济系统不失去平衡的充分必要条件.

关键词　非负不可约方阵　本原方阵　正特征矢量法

1　引言

华罗康教授曾提出了一类宏观经济模型[1]：在无消费、无技术进步的封闭型经济系统中，初始投入必须是直接消耗系数矩阵的正特征矢量，否则经济系统一定会出现危机。刘树林、戎卫东讨论了下列模型[2]：在经济增长的情况下，拿出当年产出高于投入的增量的 $\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$ 倍作为下一年的投入，剩下的作为当年的最终消费，证明了经济系统不失去平衡的必要条件是初始投入是直接消耗系数矩阵的正特征矢量（〔2〕之定理 4.1）。特别当直接消耗系数矩阵可逆时，上述必要条件亦是充分条件（〔2〕之推论 4.3）。本文将〔2〕的模型推广如下：在生产增长的情况下，部门 i(共有 n 个部门) 拿出产出高于投入的增量的 $\alpha_i(\alpha_i>0,i=1,2,\cdots n)$ 倍作为下一年的投入，剩下的作为当年的最终消费。最后给出这一推广模型中的经济系统不失去平衡的充分必要条件。特别 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\alpha>0$ 时，即是文〔2〕的模型。

2　模型与引理

设国民经济系统划分为 n 个部门，n 阶非负矩阵 A 表示系统的直接消耗系数矩阵，本文采用下列符号：

$T=\{1,2,3,\cdots\}$; $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$; $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$;

$X\geqq Y$ 表示 $x_i\geqslant y_i$; $X\geqslant Y$ 表示 $X\geqq Y$ 且 $X\neq Y$; $X>Y$ 表示 $x_i>y_i$; $i=1,2,\cdots,n$。

$X^{(t)}$、$Y^{(t-1)}$ 和 $C^{(t)}$ 都是 n 维列向量，分别表示系统第 t 年的产出、投入和消费。特别 $Y(0)\geqslant 0$ 表示系统的初始投入。由文〔1〕知

$$AX^{(t)}=Y^{(t-1)},\quad t\in T \tag{2.1}$$

当第 t 年的生产是增长的，即 $X^{(t)}\geqslant Y^{(t-1)}\geqslant 0$ 时，拿出部门 i 产出高于投入的增量的 α_i $(\alpha_i>0,i=1,2,\cdots n)$ 倍作为第 $t+1$ 年的投入 $y_i^{(t)}$，余下的 $x_i^{(t)}-y_i^{(t)}$ 作为第 t 年的消费 $C_i^{(t)}$。在此政策下，得到

模型 I　若 $X^{(t)}\geqslant Y^{(t-1)}\geqslant 0$, $t\in T$, 则

$$Y^{(t)}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix}(X^{(t)}-Y^{(t-1)})\geqslant 0, \tag{2.2}$$

① 本文 1996 年 12 月 2 日收到.

$$C^{(t)}=X^{(t)}-Y^{(t)} \tag{2.3}$$

引理 2.1 [3] (Perron－Frobenius 定理) 设 A 是非负不可约方阵，则

(1) 存在正特征根λ (称为 A 的 Frobenius 根)，λ 是单重特征根，且使 A 的任何其它特征根 λ_i, 有 $|\lambda_i| \leqslant \lambda$. 特别 A 是本原方阵时，有 $|\lambda_i|<\lambda$。

(2) 对应于 λ 的左、右特征矢量 V^T、u 是正矢量，即 $V^T,U>0$。且若不计正常数因子，它们是唯一的。

引理 2.2 [4] 设 A,λ 同引理 2.1, 若 (2.1) 式成立，则 $X^{(t)} \geqslant Y^{(t-1)} \geqslant 0$ 的必要条件是 $\lambda<1;y^{(t-1)}>0$。

引理 2.3 设 A,λ 同引理 2.1, 若 $\lambda<1$, 则

(1) $I-A$ 可逆，

(2) $(I-A)^{-1}>0$.

证明 (1) 由引理 2.1 知，1 不是 A 的特征值，因而 $(I-A)$ 可逆 .

(2) 由代数知识不难得

$$(I-A)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}A^m \geqslant \sum_{m=0}^{n-1}A^m \geqslant \frac{1}{n!}(I+A)^{n-1},$$

由于 A 是非负不可约的，因而$(I+A)^{n-1}>0$(见〔3〕之第 77 页定理 4), 所以

$(I-A)^{-1}>0.$

引理 2.4 设 A,λ 同引理 2.1,$\lambda<1,\alpha_1<1,\cdots,\alpha_n>0$.
若 (2.1), (2.2) 式成立。则

$$BX^{(t+1)}=X^{(t)},t \in T$$

其中 $B(I-A)^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n^{-1}\end{pmatrix}A>0$, 是本原方阵。

证明 由 (2.1), (2.2) 得

$$AX^{(t+1)}=Y^{(t)}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix}(X^{(t)}-Y^{(t-1)})=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix}(X^{(t)}-AX^{(t)})=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix}(I-A)X^{(t)}.$$

据引理 2.3 知 $(I-A)$ 可逆，所以

$BX^{(t+1)}=X^{(t)},t \in T$

其中 $B=(I-A)^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n^{-1}\end{pmatrix}A$。

易见 $(I-A)^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n^{-1}\end{pmatrix}>0$, 又因 A 是非负不可约的，A 一定没有零列，所以

$B>0$

B 是正矩阵，因而 B 一定是本原方阵.

3 模型 I 不失平衡的充要条件

引理 3.1 设 B 是本原方阵，ρ 是其 Frobenius 根，V^T,u 分别是对应于 ρ 的左、右 E 特征矢量 且 $V^T u=1$, $\sum_{i=1}^{n}V_i=1$, 则

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{B}{\rho}\right)^t=\mathrm{u}V^T$$

证明　其证明类似文〔1〕，略．

引理 3.2　设 B,ρ,V^T,u 同引理 3.1, 若非负实向量序列$\{a^{(t)}\}^{\infty}$，满足 $B^ta^{(t)}=a^{(0)}$, 其中 $a^{(0)}\geqslant 0$, 则必有

$a^{(0)}=ku$,

其中 $k=V^Ta^{(0)}>0$.

证明　令 $b^{(t)}=\rho^ta^{(t)}$, 则

$b^{(t)}\geqslant 0\ (t\in T), V^Tb^{(t)}=V^T\rho^ta^{(t)}=(V^TB^t)a^{(t)}=V^Ta^{(0)}>0.$

由于 $\sum_{i=1}^{n}V_i=1$, 据引理 2.1 知：V^T 是一确定的 E 特征矢量，再由上式知 $\{b^{(t)}\}^{\infty}$，是非负有界实向量序列，因而存在子列 $b^{(t_j)}\to b^*$，所以

$$a^{(0)}=B^ta^{(t)}=\left(\frac{B}{\rho}\right)^t\rho^ta^{(t)}=\left(\frac{B}{\rho}\right)^tb^{(t)}=\left(\frac{B}{\rho}\right)^{t_j}b^{(t_j)}=\lim_{j\to+\infty}\left(\frac{B}{\rho}\right)^{t_j}b^{(t_j)}=(uV^T)b^*=ku,$$

其中 $k=V^Tb^*=\lim_{j\to+\infty}V^Tb^{(t_j)}=\lim_{j\to+\infty}V^Ta^{(0)}=V^Ta^{(0)}>$.

引理 3.3　设 B,ρ,V^T,u 同引理 3.1, 实向量序列 $\{x^{(t)}\}_1^{\infty}$满足 $BX^{(t+1)}=X^{(t)},t\in T$. 则

$X^{(t)}\geqslant 0,t\in T$

的充分必要条件是

$$X^{(t)}=\frac{k}{\rho^{t-1}}\ \mathrm{u},\ t\in T$$

其中 $K=V^TX^{(1)}>0$.

证明　充分性显然

必要性　设 $X^{(t)}\geqslant 0,t\in T$

任给 $t_0\in T$, 由 $BX^{(t+1)}=X^{(t)}(t\in T)$, 利用归纳法易得

$$B^tX^{(t+t_0)}=X^{(t_0)},t\in T.$$

令 $a^{(0)}=X^{(t_0)}$, $a^{(t)}=X^{(t+t_0)}$, $t\in T$. 则 $a^{(0)}\geqslant 0$, $a^{(t)}\geqslant 0$, $B^ta^{(t)}=a^{(0)}$, $t\in T$. 由引理 3.2 知：$a^{(0)}$(从而 $X^{(t_0)}$) 是 B 的右正特征矢量，再由 t_0 的任意性知：$X^{(t)}(t\in T)$ 是 B 的右正特征矢量，不妨设

$X^{(t)}=k_t\mathrm{u},k_t>0,t\in T.$

由 $BX^{(t+1)}=X^{(t)},B\mathrm{u}=\rho\mathrm{u}$ 不难得

$$k_t=\frac{k}{\rho^{t-1}}\ ,\ t\in T$$

其中 $k=k_1=k_1V^T\mathrm{u}=V^T(k_1\mathrm{u})=V^tX^{(1)}>0$。

定理 3.4　设 $A,\lambda,B,\alpha_1,\cdots$，$\alpha_n$ 同引理 2.4,$\lambda<1$. 若 (2.1)，(2.2)，(2.3) 式成立。则 $X^{(t)}\geqslant 0,Y^{(t-1)}\geqslant 0,C^{(t)}\geqq 0,t\in T$ 的充分必要条件是

$$X^{(t)}=\frac{k}{\rho^{t-1}}\ \mathrm{u},\ Y^{(t-1)}=\frac{k}{\rho^{t-1}}\ A\mathrm{u},\ C^{(t)}=\frac{k}{\rho^{t-1}}\left(\mathrm{u}-\frac{A\mathrm{u}}{\rho}\right)$$

且 $\alpha_1,\cdots$，α_n 应使行 $\mathrm{u}-\dfrac{A\mathrm{u}}{\rho}\geqq 0$.

其中 $k>0,\rho$ 是 B 的 Frobenius 根，u 是 B 的对应于 ρ 的右正特征矢量。

证明 充分性显然。

必要性 设 $X^{(t)}\geqslant 0, Y^{(t-1)}\geqslant 0, C^{(t)}\geqq 0, t\in T$.

因为（2.1），（2.2）式成立，$A,\lambda,B,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 同引理 2.4。由引理 2.4 知 $BX^{(t+1)}=X^{(t)}(t\in T)$，B 是本原方阵。

因而 $\{X^{(t)}\}_1^{\infty}$，B 满足引理 3.3 的条件，所以

$$x^{(T)}=\frac{k}{\rho^{t-1}}u,\ (t\in T)\ \ k>0.$$

再由（2.2），（2.3）分别得

$$y^{(t-1)}=Ax^{(t)}=\frac{k}{\rho^{t-1}}Au,$$

$$c^{(t)}=x^{(t)}-y^{(t)}=\frac{k}{\rho^{t-1}}\left(u-\frac{Au}{\rho}\right),t\in T$$

因为 $c^{(t)}\geqslant 0$，所以

$$u-\frac{Au}{\rho}\geqslant 0$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 应使得 $u-\dfrac{Au}{\rho}\geqslant 0$，证毕 .

由定理 3.4 知：$0<\rho<1$ 时，经济是不断扩张的；$\rho=1$ 时，经济维持原状；$\rho>1$ 时，经济是不断收缩的。下面根据 $\alpha_1,\cdots.\alpha_n$ 的两种不同取值情况，对定理 3.4 作进一步的说明。

情况 1 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 不全相同时，经济系统的生产 $\dfrac{k}{\rho^{t-1}}u$ 是矩阵 B 的右正特征矢量，但不是 A 的右正特征矢量（反证法即可）。经济系统的投入 $\dfrac{k}{\rho^{t-1}}Au$ 和消费 $\dfrac{k}{\rho^{t-1}}\left(u-\dfrac{Au}{\rho}\right)$ 既不是矩阵 B 的也不是矩阵 A 的右正特征矢量（反证法即可）。

情况 2 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\alpha$ 时，$B=\dfrac{1}{\alpha}(I-A)^{-1}A$. B 的右正特征矢量亦是 A 的右正特征矢量，经济系统的生产 $\dfrac{k}{\rho^{t-1}}u$，投入 $\dfrac{k}{\rho^{t-1}}Au$ 和消费 $\dfrac{k}{\rho^{t-1}}\left(u-\dfrac{Au}{\rho}\right)$ 都是矩阵 A 的（亦是 B 的）右正特征矢量. 此时 $\rho=\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$，$Au=\lambda u$。因而 $u-\dfrac{Au}{\rho}\geqslant 0$ 等价于 $0<\alpha\leqslant\dfrac{1}{1-\lambda}$. 于是得

推论 3.5 在定理 3.4 的条件下，若 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=d>0$，则

$$x^{(t)}\geqslant 0,\ \ y^{(t)}\geqslant 0,\ \ c^{(t)}\geqslant 0,\ \ t\in T$$

的充分必要条件是

$$x^{(t)}=k\left[\frac{\alpha(1-\lambda)}{\lambda}\right]^{t-1}u,\ \ y^{(t)}=\lambda k\left[\frac{\alpha(1-\lambda)}{\lambda}\right]^{t-1}u,$$

$$c^{(t)}=[1-\alpha(1-\lambda)]\cdot\kappa\left[\frac{\alpha(1-\lambda)}{\lambda}\right]^{t-1}u,\ \ t\in T$$

$$0<\alpha\leqslant\frac{1}{1-\lambda}.$$

其中 u 是 A 的右正特征矢量，$k>0$

由推论 3.5 知：$0<\alpha<\frac{\lambda}{1-\lambda}$ 时，生产、投入和消费都是不断收缩的；$\alpha=\frac{\lambda}{1-\lambda}$ 时，三者保持不变；$\frac{\lambda}{1-\lambda}<\alpha<\frac{1}{1-\lambda}$ 时，三者是不断增加的；$\alpha\frac{1}{1-\lambda}$ 时，生产和投入达到最高的增长率。但消费此时为零。

最后指出：定理 3.4 和推论 3.5 并不要求矩阵 A 可逆，但若 A 可逆，则定理 3.4 的充分必要条件可变为：$y^{(0)}=kAu$, $u-\frac{Au}{\rho}\geqslant 0$, $k>0$. 推论3.5 的充分必要条件可变为：$y^{(0)}=\lambda ku, k>0$, $0<\alpha\leqslant\frac{1}{1-\lambda}$。至此，完成了对所给模型的讨论。

致谢　在此感谢刘家壮教授对本文写作的热情指导!

参考文献

〔1〕华罗庚．计划经济大范围最优化的数学理论．科学通报，1984; (12):705～709.1984; (13):769～792.1985;(1):1～2
〔2〕刘树林，戎卫东．一类新的宏观经济系统模型．中国管理科学，1994;(1):35～40
〔3〕李乔．矩阵论八讲．上海：上海科学技术出版社，1988
〔4〕刘家壮、胡发胜．华氏宏观经济数学模型的推广．中国管理科学，1995;(2):1～8

A Necessary and Sufficient Condition for a Sort of Macroeconomics Not to Lose Its Balance

Hu Fasheng
(Dept. of Math., Shandong Univ., Jinan, 250100)

Abstract: A sort of macroeconomic model is presented. It is obtained that a necessary and sufficient condition for the economie system not to lose its balance.

Keywords: Nonnegative irreducible square matrix, Primitive sqaure matrix, Positive characteristic vector method.