联立方程计量经济学模型的结构识别[①]

毛定祥

(上海大学经济管理学院　200072)

摘　要　本文提出了联立方程计量经济学模型结构识别的概念与方法。应用该方法识别模型与统计数据无关，并且与模型参数的具体数值也无关，对计量经济学建模与分析有实际意义。

关键词　联立方程模型　结构识别　生成秩

1　前言

联立方程是计量经济学的基本模型。在对联立方程各变量的系数值作出估计之前，首先需要解决模型的识别问题。也就是说，只有当方程的统计形式唯一时，其变量的系数值才能由统计数据唯一确定。阶条件和秩条件广泛应用于识别问题。但是阶条件仅为判断方程可否识别的必要条件。秩条件虽然是判断方程可否识别的充分必要条件，然而在应用秩条件前，我们需要事先知道联立方程全部变量的系数值，这在实际中是不可能做到的，因为根据统计数据来估计这些方程变量的系数值的前提是必须已知这些方程是可识别的。本文提出了与统计数据完全无关而仅依赖于模型结构的联立方程结构识别问题。在联立方程模型的结构识别问题上，仅需知道方程中包含哪些变量而与变量的系数具体数值关系。

2　联立方程计量经济学模型的识别问题

设联立方程计量经济学模型有以下形式:

$$By + Gx = u \tag{1}$$

其中 $y \in R^{n\times 1}$, $\in R^{m\times 1}$, $u \in R^{n\times 1}$分别为内生变量、前定变量和扰动项向量，$B \in R^{n\times n}$和$G \in R^{n\times m}$是由 y 和 x 的样本观察值估计而得到的系数矩阵。

考虑方程组 (1) 的第 i 个方程的识别问题。经适当的行列互换，第 i 个方程位于第一行，(B, G) 为下列形式:

$$(B,G) = \left[\begin{array}{cc:cc} O & b_i & O & g_i \\ B_i & B_i^* & G_i & G_i^* \end{array}\right] \tag{2}$$

其中相应子块的维数分别为 $B_i:(n-1)\times ni, B_i^*:(n-1)\times n_i^*, b_i:1\times n_i^*, G_i:(n-1)\times m_i, G_i^*:(n-1)\times m_i^*, g_i:1\times m_i^*$。$n_i + n_i^* = n, m_i + m_i^* = m$。在第 i 个方程中，ni 为被排斥的内生变量个数，n_i^*为包含的内生变量个数，m_i 为被排斥的前定变量个数，m_i^*为包含的前定变量个数。

模型识别的秩条件:

方程组 (2) 的第 i 个方程可识别的充分必要条件是

$$\mathrm{rank}(B_i, G_i) = n-1 \tag{3}$$

① 本文1997年5月20日收到.

为了计算 (B_i,G_i) 的秩，需要事先从 (y,x) 的观察值来估计 (B_i,G_i) 的具体数值，而只有当第 i 个方程是可识别时，这种估计才有意义。

模型识别的阶条件:

如果方程组 (2) 的第 i 个方程是可识别的，则

$$m_i \geqslant n_i^* - 1 \tag{4}$$

阶条件虽然比秩条件弱，但它仅是方程可识别的必要条件。

3 联立方程计量经济学模型的结构识别问题

在联立方程模型 (2) 中，若矩阵 (B_i,G_i) 中的元或者是固定的零元，或者是可彼此独立地取任意实数值的变元，则称 (B_i,G_i) 为 $(n-1)\times(n_i+m_i)$ 阶结构阵，记为 $(B_i,G_i)\in S(n-1)\times(n_i+m_i)$，当 (B_i,G_i) 中所有变元均取确定的实数值后所得到的矩阵 $(B_i,G_i)\in R^{(n-1)\times(n_i+m_i)}$称为 (B_i,G_i) 的一个实现。(B_i,G_i) 的所有实现所能达到的最大秩称为 (B_i,G_i) 的生成秩 (Generic Rank)，即

$$g-\mathrm{rank}(s)=\max\{\mathrm{rank}(s[\alpha])$$

这里 α 是自由变元，$s(\alpha)$ 是相应结构矩阵的一个实现。

控制理论中已有不少关于系统结构可控性的论述。这里，我们直接给出:

联立方程模型 (2) 的第 i 个方程为结构可识别的充分必要条件是

$$g-\mathrm{rank}(B_i,G_i)=n-1 \tag{5}$$

从生成秩的定义容易看出，若联立方程模型 (2) 的第 i 个方程是结构可识别的，则对结构矩阵 (B_i,G_i) 的几乎所有实现，第 i 个方程是可识别的；若第 i 个方程是结构不可识别的，则对结构矩阵 (B_i,G_i) 的所有实现，第 i 个方程都是不可识别的。

当联立方程模型 (2) 的所有方程都是结构可识别时，称该联立方程模型是结构可识别的。即，只要有一个方程是结构不可识别的，该模型就是结构不可识别的。

为了判断联立方程模型结构可否识别，需要计算相应结构矩阵的生成秩。

Prescott 和 Pearson(1981) 基于组合数学提出了求矩阵生成秩的算法。根据这一算法，下面我们给出判断联立方程模型 (B,G) 的第 i 个方程结构可否识别的方法。

第一步　消去 $n\times(n+m)$ 阵 (B,G) 中的第 i 行，同时消去第 i 行中非零元素所在列，得 (B_i,G_i)。令 $M=(B_i,G_i)$。

第二步　消去 M 中全为零的行和列，所得矩阵的维数记为 $p\times q$。

第三步　令 $k=1,l=0,M_1^0=M$。

第四步　消去 M_k^l 中全为零的行和列，设所得矩阵的维数为 $p^l\times q^l$。

第五步　如果 $\min(p^l,q^l)=1$，则 $g-\mathrm{rank}(Mkl)=1$；如果 $\min(p^l,q^l)=0$，则 $g-\mathrm{rank}(M_k^l)=0$；如果 Mkl 中没有零元素，则 $g-\mathrm{rank}(M_k^l)=\min(p^l,q^l)$，并转第八步，否则进行下一步。

第六步　在 M_k^l 中找一个非零元素，该元素所在的行和列具有最大数目的零元素 (可能不唯一)，若 $k=2,l=0$，则将该元素变为零，否则消去该元素所在的行和列，得到的矩阵记为 M_k^{l+1}。

第七步　令 $l=l+1$，返回第四步。

第八步　计算 $g-\mathrm{rank}(M_k)=l-1+g-\mathrm{rank}(M_k^l)$。

若 $g-\mathrm{rank}(M_1)=\min(p,q)-1$, 则

$g-\mathrm{rank}(M)=\min(p,q)$, 停机，

否则对 $k=1$, 令 $k=2, l=0$ 转第六步。

对 $k=2, g-\mathrm{rank}(M)=\max\{1+g-\mathrm{rank}(M_1), g-\mathrm{rank}(M_2)\}$, 停机。此时，若 $g-\mathrm{rank}(M)=n-1$, 则判定（B,G）的第 i 个方程是结构可识别的，否则判定其为结构不可识别的。

4　一个例子

设有如下联立方程计量经济学模型

$$\begin{cases} y_1=\alpha_1 y_2+\alpha_2 x_1+\alpha_3 x_2+u_1 \\ y_2=\beta_1 y_3+\beta_2 x_3+u_2 \\ y_3=\gamma_1 y_1+\gamma_2 y_2+\gamma_3 x_3+u_3 \end{cases}$$

其中 y_1、y_2、y_3 为内生变量，x_1、x_2、x_3 为前定变量，u_1、u_2、u_3 为扰动项，结构阵 $(B,G)\in S^{3\times 6}$为

$$(B,G)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} * & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 & * \\ * & * & * & 0 & 0 & * \end{array}\right]$$

对于第 1 个方程，$m_1=1, n_1^*=2$

$$(B_1,G_1)=\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

$g-\mathrm{rank}(B_1,G_1)=2=n-1$

所以该方程是结构可识别的。又因为

$$m_1=1=2-1=n_1^*-1$$

所以该方程是恰好识别的。用同样的方法可得第 2 个方程也是结构可识别的，但它是过度识别的。第 3 个方程是结构不可识别的，但它是恰好识别的。因此上述联立方程模型是结构不可识别的。

5　结束语

本文提出的联立方程计量经济学模型的结构识别问题，揭示了模型的基本结构特性。结构识别的概念与方法既与统计数据无关也与方程变量系数的具体数值无关，对联立方程计量经济学模型的建模与分析有实际意义。

参考文献

〔1〕吴可杰，秦宛顺，赵德滋．经济计量学——理论与方法．南京大学出版社，1988

〔2〕Lin, C.T., Structural Controllability, IEEE, AC, 1974, (19)：201－208

〔3〕Shields, R.W. adn J. B. Pearson, Structural Controllability of Multi-input Linear Systems, IEEE,AC, 1976, (21)：203－212

〔4〕王翼，张朝池．《大系统控制——方法和技术》．天津大学出版社，1992

Structural Identifiability of Simutaneous Equations Model of Econometrics

Mao Dingxiang

(School of Management, Shanghai University)

Abstract: This paper proposes the concept and method of structural identifiability of simultaneous equations model of econometrics, which reveals the fundamental characteristic of model structurally and depends neither on staistical data nor specific values of model parameters. It has practical significance in econometric modeling and analysing.

Keywords: Simultaneous equations model, Structural identifiability, Generic rank.