第7卷 第1期 1999年 3月
中国管理科学
Chinese Journal of Management Science
Vol. 7, No.1 Mar., 1999

随机期限结构与国债定价模型

吴硕思

(华侨大学管理信息科学系，福建 泉州 362011)

摘 要: 假设债价扩散函数 $v(t, T)$ 为时间 t 的二次函数，是利用风险中性方法建立随机期限结构模型的关键；而随机期限结构模型又是建立债券定价模型的基础。本文不但介绍了有关的理论模型，而且利用我国国债市场的价格数据进行实证研究，建立了具体的瞬态年利率随机期限和国债961的定价模型。

关键词: 瞬态利率；随机期限结构；定价模型

1 引言

从1973年Fischer Black和Myron Scholes发表划时代的股票衍生证券定价模型（即Black－Scholes期权公式）至1997年10月Robert Merton和Myron Scholes获得诺贝尔经济学奖，以数理统计、随机微积分和计算机技术为主要研究手段的现代金融数学经历了近30年的快速发展，形成了跨世纪的前沿学科。

随机期限结构（stochastic term structure）模型是刻划利率与期限（或时间）之间的非确定性函数关系及其变化规律的有效工具。它是许多金融产品，尤其是利率衍生证券（例如，债券）的定价基础。常见的随机期限结构和衍生证券定价模型，按其研究方法可分为计量经济学的均衡模型（equilibrium model）和现代金融学的无套利模型（arbitrage－free model）两大类。例如：Merton (1970) 和Cox－Ingersoll－Ross (1985) 的工作属于第一类；Black－Scholes (1973), Vasicek (1977), Ho－Lee (1986) 和Hull－White (1990) 和Heath－Jarrow－Morton (1992) 等人的工作属于第二类。

均衡模型是用经济学方法建立的模型，缺乏金融市场的实证基础，形式简单（例如，模型参数往往是与时间无关的常数），难以准确地刻画利率变化的客观规律。无套利模型则是根据利率的非负和均值回复等特性，人为构造的模型，主观色彩较浓；并且其模型参数的估计必须依赖市场利率的历史数据。我国目前还没有市场化的利率数据，因此这类模型在我国现有金融市场环境下难以应用。

风险中性（risk－neutral）是现代金融学的重要概念之一，起源于推导Black－Scholes期权公式的随机微分方程 $\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf$，其中，$S$ 为股票价格，f为依赖于 S 和 t 的衍生证券的价格。因为这个随机微分方程不包含股票的预期收益 μ，所以风险偏好不对方程的解产生影响。这就是风险中性的涵义。运用风险中性方法建立随机期限结构模型始于90年代初，是一条比较新颖的研究途径。对此，Hull(1993)一书第十五章有比较详细的介绍：首先假设贴现债

收稿日期: 1998－07－20

券价格 $P(t, T)$ 满足风险中性过程

$$dP(t, T)=r(t)P(t, T)dt+v(t, T)P(t, T)dz(t) \tag{1.1}$$

通常还假设（1.1）为伊藤过程（Ito process）。在一些常规条件下，对这个随机过程运用伊藤定理（Ito's lemma）和进行一些必要的随机微积分运算，最终可推出瞬态利率随机期限结构的一般形式如下：

$$dr(t)=F_t'(0, t)dt+\{\int_0^t [v(\tau, t)v_{tt}''(\tau, t)+[v_t'(\tau, t)]^2]d\tau\}dt$$
$$+\{\int_0^t v_{tt}''(\tau, t)\,dz(\tau)\}dt+[v_t'(\tau, t)|_{\tau=t}]dz(t) \tag{1.2}$$

从（1.2）可看出瞬态利率 $r(t)$ 的漂移函数和扩散函数都与 $v(t, T)$ 及其导数有密切的关系。若假设 $v(t, T)$ 是满足另一个随机过程的随机变量，则相应的期限结构模型就是十分复杂的多因素模型。若假设 $v(t, T)$ 是与期限和时间都无关的常数，又过于简单。剩下的选择就是假设 $v(t, T)$ 为与期限和时间有关的确定性函数。因此对 $v(t, T)$ 的具体形式作出假设和估计，是运用风险中性方法建立期限结构具体模型的重要环节。

2　关于 $v(t, T)$ 的不同假设及相应的期限结构模型

2.1　若干假设和记号

我们假设所研究的金融市场为连续市场，记其交易时间为$[0, l]$。用 $\sigma-$ 域流概率空间（filtered probability space）(Ω, F, F_t, Q) 刻画市场的不确定性，其中，Ω 是样本点的全体；F 是 $\sigma-$ 域；$\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 F 的子 $\sigma-$ 域流（filtration），由标准布朗运动（standard Brownian motion）$z(t)$ 生成并满足常规的条件；Q 是鞅测度（martingale measure）。市场不存在套利机会的假设可保证 Q 唯一存在（有关定理及证明参见 Harrison & Kreps (1979) and Duffie (1992)）。我们用 $P(t, T)$ 表示期限为 T 的零息票国债在时刻 t 的价格；$r(t)$ 表示零息票国债在时刻 t 的瞬态利率；$F(t, T)$ 表示期限为 T 的零息票国债在时刻 t 的远期利率。并且它们的关系为：$F(t, T)=-\dfrac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$，$r(t)=F(t, t)$。特别地，还假设初始价格 $P(0, T)$ 和初始远期利率 $F(0, T)$ 都是 T 的确定性函数，并且 $F(0, T)=-\dfrac{\partial \ln P(0, T)}{\partial T}$。

2.2　假设 $v(t, T)$ 为二次函数时的期限结构模型

从市场数据可观察到债价波动既与期限成正比，又随期限的结束而趋于零。因此我们假设 $v(t, T)$ 为 t 的确定性二次函数：$v(t, T)=at^2+bt+c$, $(0\leqslant t\leqslant T)$，其中，$a$、$b$ 和 c 为待定系数，且 $v(0, T)$ 和 $v(T, T)$ 取零值。

从 $v(0, T)=v(T, T)=0$ 得 $c=0$，$b=-aT$; 当 $0<t<T$ 时，$v(t, T)=at^2-aTt>0$，故 $a<0$；记 $\alpha=-a$，则 $\alpha>0$。因此 $v(t, T)=\alpha t(T-t)$，其中，α 是唯一的待定参数，其估计方法将在第 2.5 节中介绍。

把 $v(\tau, t)=\alpha\tau(t-\tau)$，$v_t'(\tau, t)=\alpha\tau$ 和 $v_{tt}''(\tau, t)=0$ 代入（1.2），便得 $v(t, T)$ 为二次函数时的瞬态利率随机期限结构模型如下：

$$dr(t)=[F_t'(0, t)+(\alpha^2t^3)/3]dt+\alpha t dz(t) \tag{2.1}$$

其中，$F_t'(0, t)$ 是初始远期利率 $F(0, t)$ 的导数，其估计方法也留在第 2.5 节中讨论。

2.3　$v(t, T)$ 为线性函数的假设及相应的期限结构模型

较简单的假设是把 $v(t, T)$ 看成随 t 逼近期限 T 而线性递减且最后取零值的线性函数：$v(t, T)=a+bt$，且设 $v(0, T)=\beta T$。当 $t=0$ 时，$v(0, T)=a$；又由 $v(T, T)=0$，$v(0, T)+bT=0$，得 $b=-v(0, T)/T=-\beta$。因此 $v(t, T)=\beta(T-t)$，其中，β 是唯一的待定参数，其估计方法与第 2.2 节的参数 α 估计方法相同。

把 $v(\tau, t)=\beta(t-\tau)$，$v_t'(\tau, t)=\beta$ 和 $v_{tt}''(\tau, t)=0$ 代入（1.2），便得 $v(t, T)$ 为线性函数时的瞬态利率随机期限结构模型：$dr(t)=[F_t'(0, t)+\beta^2 t]dt+\beta dz(t)$

2.4　二次函数或线性函数？

下面，我们将验证 $v(t, T)$ 是否具有二次曲线的形态。假设 P_t 是随机微分方程 $dP_t=f(t, P_t)dt+g(t, P_t)dz(t)$ 的解。Chesney et al. (1993) 提出了关于扩散函数 $g(t, P_t)$ 的估计公式如下：

$$\hat{g}=\left\{\frac{2f'(y_t)}{f''(y_t)y_t}\left[\frac{f(y_{t+\Delta t})-f(y_t)}{f'(y_t)y_t}-\frac{y_{t+\Delta t}-y_t}{y_t}\right]\frac{1}{\Delta t}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

其中，$y_t=e^{P_t}$，f 是某二阶可微函数且 $f''\neq 0$。为了使 $f''\neq 0$，我们取 $f(y)=y^2$。从而 $v(t, T)$ 的估计式为：

$$\hat{v}_t=\frac{1}{P_t\sqrt{\Delta t}}\left(\frac{y_{t+\Delta t}-y_t}{y_t}\right) \tag{2.3}$$

其中，$y_t=e^{P_t}$，而 P_t 将用国债 961 的逐日交易价格数据代入。

记帐式贴现国债 961 的期限一年，96 年 1 月 8 日至 30 日为发行期，发行价为 89.2 元，发行量 135 亿元，96 年 1 月 12 日起计息，97 年 1 月 12 日到期，票面利率为 12.1%，到期本息为 100 元。在上海证券交易所实际交易日数 228 天，逐日收盘价数据见附录。

把国债 961 的逐日收盘价数据 P_t 代入（2.3），可算得相应的 $\hat{v}_t$，$t=1,2,\cdots,228$（参见附录）。我们以图 1 表示 $\hat{v}_t$ 的形态，从图 1 可直观地看到债价波动率估计值 $\hat{v}_t$ 在整个（228 天）交易期间的确呈现出了二次曲线的形态。因此 $v(t, T)$ 为二次函数是比较符合实际的假设，于是我们选择期限结构模型（2.1）作为建立国债定价模型的基础。

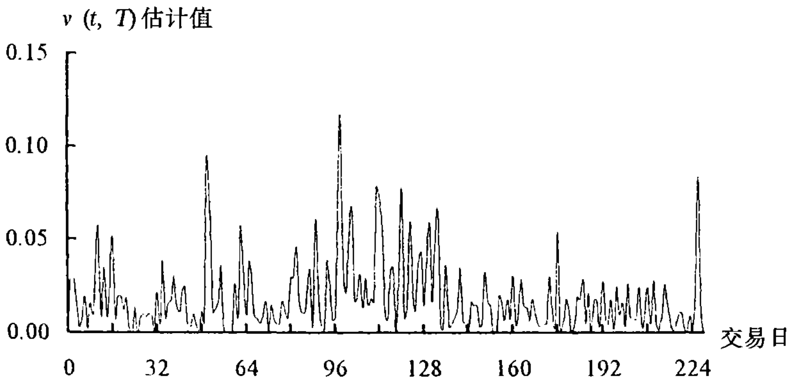

图 1　估计值 $\hat{v}_t$ 的平面曲线图

2.5　期限结构模型的参数估计

期限结构模型（2.1）的表达式为：$dr(t)=[F_t'(0, t)+(\alpha^2t^3)/3]dt+\alpha t dz(t)$，其中，$\alpha$ 和 $F_t'(0, t)$ 是

未知参数。下面，我们先介绍 α 的估计方法。设 P_t 是随机微分方程 $dP_t=f(t, P_t)dt+g(t, P_t)dz(t)$ 的解，Mihlstein (1974) 提出了 P_t 的离散化的近似算式:

$$P_{t+\Delta t}\approx P_t+f(t, P_t)\Delta t+g(t, P_t)\Delta z_t+\frac{1}{2}\frac{\partial g(t, P_t)}{\partial P_t}g(t, P_t)[(\Delta z_t)^2-\Delta t] \tag{2.4}$$

由 (1.1) 和伊藤定理，有

$$d\ln P(t, T)=[r(t)-\frac{v^2(t, T)}{2}]dt+v(t, T)dz(t) \tag{2.5}$$

分别对 (1.1) 和 (2.5) 运用 (2.4)，可得下面两式:

$$\frac{P(t+\Delta t, T)-P(t, T)}{P(t, T)}\approx r(t)\Delta t+v(t, T)\Delta z(t)+\frac{v^2(t, T)}{2}\{[\Delta z(t)]^2-\Delta t\} \tag{2.6}$$

$$\ln\frac{P(t+\Delta t, T)}{P(t, T)}\approx[r(t)-\frac{v^2(t, T)}{2}]\Delta t+v(t, T)\Delta z(t) \tag{2.7}$$

(2.6) 减去 (2.7)，并注意到 $v(t, T)=at(T-t)t\ \ \Delta z(t)=\varepsilon\sqrt{\Delta t}$，故:

$$2[\frac{P(t+\Delta t, T)-P(t, T)}{P(t, T)}-\ln\frac{P(t+\Delta t, T)}{P(t, T)}\Big/t^2(T-t)^2\Delta t=\alpha^2\varepsilon^2 \tag{2.8}$$

其中，ε 服从 $N(0, 1)$ 分布。记 $\alpha^2\varepsilon^2$ 为 X_t，则 X_t 服从 $\alpha^2\chi^2(1)$ 分布，其样本值可由债价历史数据算得。如果我们已算得 X_t，$t=1,2,\cdots n$，则 α 的估计为: $\hat{\alpha}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X_t}$。根据此估计式以及 (2.8)，利用国债 961 的 228 天逐日收盘价数据，可算得 $\hat{\alpha}=0.344606$。

如果知道 $F(0, t)$，就可求出 $F_t'(0, t)$。由第 2.1 节知初始远期利率 $F(0, t)$ 是期限 t 的确定性函数。我们进一步假设其为 t 的线性函数: $F(0, t)=mt+c$。这样，只要知道两个不同期限的债券的初始利率（即票面利率），就可确定 $F(0, t)$ 和 $F_t'(0, t)$。国债 961 和国债 963 的期限分别为一年和三年，发行期分别为 96 年 1 月和 3 月，其间银行利率无变动，两者的票面利率分别为 12.10% 和 14.50%。这等价于已知直线 $F(0, t)=mt+c$ 上的两点: (1, 0.121) 和 (3, 0.145)。由此求得 $F(0, t)=0.012t+0.109$，从而有 $F_t'(0, t)=0.012$。

把 $\hat{\alpha}=0.344606$ 和 $F_t'(0, t)=0.012$ 代入 (2.1)，便得具体的瞬态年利率期限结构模型:

$$dr(t)=[0.012+(0.344606412)^2t^3/3]dt+0.344606412tdz(t) \tag{2.10}$$

3 基于期限结构模型的零息票国债定价模型

3.1 基于期限结构一般模型的零息票国债定价模型

许多文献都有关于在期限结构模型的基础上，建立零息票国债定价模型的介绍（例如，Hull (1993)、Wilmott et al. (1993)）。单因素随机期限结构一般模型可表示为以下的形式:

$$dr(t)=u(r, t)dt+w(r, t)dz(t) \tag{3.1}$$

其中，$u(r, t)=a(t)-b(t)r+c(r, t)w(r, t)$，$w(r, t)=f(r, t)\sqrt{g(t)r-h(t)}$。通常假设基于 (3.1) 的零息国债价格是利率 r 和时间 t 的函数 $P(r, t)$；由伊藤定理可得:

$$dP=(\frac{\partial P}{\partial r}u+\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2})dt+w\frac{\partial P}{\partial r}dz \tag{3.2}$$

记任意两种不同期限的零息票国债为 G_1 和 G_2，在某时刻 t，其价格分别为 P_1 和 P_2。现将一份 G_1 和

$(\frac{\partial P_1}{\partial r})\Big/(\frac{\partial P_2}{\partial r})$ 份 G_2 组成一种投资组合，并记此投资组合的价值为 Π，则：

$$\prod = P_1 - [(\frac{\partial P_1}{\partial r})\Big/(\frac{\partial P_2}{\partial r})]P_2 \tag{3.3}$$

其中，$(\frac{\partial P_1}{\partial r})\Big/(\frac{\partial P_2}{\partial r})$ 在很短的区间 $[t,\ t+\Delta t]$ 内被视为与 t 无关的常数。注意 P_1 和 P_2 都满足（3.2），即 $dP_i=(\frac{\partial P_i}{\partial r}u+\frac{\partial P_i}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 P_i}{\partial r^2})dt+w\frac{\partial P_i}{\partial r}dz,\ i=1,\ 2$。把这两个微分方程和（3.3）代入 $d\prod=r\prod dt$（由金融学的无套利假设易知此等式成立），整理后可得：

$$(\frac{\partial P_1}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2}-rP_1)\Big/\frac{\partial P_1}{\partial r}=(\frac{\partial P_2}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2}-rP_2)\Big/\frac{\partial P_2}{\partial r} \tag{3.4}$$

由于 P_1 和 P_2 的任意性，只当（3.4）两边都与期限 T 无关时，等式（3.4）才可能成立。故：

$$(\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}-rP)\Big/\frac{\partial P}{\partial r}=l\ (r,\ t) \tag{3.5}$$

其中，设 $l\ (r,\ t)=c\ (r,\ t)w\ (r,\ t)-u\ (r,\ t)$。这里的 $c\ (r,\ t)$, $w\ (r,\ t)$ 和 $u\ (r,\ t)$ 与式（3.1）中的记号相同。可验证（3.5）的解为：$P\ (r,\ t)=ZA(t,\ T)e^{-rB(t,\ T)}$，其中，$P(r,\ T)=Z,\ A(T,\ T)=1,\ B(T,\ T)=0$，且 $A(t,\ T)$ 和 $B(t,\ T)$ 满足下列微分方程：

$$\frac{1}{A(t,\ T)}\frac{\partial A(t,\ T)}{\partial t}=\frac{1}{2}[B(t,\ T)\ f(r,\ t)]^2h(t)+a(t)B(t,\ T) \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial B(t,\ T)}{\partial t}=\frac{1}{2}[B(t,\ T)f(r,\ t)]^2g(t)+b(t)B(t,\ T)-1 \tag{3.7}$$

3.2　基于期限结构模型（2.1）的零息票国债定价模型

把期限结构模型（2.1）与一般模型（3.1）作比较，知其参数分别为：$a(t)=F_t'(0,\ t)$, $b(t)=0$, $c\ (r,\ t)=\frac{\alpha t^2}{3}$, $f\ (r,\ t)=\alpha t$, $h(t)=-1$ 以及 $g(t)=0$。把它们代入（3.7），得微分方程：$\frac{\partial B(t,\ T)}{\partial t}=-1$，其满足边界条件 $B(T,\ T)=0$ 的解为：$B(t,\ T)=T-t$，代入（3.6），得关于 $A(t,\ T)$ 的微分方程：$\frac{1}{A(t,\ T)}\frac{\partial A(t,\ T)}{\partial t}=F_t'(0,\ t)\ (T-t)-\frac{\alpha^2t^2}{2}(T-t)^2$，其满足 $A(T,\ T)=1$ 的解为：

$$\ln\ A(t,\ T)=\frac{\alpha^2}{2}(\frac{T^6}{30}-\frac{T^2t^3}{3}+\frac{Tt^4}{2}-\frac{t^5}{5})+B(t,\ T)F(0,\ t)+\ln\frac{P(0,\ T)}{P(0,\ t)} \tag{3.8}$$

因此，基于期限结构模型（2.1）的零息票国债定价模型为：

$$\begin{cases} P\ (r,\ t)=ZA(t,\ T)e^{-rB(t,\ T)} \\ \ln\ A(t,\ T)=\frac{\alpha^2}{2}(\frac{T^5}{30}-\frac{T^2t^3}{3}+\frac{Tt^4}{2}-\frac{t^5}{5})+B(t,\ T)F(0,\ t)+\ln\frac{P(0,\ T)}{P(0,\ t)} \\ B(t,\ T)=T-t \\ dr(t)=[F_t'(0,\ t)+(\alpha^2t^3)/3)dt+\alpha t dz(t) \end{cases} \tag{3.9}$$

其中，$r(t)$ 的初始条件为 $r(0)=F(0,\ 0)$; $P(0,\ t)$ 由关系式 $F(0,\ t)=-\frac{\partial \ln P(0,\ t)}{\partial t}$ 确定（参见第 2.1

节)：$P(0, t)=e^{-\int_0^t F(0, s)ds}$；故 $\ln \dfrac{P(0, T)}{P(0, t)} = \int_0^t F(0, s)ds - \int_0^T F(0, s)ds$。

3.3 国债 961 的定价模型

由 (2.10) 和 (3.9)，不难建立国债 961 定价模型如下：

$$\begin{cases} P(r, t)=100A(t, T)e^{-r(T-t)} \\ \ln A(t, T)=\dfrac{(0.344606412)^2}{2}\left(\dfrac{T^5}{30}-\dfrac{T^2t^3}{3}+\dfrac{Tt^4}{2}-\dfrac{t^5}{5}\right) \\ \qquad +(0.012t+0.109)(T-t)-0.006(T^2-t^2)-0.109(T-t) \\ dr(t)=[0.012+(0.344606412)^2t^3/3]dt+0.344606412tdz(t) \end{cases} \tag{3.10}$$

其中，$r(0)=0.109$。对 (3.10) 运用蒙特卡罗模拟方法，就可算得国债 961 逐日收盘价的估计值：首先，把定价模型 (3.10) 中的期限结构模型 $dr(t)$ 离散化为：

$$\Delta r(t)=\left[\frac{(10.8)^2}{(100-10.8t)^2}+\frac{(0.344606412)^2t^3}{3}\right]\Delta t+0.344606412t\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{3.11}$$

其中，$t=k/228$, $k=1, 2, \cdots, 228$, $\Delta t=1/228$ (这是因为国债 961 共有 228 个交易日)，ε 服从标准正态分布 $N(0, 1)$。然后，产生 228 个 $N(0, 1)$ 随机数，逐一代入 (3.11)，算得瞬态利率的逐日随机变动 $\Delta r(t)$。最后，用 $r(t)=r(0)+\sum_{s=1/288}^{t}\Delta r(s)$ 模拟出瞬态利率 $r(t)$ 的运动轨迹。实证研究显示，当 $\Delta r(t)$ 的波动幅度太大时，$r(t)$ 会出现负值，这是早期期限结构模型的共同缺陷。为了弥补这个缺陷，后来的期限结构模型的波动函数经常被人为地加上平方根号项 (例如，Hull-White(1990) 的 $dr=k(\theta-r)dt+\sigma\sqrt{r}dz$ 模型)，以保证 $r(t)$ 非负。本文则通过缩小 ε 所服从的正态分布的方差，来限制 $\Delta r(t)$ 的波动幅度。在国债 961 的模拟中，若取正态分布的方差为 0.4，就可保证 $r(t)$ 非负。把模拟值 $r(t)$, $t=k/228$, $k=1,2,\cdots, 228$, 代入 $P(r,t)=100A(t, T)e^{-r(t)(T-t)}$，就可算出国债 961 逐日收盘价的估计值 $\widehat{P}(r,t)$，图 2 显示了国债 961 逐日收盘价估计值与实际值的吻合状况。

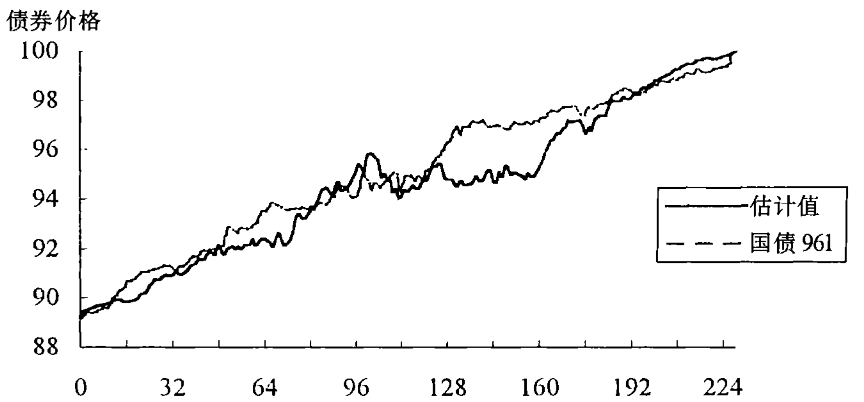

图 2　国债 961 逐日收盘价模拟值与实际值的吻合状况

从图 2 可看到：除了二个交易日区间 ([50, 70] 和 [128, 180]) 之外，估计值均能与实际值较好地吻合。而这两个不吻合区间的开端正好是 1996 年 5 月初和 8 月底的两次银行降息，利息下调导致债价跃升。若对模型参数 (例如，$r(0)$ 和 $F'(0, t)$ 进行调整，可消除这类误差。

4 小结

利用国债961逐日收盘价格对债价波动函数为二次函数的假设进行检验的结果，以及国债961的定价模型的建立及其估计值与债价实际值的吻合状况，从实证的角度肯定了理论模型的风险中性方法和二次波动函数假设。由于篇幅限制，一些有关模型参数估计的计算和调整过程以及中间结果被省略，有兴趣的读者可向本文作者索取这些资料。

本文的定价模型 (3.10) 只对国债961适用，如果要用它对其他零息票国债的价格进行估计或预测，必须对模型参数（例如，$r(0)$ 和 $F(0,\ t)$）以及期限 T 和时间 t 的取值范围进行修改，方可适用。定价模型是动态模型，一旦金融市场环境因素（例如，银行利率、股市行情、国家政策法令等）发生重大变化，也必须对模型参数作出相应的调整。若对定价模型 (3.10) 加以扩展，还可用来估计和预测附息国债（例如，七年附息国债963或十年附息国债966）的价格。这方面的工作，拟以另文发表。

参考文献：

〔1〕 Chesney M, Elliott R J, Madan D, Yang H. Diffusion coefficient estimation and asset pricing with risk premia and sensitivities are time varying. mathematical Finance, 1993, 3(2): 85－99.
〔2〕 Cox J., Ingersoll J., Ross S. A. A Theory of the Term Structure of interest Rates. Econometrica, 1985, 53(2): 385－407.
〔3〕 Duffie D. Dynamic Asset Pricing Theory. Princeton University Press, 1992.
〔4〕 Harrison M., Kreps D. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Security Markets. Journal of Economic Theory, 1979, 20: 381－408.
〔5〕 Heath D., Jarrow R., Morton A. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rate: A New Methodology for Contingent Claim Valuation. Econometrica, 1992, 60: 77－105.
〔6〕 Ho T. S. Y., Lee S. B. Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims. The Journal of Finance, 1986, 41(5): 1011－1029.
〔7〕 Hull J. C. Options, Futures and Other Derivative Securities, Prentice－Hall, Inc., 1993.
〔8〕 Hull J., White A. Pricing Interest Rate Derivative Securities. The Review of Financial Studies, 1990, 3: 573－592.
〔9〕 Mihlstein G. N. Approximate Integration of Stochastic Differential Equations. Theory Probability Application, 19: 557－562.
〔10〕 Vasicek O. An Equilibrium Characterization of the Term Structure. Journal of Financial Economics, 1977, (5): 177－188.
〔11〕 Wilmott P., Dewynne J., Howison S. Option Pricing: Mathematical Models and Computation. Oxford UK: Oxford Financial Press, 1993.

Stochastic Term Structure and Bond Pricing Models

Wu Shuosi

(Dept. of Management Information Science, Hua Qiao University, Quanzhou)

Abstract: Assumption that diffusion function of zero－coupon bond's price is quadratic function of time is the key for modeling stochastic term structure with risk－neutral approach, and stochastic term structure model is the basis for bond pricing models. Not only theoretic models but also empirical studies with historical data from the bond market of China, as well as a specific annual spot rate stochastic term structure model and a pricing model for Bond 961 are introduced in this paper.

Key words: spot interest rate; stochastic term structure; pricing model

附录　国债 961 逐日收盘价与债价波动率估计值表

t	国债961价格	$exp(Pt)$	$v(t,T)$估计值
0			0
1	89.1	4.96E+38	0.029404677
2	89.26	5.82E+38	0.029351968
3	89.42	6.83E+38	0.01758969
4	89.31	6.12E+38	0.003415447
5	89.33	6.24E+38	0.006898345
6	89.37	6.5E+38	0.01964597
7	89.48	7.26E+38	0.001679082
8	89.47	7.18E+38	0.015893601
9	89.56	7.86E+38	0.009818404
10	89.5	7.4E+38	0.037353166
11	89.7	9.04E+38	0.056632594
12	89.99	1.21E+39	0.008602918
13	90.04	1.27E+39	0.035091067
14	90.23	1.54E+39	0.008580035
15	90.28	1.61E+39	0.021324327
16	90.4	1.82E+39	0.0517739
17	90.67	2.38E+39	0.008121976
18	90.62	2.27E+39	0.019374976
19	90.73	2.53E+39	0.019351486
20	90.84	2.83E+39	0.012052505
21	90.91	3.03E+39	0.019313171
22	91.02	3.38E+39	0.003284921
23	91	3.32E+39	0
24	91	3.32E+39	0.013819859
25	91.08	3.59E+39	0
26	91.08	3.59E+39	0.008499962
27	91.13	3.78E+39	0.010245928
28	91.19	4.01E+39	0.008489709
29	91.24	4.22E+39	0.010233575
30	91.3	4.48E+39	0.009631284
31	91.24	4.22E+39	0
32	91.24	4.22E+39	0.021620423
33	91.1	3.67E+39	0.004898602
34	91.07	3.56E+39	0.038744497
35	91.28	4.39E+39	0.008067699
36	91.23	4.18E+39	0.015586983
37	91.32	4.57E+39	0.017389904
38	91.42	5.05E+39	0.030606453
39	91.59	5.98E+39	0.015525718
40	91.68	6.55E+39	0.011134718
41	91.61	6.11E+39	0.022882465
42	91.74	6.95E+39	0.024733863
43	91.88	8E+39	0.004857016
44	91.85	7.76E+39	0.003320997
45	91.87	7.92E+39	0.010163398
46	91.93	8.41E+39	0.005002212
47	91.96	8.66E+39	0.0016338
48	91.95	8.58E+39	0.01190701
49	92.02	9.2E+39	0.00499732
50	92.05	9.48E+39	0.093224615
51	92.5	1.49E+40	0.068408446
52	92.85	2.11E+40	0.01099441
53	92.78	1.97E+40	0.012512586
54	92.7	1.82E+40	0.016967315
55	92.59	1.63E+40	0.036106581
56	92.79	1.99E+40	0.001635459
57	92.8	2.01E+40	0
58	92.8	2.01E+40	0
59	92.8	2.01E+40	0
60	92.8	2.01E+40	0.026332365
61	92.95	2.33E+40	0.008328957
62	93	2.45E+40	0.056803787
63	93.3	3.31E+40	0.035831815
64	93.5	4.04E+40	0.009404666
65	93.44	3.81E+40	0.037761786
66	93.65	4.7E+40	0.02987765
67	93.82	5.57E+40	0.009372589
68	93.76	5.24E+40	0.007854304
69	93.71	4.99E+40	0.004762167
70	93.68	4.84E+40	0.009386595
71	93.62	4.56E+40	0.016800577
72	93.51	4.08E+40	0
73	93.51	4.08E+40	0.015206935
74	93.6	4.47E+40	0.00786773
75	93.55	4.25E+40	0.004915589
76	93.58	4.38E+40	0.004768782
77	93.55	4.25E+40	0.016975372
78	93.65	4.7E+40	0.01090049
79	93.58	4.38E+40	0.007869412
80	93.53	4.16E+40	0.029915983
81	93.7	4.94E+40	0.029211373
82	93.5	4.04E+40	0.045868339
83	93.75	5.19E+40	0.016939158
84	93.85	5.74E+40	0.010877261
85	93.78	5.35E+40	0.01088538
86	93.71	4.99E+40	0.0242139
87	93.85	5.74E+40	0.033666485
88	94.04	6.94E+40	0.003243657
89	94.06	7.08E+40	0.06054119
90	94.38	9.74E+40	0.022210877
91	94.51	1.11E+41	0.004721856
92	94.48	1.08E+41	0.001590222
93	94.47	1.07E+41	0.03782038
94	94.2	8.14E+40	0.027737365
95	94.01	6.73E+40	0.006554932
96	94.05	7E+40	0.008231543
97	94.1	7.36E+40	0.067245284
98	94.45	1.04E+41	0.117224751
99	95	1.81E+41	0.028811638
100	94.8	1.48E+41	0.020808517
101	94.66	1.29E+41	0.048225094
102	94.3	8.99E+40	0.067102664
103	94.65	1.28E+41	0.01661775
104	94.54	1.14E+41	0.018060757
105	94.42	1.01E+41	0.031539048
106	94.6	1.21E+41	0.013293944
107	94.68	1.32E+41	0.029552618
108	94.85	1.56E+41	0.014992098
109	94.94	1.71E+41	0.018493368
110	95.05	1.9E+41	0.016547818
111	94.94	1.71E+41	0.078469771
112	94.26	8.64E+40	0.07405415
113	94.64	1.26E+41	0.055819444
114	94.94	1.71E+41	0.159044332
115	94.88	1.61E+41	0.006494827
116	94.92	1.67E+41	0.03394278
117	94.68	1.32E+41	0.035309551
118	94.88	1.61E+41	0
119	94.88	1.61E+41	0.026215907
120	94.7	1.34E+41	0.07842017
121	95.1	2E+41	0.008140658
122	95.15	2.1E+41	0.013217101
123	95.23	2.28E+41	0.059797379
124	95.55	3.14E+41	0.021938908
125	95.68	3.58E+41	0.011442825
126	95.75	3.83E+41	0.03491497
127	95.95	4.68E+41	0.042686528
128	96.19	5.95E+41	0.014783247
129	96.28	6.51E+41	0.03472277
130	96.48	7.96E+41	0.059022641
131	96.8	1.1E+42	0.016405434
132	96.9	1.21E+42	0.046017668
133	96.55	8.53E+41	0.065538904
134	96.9	1.21E+42	0.003085588
135	96.88	1.19E+42	0.001566114
136	96.89	1.2E+42	0.036417188
137	97.1	1.48E+42	0.003079233
138	97.08	1.45E+42	0.004596855
139	97.05	1.41E+42	0.00797709
140	97.1	1.48E+42	0.01295167
141	97.18	1.6E+42	0.035573629
142	96.92	1.24E+42	0.007598221
143	96.87	1.18E+42	0.004747119
144	96.9	1.21E+42	0
145	96.9	1.21E+42	0.016388504
146	97	1.34E+42	0.014813644
147	96.9	1.21E+42	0.014828932
148	96.8	1.1E+42	0.003088776
149	96.78	1.07E+42	0.004751533
150	96.81	1.11E+42	0.032637121
151	97	1.34E+42	0.016371609
152	97.1	1.48E+42	0.014798388
153	97	1.34E+42	0
154	97	1.34E+42	0
155	97	1.34E+42	0.019847013
156	97.12	1.51E+42	0.017580972
157	97	1.34E+42	0.006352878
158	97.04	1.39E+42	0.018093161
159	97.15	1.55E+42	0.007580232
160	97.1	1.48E+42	0.030668557
161	97.28	1.77E+42	0.004587404
162	97.25	1.72E+42	0.012931693
163	97.33	1.86E+42	0.02874799
164	97.5	2.21E+42	0.014584621
165	97.59	2.41E+42	0.013317047
166	97.5	2.21E+42	0.006320299
167	97.54	2.3E+42	0.018000414
168	97.65	2.56E+42	0.009561816
169	97.71	2.72E+42	0.004567216
170	97.68	2.64E+42	0.003122784
171	97.7	2.7E+42	0.00470679
172	97.73	2.78E+42	0.004566281
173	97.7	2.7E+42	0.03052099
174	97.48	2.16E+42	0.0147407
175	97.38	1.96E+42	0.003070379
176	97.36	1.92E+42	0.054259985
177	97.66	2.59E+42	0.001538442
178	97.65	2.56E+42	0.006063149
179	97.61	2.46E+42	0.017987505
180	97.72	2.75E+42	0.012869496
181	97.8	2.98E+42	0
182	97.8	2.98E+42	0.004701977
183	97.83	3.07E+42	0.019678629
184	97.95	3.46E+42	0.017925067
185	98.06	3.86E+42	0.028533978
186	98.23	4.58E+42	0.004681394
187	98.26	4.72E+42	0.021333835
188	98.39	5.37E+42	0
189	98.39	5.37E+42	0.017844907
190	98.5	6E+42	0.01733466
191	98.38	5.32E+42	0.003100565
192	98.4	5.43E+42	0.027816114
193	98.2	4.41E+42	0.00602919
194	98.16	4.27E+42	0.003107514
195	98.18	4.36E+42	0.017883076
196	98.29	4.86E+42	0.001543943
197	98.3	4.91E+42	0.024859038
198	98.45	5.71E+42	0.009484118
199	98.51	6.06E+42	0.016120658
200	98.61	6.7E+42	0.003032081
201	98.59	6.56E+42	0.026574264
202	98.75	7.7E+42	0.007839763
203	98.8	8.1E+42	0.007453639
204	98.75	7.7E+42	0.007457413
205	98.7	7.33E+42	0.024758293
206	98.85	8.51E+42	0.003085822
207	98.87	8.68E+42	0.010324982
208	98.8	8.1E+42	0.024733234
209	98.95	9.41E+42	0.004509981
210	98.92	9.13E+42	0.028285907
211	99.09	1.08E+43	0.005975038
212	99.05	1.04E+43	0.001532097
213	99.06	1.05E+43	0.009425715
214	99.12	1.11E+43	0.02643217
215	99.28	1.31E+43	0.017198469
216	99.16	1.16E+43	0.00597082
217	99.12	1.11E+43	0.001531015
218	99.13	1.13E+43	0.003077106
219	99.15	1.15E+43	0.00941716
220	99.21	1.22E+43	0.011035677
221	99.28	1.31E+43	0.003072457
222	99.3	1.33E+43	0
223	99.3	1.33E+43	0.009402934
224	99.36	1.42E+43	0.00151212
225	99.35	1.4E+43	0.024596311
226	99.5	1.63E+43	0.083876342
227	99.94	2.53E+43	0.008798642
228	99.88	2.38E+43	0

注：国债 961 逐日收盘价数据来源于《中国证券报》1996 年 2 月 1 日至 1997 年 1 月 4 日。