

文章编号: 1003-207(2000)03-0013-07

O-D 需求估计的双层规划模型 及基于灵敏度分析的求解算法

安梅, 高自友, 杨璐

(北方交通大学交通运输学院, 北京 100044)

摘要: 本文在考虑三种交通模式(一般机动车, 公交车, 自行车)的基础上, 建立了一般拥挤网络多模式 O-D 需求估计问题的双层规划模型, 给出了一个基于灵敏度分析的启发式求解算法, 并进行了数值试验。试验结果表明, 本文所给的模型和算法不仅能较好地给出 O-D 需求的估计值, 而且同时还给出了各模式路段流量的估计值。

关键词: 均衡配流; 双层规划; 灵敏度分析; O-D 需求

中图分类号: C931; O224 **文献标识码:** A

1 引言

O-D 需求估计问题一直是国内外城市交通研究的热点之一。因为在交通网络中对全部路段上的交通量进行观测需要花费巨大的人力和财力, 所以利用部分路段上流量的观测值及其它前期数据来估计交通网络中的 O-D 需求量, 是一个极具研究价值的课题。

由于双层规划可以将一个复杂的问题分成两个相互作用相互影响的层面来考虑, 从而能够对问题进行更加全面的描述, 所以, 近来双层规划也被用于 O-D 需求估计的研究, 取得了很多成果^[1-5]。这一思想的引进对 O-D 需求估计的研究起到了巨大的推动作用。

但在目前已有的 O-D 需求估计的研究中, 都没有考虑到城市混合交通中存在多种交通模式的问题。本文针对我国城市交通的实际情况, 综合考虑了三种基本的交通模式, 即一般机动车、公交车和自行车, 建立了一般拥挤网络多模式 O-D 需求估计问题的双层规划模型, 给出了基于灵敏度分析的启发式求解算法。并在模拟的小型交通网络上进行了初步的数值试验, 说明本文所给模型和算法是行之有效的。试验结果不仅给出了 O-D 需求的估计值, 同时还给出了各模式路段流量的估计值。此外, 对一些相关问题也进行了讨论。

本文中将要用到的符号和记号如下:

n —— 表示交通模式。 $n=1$ 表示一般机动车, $n=2$ 表示公交车(含地铁), $n=3$ 表示自行车。在本文下面的内容中, 如不加特别说明, 一律有下标 $n=1, 2, 3$ 。

A 和 a —— A 为交通网络中全体路段的集合。 a 表示一个路段。 $a \in A$ 。

收稿日期: 1999-10-25; 修订日期: 2000-03-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(79970014); 教育部“跨世纪优秀人才培养计划”基金资助项目

作者简介: 安梅(1962-), 女(汉族), 湖北省唐山市人, 中科院自动化所, 博士, 研究方向: 交通运输, 规划与管理, 运筹等。

\bar{A} ——由网络中部分路段组成的集合。 $\bar{A} \subset A$ 。

W 和 w —— W 为全体 O-D 对的集合。 w 表示一个 O-D 对。 $w \in W$ 。

K_w 和 K_w —— K_w 为 O-D 对 $w \in W$ 间所有路径组成的集合。 k_w 为 O-D 对 $w \in W$ 间的一条路径。 $k_w \in K_w$ 。

$f_n = [\dots, f_{k_{wn}}, \dots]^T$ ——第 n 种交通模式的路径流量列向量。其中 $f_{k_{wn}}$ 为第 n 种交通模式在 O-D 对 w 间路径 $k_w \in K_w$ 上的流量。

$\bar{Q} = [\dots, \bar{q}_w, \dots]^T$ ——已知的目标 O-D 需求向量; \bar{q}_w 为 O-D 对 $w \in W$ 间需求的目标值。

$Q = [\dots, q_w, \dots]^T$ ——O-D 需求向量的估计值; q_w 为 O-D 对 $w \in W$ 间交通需求量的估计值。

$Q_n = [\dots, q_{wn}, \dots]^T$ ——第 n 种交通模式的 O-D 需求向量的估计值; q_{wn} 为 O-D 对 $w \in W$ 间第 n 种交通模式的交通需求量的估计值。应该有 $\sum_{n=1}^3 Q_n = Q$ 。

$V_n = [\dots, v_{na}, \dots]^T$ ——第 n 种交通模式的路段流量估计值向量; v_{na} 是路段 $a \in A$ 上第 n 种交通模式的路段流量估计值。

$V_{n\bar{A}}$ —— $V_{n\bar{A}}$ 是 V_n 中对应 $\bar{A} \subset A$ 的向量。

$\bar{V}_{n\bar{A}} = [\dots, \bar{v}_{na}, \dots]^T$ ——第 n 种交通模式的路段流量观测值向量, $\bar{A} \subset A$; \bar{v}_{na} 是路段 $a \in \bar{A}$ 上第 n 种交通模式的路段流量观测值。

$T_n(V_n) = [\dots, t_{na}(v_{na}), \dots]^T$ ——第 n 种交通模式的路段行驶阻抗列向量; $t_{na}(v_{na})$ 为路段 $a \in A$ 上第 n 种交通模式的行驶阻抗。

$\nabla_Q V_n$ —— V_n 对 Q 的一阶偏导数矩阵。

$\nabla_Q V_{n\bar{A}}$ ——是 $\nabla_Q V_n$ 中对应 $\bar{A} \subset A$ 的矩阵。

Δ_n 和 Λ_n ——第 n 种模式的路段/路径之间和 O-D 对/路径之间的关联矩阵。

2 双层规划简介

双层规划问题定义为

$$(U) \quad \min_x \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}))$$
$$s. t. \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) \leq 0$$

这里, $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ 是下面问题的解

$$(L) \quad \min_y \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$
$$s. t. \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0$$

可以看出, 双层规划问题由两个子问题(U)和(L)构成, 其中(U)称为上层规划, (L)称为下层规划。 F 是上层规划的目标函数, f 是下层规划的目标函数。上层决策变量 \mathbf{y} 是下层决策变量 \mathbf{x} 的函数, 即 $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ 。上层决策者通过 \mathbf{x} 的值来影响下层决策的可行约束集, 下层决策者通过 $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ 来影响上层决策。上层规划和下层规划相互影响相互制约。

3 拥挤网络多模式 O-D 需求估计问题的双层规划模型

广义最小二乘思想(GLS)在众多文献中被频繁使用。其思想是使估计值和观测值之间的误差的加权平方和达到最小。应用在城市混合交通的三种交通模式的情形, 我们有

$$\min (\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}})^T U^{-1} (\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}}) + \sum_{n=1}^3 (\mathbf{V}_n \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{V}}_n \bar{\mathbf{A}})^T H_n^{-1} (\mathbf{V}_n \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{V}}_n \bar{\mathbf{A}})$$

这里, U 和 H_1, H_2, H_3 是权系数矩阵, 可被解释为协方差矩阵。本文算例中均取为单位矩阵。将 GLS 作为上层问题, 将文献[6]提出的城市混合交通均衡配流的等价极小值数学规划模型作为下层问题, 我们可以得到以下的双层规划模型(BM)。

$$\text{BM: } \min_{\mathbf{Q}} (\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}})^T U^{-1} (\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}}) + \sum_{n=1}^3 (\mathbf{V}_n \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{V}}_n \bar{\mathbf{A}})^T H_n^{-1} (\mathbf{V}_n \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{V}}_n \bar{\mathbf{A}})$$

这里 $\mathbf{V}_n = \{ \dots, v_{na}, \dots \}^T, a \in A$ 是下列问题的解

$$\min_{\mathbf{v}_n, \mu_n} \left\{ \sum_{n=1}^3 \left[\sum_a \int_0^{v_{na}} t_{na}(x) dx + \frac{1}{\gamma} \left(\sum_w q_{wn} \ln q_{wn} - q_{wn} \right) - \sum_w \varphi_n q_{wn} \right] \right\}$$

$$s. t. \quad \Lambda_n \mathbf{f}_n - \mathbf{Q}_n(\mu) = 0,$$

$$\sum_{n=1}^3 \mathbf{Q}_n(\mu) - \mathbf{Q} = 0,$$

$$\Delta_n \mathbf{f}_n = \mathbf{V}_n,$$

$$\mathbf{f}_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3.$$

下层问题的模式分离形式为 $q_{wn} = q_w \frac{e^{-\gamma(\mu_{wn} - \varphi_n)}}{\sum_{m=1}^3 e^{-\gamma(\mu_{wm} - \varphi_m)}} \forall w \in W, \gamma$ 为校正参数, φ_n 代表第 n 种

模式的吸引测度^[6], μ_{wn} 为 O-D 对 $w \in W$ 间第 n 种交通方式的最小阻抗路径上的阻抗值。记 $\mu = [\dots, \mu_{wn}, \dots]^T$, 令 $P_n(\mu)$ 为行数和列数均为 O-D 对总数的对角矩阵, 对角线上第 w 个元素取为 $\frac{e^{-\gamma(\mu_{wn} - \varphi_n)}}{\sum_{m=1}^3 e^{-\gamma(\mu_{wm} - \varphi_m)}}$, 我们可得到模式分离函数的矩阵形式 $\mathbf{Q}_n(\mu) = P_n(\mu) \mathbf{Q}$ 。

4 下层规划均衡配流模型的灵敏度分析

我们考虑在路段阻抗函数和 O-D 需求中存在混合参数向量 ε , 下层问题成为

$$\min_{\mathbf{v}_n, \mathbf{Q}_n} F(\mathbf{V}_n, \mathbf{Q}_n(\mu, \varepsilon)) = \sum_{n=1}^3 \int_a \sum_a \int_0^{v_{an}} t_{an}(x, \varepsilon) dx + \frac{1}{\gamma} \left(\sum_w q_{wn}(\mu, \varepsilon) \ln q_{wn}(\mu, \varepsilon) - q_{wn}(\mu, \varepsilon) \right) - \sum_w \varphi_n q_{wn}(\mu, \varepsilon) \tag{1.1}$$

$$s. t. \quad \Lambda_n \mathbf{f}_n - \mathbf{Q}_n(\mu, \varepsilon) = 0 \tag{1.2}$$

$$\sum_{n=1}^3 \mathbf{Q}_n(\mu, \varepsilon) - \mathbf{Q}(\varepsilon) = 0 \tag{1.3}$$

$$\Delta_n \mathbf{f}_n = \mathbf{V}_n \tag{1.4}$$

$$\mathbf{f}_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3 \tag{1.5}$$

问题(1)的 Lagrange 函数为

$$L(\mathbf{V}_n, \mathbf{Q}_n, \pi_n, \mu_n, \lambda, \varepsilon) = F - \sum_{n=1}^3 \pi_n^T \mathbf{f}_n - \sum_{n=1}^3 \mu_n^T (\Lambda_n \mathbf{f}_n - \mathbf{Q}_n) - \lambda \left(\sum_{n=1}^3 \mathbf{Q}_n - \mathbf{Q} \right).$$

假定 $t_{an}(v_{an}, \varepsilon)$ 一次连续可微, 我们有

$$\nabla_{\mathbf{f}_n} F = \Delta_n^T \mathbf{T}_n, \quad \nabla_{\mathbf{f}_n} (\nabla_{\mathbf{f}_n} F) = \Delta_n^T (\nabla_{\mathbf{v}_n} \mathbf{T}_n) \Delta_n. \tag{2}$$

$$\text{于是 } \nabla_{\mathbf{f}_n} L = \Delta_n^T \mathbf{T}_n - \pi_n - \Lambda_n^T \mu_n. \tag{3}$$

设 $\mathbf{f}_n^* \geq 0$ 是 $\varepsilon = 0$ 时均衡条件下路径流量集合的一个非退化的极点^[2]。对于问题(1), 利用

(3) 式, 在 $\varepsilon=0$ 处, K-T 必要条件成为

$$\Delta_n^T \mathbf{T}_n(\mathbf{V}_n^*, 0) - \pi_n - \Lambda_n^T \mu_n = 0, \tag{4.1}$$

$$\pi_n^T \mathbf{f}_n^* = 0, \tag{4.2}$$

$$\Lambda_n \mathbf{f}_n^* - \mathbf{Q}_n(\mu, 0) = 0, \tag{4.3}$$

$$\pi_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3 \tag{4.4}$$

我们在 $\varepsilon=0$ 假定严格互补条件成立。即

若 $f_{k_n}^*(0) = 0$, 则 $\pi_{k_n}(0) > 0$; 若 $f_{k_n}^*(0) > 0$, 则 $\pi_{k_n}(0) = 0$ 。

这意味着在 $\varepsilon=0$ 附近非积极约束集保持不变, 且非积极约束对应的 Lagrange 乘子保持为零。只考虑非退化极点 \mathbf{f}_n^* 的那些正的分量, 去掉非积极约束, (4) 式简化成为

$$\Delta_n^{0T} \mathbf{T}_n(\mathbf{V}_n^*, 0) - \Lambda_n^{0T} \mu_n = 0 \tag{5.1}$$

$$\Lambda_n^0 \mathbf{f}_n^* - \mathbf{Q}_n(\mu, 0) = 0. \quad (n = 1, 2, 3) \tag{5.2}$$

这里上标“0”表示简化后的矩阵和向量。

$\varepsilon=0$ 时, (5) 式对于 $(\mathbf{f}_1^0, \mathbf{f}_2^0, \mathbf{f}_3^0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ 的 Jacobian 矩阵为(简记为 J):

$$J = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Delta_1^{0T} \nabla_{\mathbf{V}_1} \mathbf{T}_1 \Delta_1^0 & 0 & 0 & -\Lambda_1^{0T} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2^{0T} \nabla_{\mathbf{V}_2} \mathbf{T}_2 \Delta_2^0 & 0 & 0 & -\Lambda_2^{0T} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_3^{0T} \nabla_{\mathbf{V}_3} \mathbf{T}_3 \Delta_3^0 & 0 & 0 & -\Lambda_3^{0T} \\ \hline \Lambda_1^0 & 0 & 0 & -\nabla_{\mu_1} \mathbf{Q}_1 & -\nabla_{\mu_2} \mathbf{Q}_1 & -\nabla_{\mu_3} \mathbf{Q}_1 \\ 0 & \Lambda_2^0 & 0 & -\nabla_{\mu_1} \mathbf{Q}_2 & -\nabla_{\mu_2} \mathbf{Q}_2 & -\nabla_{\mu_3} \mathbf{Q}_2 \\ 0 & 0 & \Lambda_3^0 & -\nabla_{\mu_1} \mathbf{Q}_3 & -\nabla_{\mu_2} \mathbf{Q}_3 & -\nabla_{\mu_3} \mathbf{Q}_3 \end{array} \right].$$

将 J 按虚线分块记为 $J = \begin{bmatrix} G & -M^T \\ M & Z \end{bmatrix}$, 并记 $J^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$, 用 I 代表单位矩阵, 则有

$$\begin{aligned} B_{22} &= [MG^{-1}M^T + Z]^{-1}, & B_{12} &= G^{-1}M^TB_{22}, \\ B_{21} &= -B_{22}MG^{-1}, & B_{11} &= G^{-1}[I + M^TB_{21}]. \end{aligned} \tag{6}$$

利用模式分离函数的矩阵形式, $\varepsilon=0$ 时, (5) 式对于 ε 的 Jacobian 矩阵可写为

$$J_\varepsilon = \left[\begin{array}{c} \Delta_1^{0T} \nabla_\varepsilon \mathbf{T}_1(\mathbf{V}_1^*, 0) \\ \Delta_2^{0T} \nabla_\varepsilon \mathbf{T}_2(\mathbf{V}_2^*, 0) \\ \Delta_3^{0T} \nabla_\varepsilon \mathbf{T}_3(\mathbf{V}_3^*, 0) \\ -\nabla_\varepsilon \mathbf{Q}_1(\mu, 0) \\ -\nabla_\varepsilon \mathbf{Q}_2(\mu, 0) \\ -\nabla_\varepsilon \mathbf{Q}_3(\mu, 0) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \Delta_1^{0T} \nabla_\varepsilon \mathbf{T}_1(\mathbf{V}_1^*, 0) \\ \Delta_2^{0T} \nabla_\varepsilon \mathbf{T}_2(\mathbf{V}_2^*, 0) \\ \Delta_3^{0T} \nabla_\varepsilon \mathbf{T}_3(\mathbf{V}_3^*, 0) \\ -P_1(\mu) \nabla_\varepsilon \mathbf{Q}(0) \\ -P_2(\mu) \nabla_\varepsilon \mathbf{Q}(0) \\ -P_3(\mu) \nabla_\varepsilon \mathbf{Q}(0) \end{array} \right]. \tag{7}$$

$$\text{由文献[7], } \nabla_\varepsilon[\mathbf{f}_1^0, \mathbf{f}_2^0, \mathbf{f}_3^0, \mu_1, \mu_2, \mu_3]^T = -J^{-1}J_\varepsilon = -\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} J_\varepsilon. \tag{8}$$

$$\text{因此 } \nabla_\varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^0 \\ \mathbf{f}_2^0 \\ \mathbf{f}_3^0 \end{bmatrix} = -B_{11} \begin{bmatrix} \Delta_1^{0T} \nabla_\varepsilon \mathbf{T}_1(\mathbf{V}_1^*, 0) \\ \Delta_2^{0T} \nabla_\varepsilon \mathbf{T}_2(\mathbf{V}_2^*, 0) \\ \Delta_3^{0T} \nabla_\varepsilon \mathbf{T}_3(\mathbf{V}_3^*, 0) \end{bmatrix} + B_{12} \begin{bmatrix} P_1(\mu) \nabla_\varepsilon \mathbf{Q}(0) \\ P_2(\mu) \nabla_\varepsilon \mathbf{Q}(0) \\ P_3(\mu) \nabla_\varepsilon \mathbf{Q}(0) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\nabla_{\varepsilon} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = -B_{21} \begin{bmatrix} \Delta_1^{0T} \nabla_{\varepsilon} \mathbf{T}_1(\mathbf{V}_1^*, 0) \\ \Delta_2^{0T} \nabla_{\varepsilon} \mathbf{T}_2(\mathbf{V}_2^*, 0) \\ \Delta_3^{0T} \nabla_{\varepsilon} \mathbf{T}_3(\mathbf{V}_3^*, 0) \end{bmatrix} + B_{22} \begin{bmatrix} P_1(\mu) \nabla_{\varepsilon} \mathbf{Q}(0) \\ P_2(\mu) \nabla_{\varepsilon} \mathbf{Q}(0) \\ P_3(\mu) \nabla_{\varepsilon} \mathbf{Q}(0) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

于是 $\nabla_{\varepsilon} \mathbf{V}_n = \Delta_n^0 \nabla_{\varepsilon} \mathbf{f}_n^0,$ (11)

$$\nabla_{\varepsilon} \mathbf{Q}_n = \nabla_{\varepsilon} \mathbf{Q}_n(\mu, \varepsilon) + \nabla_{\mu} \mathbf{Q}_n(\mu, \varepsilon) \nabla_{\varepsilon} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

5 基于灵敏度分析的求解算法

由于上层问题和下层问题的相互制约,使得双层规划问题求解很困难。尤其是对于大规模的交通网络优化问题。一般常用基于灵敏度分析的迭代法来求解。

先给定 O-D 需求的初始值求解下层规划。假定下层规划达到最优时,路段流量 \mathbf{V}_n 和 O-D 需求 \mathbf{Q} 有近似关系式 $\mathbf{V}_n \approx \mathbf{V}_n^{(j)} + \nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{V}_n^{(j)} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{(j)})$, 其中 $\nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{V}_n^{(j)}$ 为 \mathbf{V}_n 对 \mathbf{Q} 的一阶偏导数矩阵 $\nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{V}_n$ 在 $\mathbf{Q}^{(j)}$ 点处取的值。 $\nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{V}_n$ 可以用灵敏度分析方法得到(令 $\mathbf{Q} = \varepsilon$ 即可)。将此近似关系式代入上层规划的目标函数中,则上层规划成为关于 \mathbf{Q} 的二次规划问题,可直接进行求解。然后再用得到的新的 O-D 需求估计值,重新求解下层规划问题。如此循环下去,可望收敛到双层规划问题的近似解。

在本文提出的算法中,下层规划的求解采用文献[6]提出的收敛的两阶段算法。下面详细写出本文提出的求解算法(记为算法 1)。

算法 1 Step 1 初始化。令 $j := 1$ 。给出目标 O2D 需求 $\bar{\mathbf{Q}}$ 和初始 O2D 需求 $\mathbf{Q}^{(1)}$, 以及三种模式的路段流量的观测值 $\bar{\mathbf{V}}_{nA}$; 给定参数 C, U_n 和权矩阵 U, H_n (本文算例中取为单位矩阵)。

Step 2 用 $\mathbf{Q}^{(j)}$ 及文献[6]提出的收敛的两阶段算法求解下层规划, 得到均衡状态下的唯一的路段流量 $\mathbf{V}_n^{(j)} (n = 1, 2, 3)$ 。

Step 3 用灵敏度分析方法求出 $\nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{V}_n^{(j)}$ 。

Step 4 求解上层规划, 易得 $\mathbf{Q}^{(j+1)}$:

$$\mathbf{Q}^{(j+1)} = [U^{-1} + \sum_{n=1}^3 (\nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{V}_{nA}^{(j)})^T H_n^{-1} (\nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{V}_{nA}^{(j)})]^{-1} [U^{-1} \bar{\mathbf{Q}} + \sum_{n=1}^3 (\nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{V}_{nA}^{(j)})^T H_n^{-1} (\bar{\mathbf{V}}_{nA} - \mathbf{V}_{nA}^{(j)}) + \sum_{n=1}^3 (\nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{V}_{nA}^{(j)})^T H_n^{-1} (\nabla_{\mathbf{Q}} \mathbf{V}_{nA}^{(j)}) \mathbf{Q}^{(j)}]$$

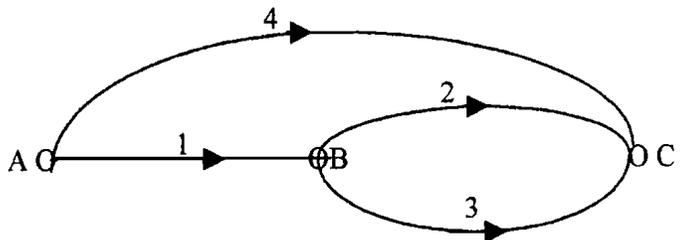
Step 5 若满足收敛准则, 则停止迭代; 否则, 令 $j := j + 1$, 转 Step2。

6 数值试验

本节中, 为了说明本文所提出的算法的具体应用, 我们对下面的例子进行了数值计算, 并将所得的结果列于表中。

所用城市交通网络与文献[3]相同:

O2D 对有两个 $A \rightarrow C$ 和 $B \rightarrow C$, 目标 O2D 需求为 $\bar{\mathbf{Q}} = [9, 9]^T$; $U = H_n$ 取



为单位阵。

路径共有五条: $f_{1n} = \{1, 2\}, f_{2n} = \{1, 3\}, f_{3n} = \{4\}, f_{4n} = \{2\}, f_{5n} = \{3\}$ 。 $n = 1, 2, 3$ 。

$$S_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad +_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}。$$

三种模式的路段阻抗函数 t_{na} 分别为

$$\begin{cases} t_{11} = 18 + v_{11}^4 \\ t_{12} = 8 + 8v_{12}^4 \\ t_{13} = 23 + 6v_{13}^4 \\ t_{14} = 38 + 5v_{14}^4 \end{cases}, \begin{cases} t_{21} = 22 + v_{21}^4 \\ t_{22} = 12 + 8v_{22}^4 \\ t_{23} = 27 + 6v_{23}^4 \\ t_{24} = 42 + 5v_{24}^4 \end{cases}, \begin{cases} t_{31} = 20 + v_{31}^4 \\ t_{32} = 10 + 8v_{32}^4 \\ t_{33} = 25 + 6v_{33}^4 \\ t_{34} = 40 + 5v_{34}^4 \end{cases}。$$

三种模式的路段流量观测值 v_{na} 分别为

$$\bar{v}_{12} = 2, \bar{v}_{13} = 215, \bar{v}_{14} = 315, \bar{v}_{22} = 3, \bar{v}_{23} = 315, \bar{v}_{24} = 415; \bar{v}_{32} = 215, \bar{v}_{33} = 3, \bar{v}_{34} = 4。$$

O2D 需求初始值为 $Q^{(1)} = [9, 9]^T$ 。仿照文献[6], 取定参数为 $C = 011, U_1 = 5, U_2 = 8, U_3 = 11$ 。数值试验结果见表 1。

表 1 三种模式的 O2D 需求迭代数据

迭代次数	O2D 需求估计值		模式 1 路段流量	模式 2 路段流量	模式 3 路段流量
0	91	91	(0193, 11 91, 11 98, 2109)	(01 79, 11 90, 1197, 21 10)	(01 97, 1193, 21 00, 21 12)
1	101 047	91 670	(1114, 21 08, 21 18, 2130)	(01 89, 21 07, 2117, 21 30)	(11 09, 2109, 21 19, 21 32)
2	101 350	91 798	(1118, 21 12, 21 23, 2135)	(01 97, 21 12, 2122, 21 35)	(11 12, 2114, 21 24, 21 37)
3	101 443	91 800	(1120, 21 13, 21 24, 2136)	(11 00, 21 13, 2124, 21 37)	(11 14, 2115, 21 25, 21 38)
4	101 472	91 801	(1120, 21 14, 21 24, 2136)	(11 00, 21 13, 2124, 21 37)	(11 15, 21 15, 2126 2139)
5	101 482	91 801	(1120, 21 14, 21 24, 2136)	(11 00, 21 13, 2124, 21 37)	(11 15, 2115, 21 26, 21 39)
O2D 需求估计值取为			(10148, 91 80)		
三种模式路段流量取为			(1120, 21 14, 21 24, 2136)	(11 00, 21 13, 2124, 21 37)	(11 15, 2115, 21 26, 21 39)

下面, 我们通过算例来观察初始点的不同取值对算法收敛情况的影响。

将 O2D 需求的初始值依次取为 $Q_1^{(1)} = [9, 9]^T, Q_2^{(1)} = [14, 14]^T, Q_3^{(1)} = [4, 4]^T$ 。

所得数值结果见表 2。从表 2 可以看出, 在不同的 O2D 需求的初始值之下, 算法 1 的收敛速度都很快。

表 2 不同初始 O2D 需求的迭代数据

迭代次数	$Q_1^{(1)}$		$Q_2^{(1)}$		$Q_3^{(1)}$	
0	91	91	141	141	41	41
1	101 0474	91 6698	1113039	101 3431	714919	716883
2	101 3497	91 7977	1016840	91 8968	916721	915155
3	101 4430	91 7953	1015217	91 8202	1012522	917431
4	101 4717	91 8005	1014814	91 8084	1014175	917854
5	101 4818	91 8011	1014846	91 8033	1014649	918011
最优值为			(101 48, 91 80)			

7 结论

本文在考虑三种交通模式(一般机动车, 公交车, 自行车)的基础上, 建立了一般拥挤网络多模式 OD 需求估计问题的双层规划模型, 给出了一个基于灵敏度分析的启发式求解算法, 并进行了数值试验。试验结果不仅给出了 OD 需求的估计值, 同时还给出了各模式路段流量的估计值。此外上层规划问题除了本文中用到的广义最小二乘思想 (GLS) 外, 常用的还有熵函数和极大似然估计等方法, 应用于多模式情形只需适当加以推广即可, 在此不再赘述。需要指出的是, 为了使问题简化, 在文献[6]和本文中假定每种交通模式的路段阻抗值主要受其自身流量的影响, 忽略其它模式和其它路段上流量的影响。一般而言, 在实际中任何一种交通模式的路段阻抗值还应与其它路段上其它交通模式的流量相关。在这种情况下, 下层规划(L)可以利用变分不等式形式来描述^[8-11], 关于这方面的有关结果将另文发表。

参考文献:

- [1] Yang H., Sasaki T., Iida Y., Asakura Y.. Estimation of origin- destination matrices from link traffic counts on congested networks[J]. Trans. Res. 1992, 26B: 417- 434.
- [2] Yang H.. Sensitivity Analysis for Queuing Equilibrium Network Flow and Its Application to Traffic Control[J]. Math Comp. Modeling 1995, (22): 247- 258.
- [3] Yang H., Heuristic algorithms for the bi- level origin- destination matrix estimation problem[J]. Trans. Res., 1995, 29B: 231- 242.
- [4] Yang H., A sensitivity analysis based algorithm for the congested origin- destination matrix estimation problem [C]. Proceedings of the 7th World Conference on Transport Research, volume 2- Modeling Transport Systems (edited by D. Hensher, J. King and t. Oum), Sydney Australia, 1995, 99- 106.
- [5] Yang H., Sensitivity Analysis for the Elastic- Demand Network Equilibrium Problem with Applications[J]. Trans. Res., 1997, 31B: 55- 70.
- [6] 四兵锋, 高自友. 多模式的混合交通均衡配流模型及算法[J]. 公路交通科技, 1999, (1): 44- 48.
- [7] Tobin R. L., Friesz T. L., Sensitivity Analysis for Equilibrium Network Flow[J], Trans. Sci., 1988, (4): 242- 250.
- [8] 安梅, 高自友. OD 需求估计的多模式双层规划模型新算法[J]. 公路交通科技, 1999, (4): 56- 60.
- [9] Daferios S., The General Multimodal network Equilibrium Problem with Elastic Demand[J], Network, 1982, (12): 58- 72.
- [10] Gao Ziyou, Si Bingfeng, An Equilibrium Assignment Model for Mixed Network[C], Proceedings of the ICTTS. 98, ASCE, July Beijing, 1998. 234- 238.
- [11] 安梅, 高自友. 提高公共交通需求量的灵敏度分析方法[J]. 公路交通科技, 2000, (3): 63- 67.

The Bi2level Programming Model and Algorithm based on Sensitivity Analysis for Estimating Origin2Destination Demands on Mixed Urban Traffic Networks

An Mei, Gao Zi- you, Yang Lu

(School of Traffic and Transportation, Northern Jiao Tong University, Beijing 100044, China)

Abstract: A bi2level programming model for origin- destination demands estimation is established on mixed urban traffic congested network based on three traffic modes (car, bus, bicycle). Moreover, a heuristic algorithm for solving this model is also proposed based on sensitivity analysis method. Finally a numeral test is used to illustrate the applications of the bi2 level programming model for estimating origin2destination demands. In the numeral results, estimation values of origin2 destination demands and the link traffic flows can be obtained simultaneously from the model and algorithms.

Key words: equilibrium assignment, bi2level programming, sensitivity analysis, OD demands.