文章编号: 1003- 207(2001)02- 0053- 05

一般交叉规划与双层规划

马建华, 刘家壮

(山东大学数学院, 山东 济南 250100)

摘 要: 本文把一般的交叉规划转化为两类等价的双层规划, 并讨论了它们解之间的关系。最后讨论了含交叉的双层规划问题。

关键词: 交叉规划; 双层规划; 含交叉的双层规划; 均衡解; 最优解

中图分类号: 文献标识码: A

1 引言

递阶系统和交叉系统是两类基本的复杂系统, 递阶系统的优化问题人们研究的比较早, 建立了双层(多层)规划模型研究了其最优性条件, 提出了许多有效的算法[1]。而对于交叉系统的优化模型- 交叉规划, 虽然最早在八十年代[2]中就提出了类似的模型, 但长期以来少有人研究, 关于其最优性条件和有效算法的结果比较少。为了借助双层规划的已有研究成果来研究交叉规划, [3]中把一类特殊的线性交叉规划转化为双层规划, 从而得到交叉规划的最优性条件和有效算法。本文将把[3]中的思想推广到一般的情况。

2 交叉规划的第一类等价形式

考虑含有 h 个子系统的交叉系统的一般交叉规划:

$$(IP)\begin{cases} \qquad\qquad \max \quad f_i(y_i,\ x_{-i}) \\ SP_i(x_{-i}) \quad s.\ t. \begin{Bmatrix} G_i(y_i,\ x_{-i}) \leq 0 \\ y_i \in X_i \end{Bmatrix} \\ i \in H,\ X_{-i} \in X_{-i} \end{cases}$$

其中 $H = \{1, 2, \cdots, h\}$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_h) \in R^{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_h}$, $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_h$, 对任意的 $i \in H$, $x_{-i} = (x_1, x_2, \cdots x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_h)$, $G_i: X \to R^{m_i} f_i: X \to R^1$。

如果在该交叉规划的各子系统的上面虚拟一个上层子系统, 令其决策变量为 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in R^{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_h}$, 其中 $z_i \in R^{n_i}$; $i \in H$。令其目标是使得 $-\sum_{i=1}^{h}(z_i - x_i)^{\mathrm{T}}(z_i - x_i)$ 达到最大, 则类似[3] 可以得到以下双层规划:

$$\max - \sum_{i=1}^{h}(z_i - x_i)^{\mathrm{T}}(z_i - x_i)$$

收稿日期: 2000- 06- 21

作者简介: 马建华(1993-), 男(汉族), 山东鄄城人, 山东大学数学院, 研究方向: 数学规划及其应用.

$$(BP_1)\quad s.t.\begin{cases} z_i \geq 0;\ i \in H \\ \text{其中 } x_i;\ i \in H \text{ 是下列规划的最优解} \\ \max f_i(x_i,\ z_{-i}) \\ s.t.\begin{cases} G_i(x_i, z_{-i}) \leq 0 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

其中 $z_{-i} = (z_1, z_2, \cdots, z_{i-1}, z_{i+1}, \cdots, z_h)$; $i \in H$, 并且类似于[3]中可得:

定理 2.1 x^* 是交叉规划(IP)的均衡解的充要条件是存在 z^* 使得(z^*, x^*)是双层规划(BP_1)的最优解, 并且其最优值等于零。

证明: 若 x^* 是交叉规划(IP)的均衡解, 由交叉规划均衡解定义可知, 对于任意 $i \in H$ 有: x_i^* 是子规划 $SP_i(x_{-i})$ 在参数为 x_{-i}^* 时的最优解。令 $z^* = x^*$, 则对于任意 $i \in H$ 有: x_i^* 是下列规划(P_i):

$$\max f_i(x_i, z_{-i})$$
$$s.t.\begin{cases} G_i(x_i, z_{-i}) \leq 0 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

在参数为 z_{-i}^* 时的最优解, 从而可知(z^*, x^*)是双层规划(BP_1)的合理反应解。并且可知其对应的双层规划(BP_1)的目标函数值是零, 又由于:

$$-\sum_{i=1}^{h}(z_i - x_i)^{\mathrm{T}}(z_i - x_i) \leq 0$$

所以(z^*, x^*)是双层规划(BP_1)的最优解。

若存在 z^* 使得(z^*, x^*)是双层规划(BP_1)的最优解, 并且其最优值等于零, 则对于任意 $i \in H$ 有: x_i^* 是规划(P_i)在参数为 z_{-i}^* 时的最优解, 并且:

$$-\sum_{i=1}^{h}(z_i^* - x_i^*)^{\mathrm{T}}(z_i^* - x_i^*) = 0$$

可知 $z^* = x^*$, 从而对于任意 $i \in H$ 有: x_i^* 是子规划 $SP_i(x_{-i})$ 在参数为 x_{-i}^* 时的最优解, 所以 x^* 是交叉规划(IP)的均衡解。

由定理 2.1 可以直接得到以下推论:

推论 2.2 交叉规划(IP)有均衡解的充要条件是双层规划(BP_1)有最优值等于零的最优解。

3 交叉规划的第二类等价形式

若令上层虚拟子系统的目标是使得函数 $\sum_{i=1}^{h}(f_i(z) - f_i(x_i, z_{-i}))$ 达到最大, 要求其变量满足:

$$G_i(z) \leq 0;\ i \in H$$

并且对于任意 $i \in H$, 要求下层第 i 个子规划满足约束:

$$f_i(z) - f_i(x_i, z_{-i}) \leq 0$$

则第二节的双层规划就变为以下双层规划:

$$\max \sum_{i=1}^{h}(f_i(z) - f_i(x_i, z_{-i}))$$

$$(BP_2)\quad s.t.\begin{cases} G_i(z)\le 0,\ i\in H \\ \text{其中:} \\ f_i(x_i, z_{-i})\ \text{是下列第}\ i\ \text{个子规划的最优值:} \\ \max f_i(x_i, z_{-i}) \\ s.t.\begin{cases} G_i(x_i, z_{-i})\le 0 \\ -f_i(x_i, z_{-i})+f_i(z)\le 0 \\ x_i\ge 0 \end{cases} \\ i\in H \end{cases}$$

并且有下列定理:

定理 3.1 若(z^*, x^*)是双层规划(BP_2)的最优解, 且其最优值等于零, 则 z^* 是交叉规划(IP)的均衡解。

证明: 设(z^*, x^*)是双层规划(BP_2)的最优解, 且其最优值等于零, 则有:

$$G_i(z^*)\le 0;\ i\in H \tag{1}$$

并且对于任意 $i\in H$, 满足:

$$f_i(z^*)-f_i(x_i^*, z_{-i}^*)\le 0 \tag{2}$$

同时 x_i^* 是双层规划(BP_2)的对应的下层子规划在参数为 z_{-i}^*时的最优解。

由(2)式可知:

$$\sum_{i=1}^{h}(f_i(z^*)-f_i(x_i^*, z_{-i}^*))\le 0$$

又由于(z^*, x^*)对应的双层规划(BP_2)的最优值等于零, 即:

$$\sum_{i=1}^{h}(f_i(z^*)-f_i(x_i^*, z_{-i}^*))=0$$

所以对于任意 $i\in H$, 有:

$$f_i(z^*)-f_i(x_i^*, z_i^*)=0$$

即对于任意 $i\in H$:

$$f_i(z^*)=f_i(x_i^*, z_{-i}^*) \tag{3}$$

由(1)式可知对于任意 $i\in H$, z_i^* 是下列规划(P'_i):

$$(P'_i)\quad \begin{aligned}&\max f_i(x_i, z_{-i})\\ &s.t.\begin{cases} G_i(x_i, z_{-i})\le 0 \\ -f_i(x_i, z_{-i})+f_i(z)\le 0 \\ x_i\ge 0\end{cases}\end{aligned}$$

在参数为 z_{-i}^* 的可行解, 而 x_i^* 是其在参数为z_{-i}^*时的最优解, 所以由(3)式可知 z_i^* 也是其在参数为z_{-i}^*时的最优解。

显然对于任意 $i\in H$, z_i^* 是规划(P_i)在参数为 z_{-i}^*时的可行解, 假设 x'_i 是其在参数为z_{-i}^*时的最优解, 则有:

$$f_i(z^*)\le f_i(x'_i, z_{-i}^*) \tag{4}$$

从而 x'_i 是规划(P'_i)在参数为 z_{-i}^*的可行解, 由于 z_i^* 是其在参数为z_{-i}^*时的最优解, 因而有:

$$f_i(z^*) \geq f_i(x'_i, z^*_{-i})$$

故而:

$$f_i(z^*) = f_i(x'_i, z^*_{-i})$$

即 z^*_i 是规划(P_i)在参数为 z^*_{-i}时的最优解, 从而可知 z^* 是交叉规划(IP)的均衡解。

由上述定理可得:

推论 3.2 交叉规划(IP)有均衡解的充要条件是双层规划(BP_2)有最优值等于零的最优解。

4 含交叉的双层规划

一般所讨论的双层规划的下层子规划之间相互独立, 其约束和目标函数只与上层变量有关, 与下层其他子规划的决策变量无关。而在现实中许多问题, 下层各子系统之间也是相互影响的, 一个子系统的约束和目标不仅和上层变量有关, 而且和下层其他子规划的变量有关。这样的复杂系统从整体上讲是一个递阶系统, 下层又是一个交叉系统, 我们称之为含交叉的递阶系统。

下面考虑一个双层含交叉的递阶系统的优化模型, 假定其下层有 h 个子系统, 它们的决策变量分别为 $x_i \in R^{n_i}$; $i \in H$, 上层子系统的决策变量为 $y \in R^{n_0}$, 记 $n = \sum_{i=1}^{h} n_i$, 其他符号同上。若假设上层子系统的目标是使得函数 $f(x, y)$ 达到最大, 其约束为:

$$G(x, y) \leq 0$$

对任意的 $i \in H$, 下层第 i 个子系统的目标是使得$f_i(x_i, x_{-i}, y)$达到最大, 其约束为:

$$G_i(x_i, x_{-i}, y) \leq 0$$

其中 $f: R^{n+n_0} \to R^1$, $G: R^{n+n_0} \to R^{m_0}$, $f_i: R^{n+n_0} \to R^1$, $G: R^{n+n_0} \to R^{m_i}$; $i \in H$。引入新变量 $v_i \in R^{n_i}$; $i \in H$, 则其对应的优化模型为:

$$(BP_3)\quad \begin{aligned} &\max f(x, y) \\ &s.t.\begin{cases} G(x, y) \leq 0 \\ y \geq 0 \\ \text{其中 } x_i \text{ 是下列子规划的最优解} \\ \max f_i(v_i, x_{-i}, y) \\ s.t.\begin{cases} G_i(v_i, x_{-i}, y) \leq 0 \\ v_i \geq 0 \end{cases} \\ i \in H \end{cases} \end{aligned}$$

我们称该规划为含交叉的双层规划。

如果在该规划的上层子规划中增加虚拟变量 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_h)$, 其中 $z_i \in R^{n_i}$; $i \in H$, 记 $z_{-i} = (z_1, z_2, \cdots, z_{i-1}, z_{i+1}, \cdots, z_h)$; $i \in H$。并在上层要求其满足:

$$G(z, y) \leq 0, \text{ 及 } z - x = 0$$

而在下层各子规划中以 z_{-i}代替x_{-i}, 则可以得到以下双层规划:

$$\max f(x, y)$$

$$
(BP_4)\quad s.t.\begin{cases} G(z,y)\le 0 \\ z-x=0 \\ z、y\ge 0 \\ \text{其中:} \\ x_i\ \text{是下列子规划的最优解} \\ \max f_i(v_i,z_{-i},y) \\ s.t.\begin{cases} G_i(v_i,z_{-i},y)\le 0 \\ v_i\ge 0 \end{cases} \\ i\in H \end{cases}
$$

该规划的下层子规划只与上层变量有关。对于双层规划(BP_3)和(BP_4)我们有以下结论:

定理 4.1 $(x^* y^*)$是双层规划(BP_3)的最优解的充要条件是存在 z^* 使得(y^*, z^*, x^*)是双层规划(BP_4)的最优解。

证明: 若(x^*, y^*)是双层规划(BP_3)的最优解, 令 $z^* = x^*$, 则显然(z^*, y^*)满足双层规划(BP_4)的上层约束, 对任意的 $i\in H$, x_i^* 是双层规划(BP_4)的对应的下层子规划在参数为 z^*_{-i}和y^* 时的最优解, 即(y^*, z^*, x^*)是双层规划(BP_4)的合理反应解。

若(y', z', x')是双层规划(BP_4)的最优解, 则其满足双层规划(BP_4)上层约束并且对任意的 $i\in H$, x'_i 是双层规划(BP_4)的对应的下层子规划在参数为 z'_{-i}和y'时的最优解。从而可知 $z'=x'$, 所以(x', y')是双层规划(BP_3)的最优解, 则其满足双层规划(BP_3)的上层约束, 并且对任意的 $i\in H$, x'_i 是双层规划(BP_3)的对应的下层子规划在参数为 x'_{-i}和y' 时的最优解, 即(x', y')是双层规划(BP_3)的合理反应解。

因而有:

$$
f(x^*, y^*)\ge f(x', y')
$$
$$
f(x^*, y^*)\le f(x', y')
$$

即:

$$
f(x^*, y^*) = f(x', y')
$$

所以(x', y')是双层规划(BP_3)的最优解, (y^*, z^*, x^*)是双层规划(BP_4)的最优解。

参考文献:

[1] L. N. Vicente. Bilevel and Multilevel Programming: a Bibliogoraphy Review [J]. Journal of Global Optimization 1994, (5): 291- 306.

[2] W. I. Zangwill, C. B. Garcia. Equilibrium Programming: The Path following Approach and Dynamics [J]. Mathematical Programming 1981, 21: 262- 289.

[3] 刘家壮, 马建华. 一类特殊的交叉规划问题[J]. 中国管理科学, 1999(专辑).

General Interaction Programming and Bileve Programming

MA Jian- hua, LIU Jia- zhuang

(Mathematical Institute of Shandong University, Jina 250100, China)

Abstract: Tow Bileve programming models are given from a general interaction programming, then the relation between them is given. At the end we discuss interactive bileve programming.

Key words: interaction programming; bileve programming; interactive bileve programming; equilibrium solution; optimal solution