中国科学技术大学

2010 年硕士学位研究生入学考试试题

（数学分析）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

□ 需使用计算器　　☑ 不使用计算器

一、(15分) 设函数 $f(x):[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是一致连续的, $\alpha\in(0,1]$. 求证: 函数 $g(x)=f^{\alpha}(x)$ 也在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

二、(15分) 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上可微, 在 $(0,0)$ 处连续, 且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0,\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$$

求证: $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

三、(15分) 设 $x_0\in(1,\frac{3}{2})$, $x_1=x_0^2$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n}+\frac{x_{n-1}}{2}$, $n=1,2,\cdots$. 求证：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

四、(15分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的导函数, $f(0)=0$, 且曲线积分

$$\int_C (e^x+f(x))\,y\,dx+f(x)\,dy$$

与路径无关. 求

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(e^x+f(x))\,y\,dx+f(x)\,dy$$

五、(15分) 设 $\alpha>1$. 求证以下含参变量 x 的无穷积分

$$f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan(tx)}{t^{\alpha}}\,dt$$

定义了 $(0,+\infty)$ 上的一个可微函数, 且满足

$$xf'(x)-(\alpha-1)f(x)+\arctan x=0.$$

六、(15分) 设 a,b,c 都是正数. 计算曲面积分

$$\iint\limits_S x^3\,dydz+y^3\,dzdx+z^3\,dxdy,$$

其中 S 是上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $z\geq 0$, 方向朝上.

七、 (15分) 设 $f(x)$ 是定义在实轴上以 2π 为周期的奇函数, 又 $f(x)$ 有连续的导函数且满足 $f'(x) = f(\frac{\pi}{2} - x)$. 试求 $f(x)$.

八、 (15分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个收敛的正项级数. 求证: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1-1/n}$ 也收敛.

九、 (15分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上二阶可导, $f(0) \geq 0$, $f'(0) \geq 0$, 且满足 $f(x) \leq f''(x)$. 求证：$f(x) \geq f(0) + f'(0)x$.

十、 (15分) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是正数列，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$, 及

$$\lim_{n\to\infty} b_n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda > 0.$$

求证：(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.