文章编号: 1003- 207(2001)05- 0032- 06

群决策与个体决策的一致性分析

程启月, 邱菀华

(北京航空航天大学经管学院, 北京　100083)

摘　要: 本文针对群决策与个体决策的一致性问题, 将负熵理论应用到集对分析理论中, 给出了系统的联系熵与转换熵的概念, 探讨了其性质, 通过定义联系熵的势, 可转换熵的势作为群体决策与个体决策一致性的度量, 得到一个新的判断群集结的有效性定理。

关键词: 群决策; 个体决策; 熵

中图分类号: C931　　文献标识码: A

1　引言

对于问题不确定性的研究方法很多, 其中集对分析[1]的方法就是研究不确定性问题的崭新方法。它在行为科学、社会科学、管理科学诸多方面应用广泛, 尤其应用在决策分析方面效果更佳。所谓集对就是指具有一定联系的两个集合所作成的对子。从系统科学的角度看, 系统的任两个组成部分, 系统与环境、系统与人、子系统间等等都可以在一定的条件下看成是一个集对。集对分析就是在一定的问题背景下, 对一个集对所具有的特性展开分析, 在对分析得到的特性作:

这些特性是集对中两个集合所“共同”具有, 还是这两个集合在某些特性上相互“对立”, 即仅为“差异”分析, 并建立起所论两个在此背景下的一个同、异、反联系度公式:

$$u = a + bi + cj$$

(i, j 为特性的位置标志, 同时 i, j 也有其数学意义, $i \in [0, 1], j \in [-1, 0]$)

用集对的联系度给出系统决策不失为一简单易测的好方法, 但是用在群体决策方面, 往往难以作出群体与个体一致性的判断, 看如下面例子。

设 $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为专家集, $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 为方案集, 问题 W 是群体决策最好的方案。n 个专家采用“赞同”“反对”“弃权” 三种表决方式对 m 个方案评价, 假设第 i 个专家“赞成”的方案有 m_{i1} 个,“弃权” 的方案有 m_{i2} 个,“反对” 的方案有 m_{i3} 个则联系度为

$$u(e_i, A) = m_{i1} + m_{i2}i + m_{i3}j \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

不妨设: 某药厂生产一种药, 研制配方方案有 6 种, 3 名专家对 6 个方案评价, 各得联系度为:

$u(e_1, A) = 2/6 + 3/6i + 1/6j$

$u(e_2, A) = 3/6 + 2/6i + 1/6j$

收稿日期: 2001- 10- 19

基金项目: 国家自然科学基金项目(7930900)

作者简介: 程启月(1957-), 女(汉族), 郑州市人, 副教授, 北京航空航天大学经管学院决策理论与应用专业博士生, 研究方向: 冲突决策.

$u(e_3, A) = 1/6 + 4/6i + 1/6j$

群体决策:

(1) 求联系度的算术平均值:

$$u(e, A) = \sum_i m_{i1}/n + \sum_i m_{i2}/ni + \sum_i m_{i3}/nj$$
$$= 3(2/6 + 3/6i + 1/6j)$$

结论与第一个专家的一致。

(2) 求最小同一度, 最大对立度:

$$u(e, A) = \min(m_{i1}/i = 1, 2, \cdots, n) + \sum_i m_{i2}/ni + \max(m_{i3}/i = 1, 2, \cdots, n)j$$
$$= 1/6 + 4/6i + 1/6j$$

结论与第三个专家的一致。

(3) 求"三度"的几何平均值:

$$u(e, A) = \sqrt[n]{\Pi m_{i1}} + \sqrt[n]{\Pi m_{i2}}\, i + \sqrt[n]{\Pi m_{i3}}\, j$$
$$\approx 2/6 + 3/6i + 1/6j$$

结论偏于第一个专家的意见。

(4) 求联系度的加权平均值:

$$u(e, A) = \partial_1 \sum_i m_{i1}/n + \partial_2 \sum_i m_{i2}/n\, i + \partial_3 \sum_i m_{i3}/n\, j$$

$\partial_1, \partial_2, \partial_3$ 分别为"赞同"、"弃权"、"反对"的权重。

这里不妨取 $\partial_1 = 0.6, \partial_2 = 0.2, \partial_3 = 0.2$

$$u(e, A) = 0.6 * 2/6 + 0.2 * 3/6\, i + 0.2 * 1/6j$$
$$= (0.6 + 0.3i + 0.1j)2/6$$

结论偏于第二个专家的意见。

问题一: 以上四种公式得到的结论会使系统的信息不确定, 难以作群体的意见与个体意见的一致性分析。

问题二: 当判断结论为"意见不集中"时, 我们一般采用德菲尔法, 重复实验, 再次反馈信息时, 这时单个决策的"三度"(同一度、差异度、对立度) 有发生"转换"的可能, 不确定性更加突出, 由此群体决策与单个决策的一致性更加难以研判。

为了解决以上问题, 本文试图找出一种合理的映射法则, 从群体决策集结个体决策的目的出发, 正确的研判群决策与个体决策的一致性, 使单个决策者的偏好映射为群的偏好映射。我们采用描述系统的不确定量的熵来研究群体决策, 用联系熵的势与可转换熵的势对以上提出的两类问题作出一致性的恰当判断。

2　联系熵和可转换熵[2]

熵是混乱程度的量度或是无序的量度, 平衡态的熵极大。Shannon(1948 年) 提出通过分布的熵来体现在不同的场合, 针对不同的对象可以作为状态的不确定性或信息不均匀性的量度。对于一个集对系统其同、异、反间不是一成不变的, 如何确定变化后系统的"态势", 我们作以下研究。

2.1　联系熵

同一度是度量系统确定性部分同一性的测度, 当描述系统状态有序程度时, 我们用同熵来定义, 即:

定义 1

系统中集对的同一度 $a_k(i=1,2,\cdots n)$ 的负熵 $-\sum a_k\log a_k$ 定义为同熵,

记作 $H_t=-\sum a_k\log a_k$。

由熵的定义,立即可得:

性质 1: 当且仅当 $a_k, i=1,2,\cdots n$ 之一为 1 时, $H_t=0$, 否则, $H_t>0$。

性质 1: 若 $a_I=\frac{1}{n},(i=1,2,\cdots n)H_t=\log n$ 最大, 此时 n 越大, H_t 越大。

差异度是度量系统确定和不确定性混杂部分差异性的测度,当描述系统状态有序与无序混杂程度时,我们用异熵来定义,即:

定义 2

系统中集对的差异度 $b_k(i=1,2,\cdots n)$ 的负熵 $-\sum b_k\log b_k$ 定义为异熵,

记作 $H_y=-\sum b_k\log b_k$。

对立度是度量系统不确定性对立程度的测度,当描述系统状态无序程度时,我们用反熵来定义,即:

定义 3

系统中集对的对立度 $c_k(i=1,2,\cdots n)$ 的负熵 $-\sum c_k\log c_k$ 定义为反熵,

记作 $H_f=-\sum c_k\log c_k$。

对于一个系统既有确定性,又有不确定性,还存在其混杂状态,我们用联系度来测量,相应的对于系统状态的有序、无序和有序无序混杂的程度我们用联系熵来测量,即

定义 4

集对系统同熵、异熵、反熵的联系度,定义为系统的联系熵即:

$H=-\sum a_k\log a_k+(-\sum b_k\log b_k)i+(-\sum c_k\log c_k)j$

注 1: 显然 H_y、H_f、H 也有类似于性质 1、2 的性质。

为量化系统有序状态与无序状态的相对程度,我们定义系统的势,即

定义 5

定义同熵与反熵的比为系统的势, 即 $\sum a_k\log a_k/\sum c_k\log c_k$。

当 $\sum a_k\log a_k/\sum c_k\log c_k>1$ 时, 称系统具有同势, 表征系统的同一性, 即群决策与单个决策是一致的;

当 $-\sum a_k\log a_k/-\sum c_k\log c_k<1$ 时, 称系统具有反势, 表征系统的对立性增强,即单个决策不能反映群体决策。这时需要用德菲尔法进行再次反馈。

如上例,

$H_t=1.0114, H_y=0.9893, H_f=0.8958$

系统的联系熵为:

$H=1.0114+0.9893i+0.8958j$

$H_t/.H_f=1.0114/0.8958=1.1163>1$

结论: 同势。

这表明三个人的意见基本一致,则群决策集结其单个决策, 这样即可作出一致性的判断。

2.2 可转换熵

决策主体决策意识的转换是与决策者接受的信息有关,并且这种转换带有很大的随机性,为此我们用以下几种概率来定义。

定义 6

集对的同一性、差异性、对立性在一定的条件下必可向一定的方向转化,我们称之为集对的条件可转换性。

可转换性是事物特征(性质)的一种内在属性,是事物自身必备的,如信息的转换、信号的切换、特征的改换、"意见"的交换等均是如此。对于系统的特征转换而言,显然系统的特征划分的越细,信息的准确度就越高。显然,产生状态可转换的可能性与可转换的随机性有关。随机性越大,决策者条件可转换性就越低。为反映单个个体间的可转换性,我们用条件可转换概率来定义如下。

定义 7

设相空间有 m 个状态, $V = \{x_1, x, \cdots, x_m\}$ 当 $x_m = I$ 时,我们称 $x_m =$ 为状态 I,且满足:

(1) $x_i \cap x_j = 0, (i, j = 1, 2, \cdots, m)$

(2) $\bigcup_i x_I = V$ 则定义条件概率 $p_{ij} = p(x_{n+1} = j / x_n = i)$ 为状态 i 到状态 j 的条件可转换率。显然,

(1) p_{ij} 0;

(2) $\sum_i p_{ij} = 1$;

(3) 条件可转换性具有不可逆性,即 $p_{ij} \neq p_{ji}$。

由于信息的不完全性和决策意识的可转换性,决策者的 $n+1$ 次决策与第 n 次决策的所有状态有很大的关系,我们将两次决策置于同一空间中,定义可转换概率如下。

定义 8

如果状态 x_I 满足定义 7 的条件(1)、(2),则全概率

$$p_j = \sum_i p(x_n = i) p(x_{n+1} = j / x_n = i)$$

称为状态 x_I 的可转换概率。显然, (1) p_j 0;　(2) $\sum_j p_j = 1$。

定义 9

由可转换概率为元素构成的矩阵称为转换矩阵,即

状态 决策者	同	异	反
1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
2	p_{21}	p_{22}	p_{23}
;			
n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}

由定义 8 可见,在一般情况下,可转换矩阵是实的非对称矩阵,即 $A \neq A^T$, $p_{ij} \in R$。

定义 10

由决策主体 S 的可转换矩阵中状态"同"下的概率构成的熵,称为系统的可转换同熵,记作 H_{kt}:

$$H_{kt} = -\sum p_{j1} \log p_{j1}。$$

同理,可定义可转换异熵、可转换反熵、系统可转换熵,即:

定义 11

由决策主体 S 的可转换矩阵中状态“反” 下的概率构成的熵, 称为系统的可转换异熵, 记作 H_{ky}:

$$H_{ky} = - \sum p_{j2} \log p_{j2}。$$

定义 12

由决策主体 S 的可转换矩阵中状态“反” 下的概率构成的熵, 称为系统的可转换反熵, 记作 H_{kf}:

$$H_{kf} = - \sum p_{j3} \log p_{j3}。$$

定义 13

由系统的可转换同熵、可转换异熵和可转换反熵构成的系统联系熵, 称为系统可转换熵, 记作 H_{kx}:

$$H_{kx} = (- \sum p_{j1} \log p_{j1}) + (- \sum p_{j2} \log p_{j2}) I + (- \sum p_{j3} \log p_{j3}) J$$

由“系统势” 的意义, 可以定义系统可转换势, 即

定义 14

定义系统的可转换同熵与可转换反熵的比, 称为可转换势, 记作 S_x, 即:

$$S_x = \sum p_{j1} \log p_{j1} / \sum p_{j3} \log p_{j3}$$

性质 3: 系统可转换势大于 1 时, 系统的同一性就越强, 群体决策与个体决策的一致性强; 系统可转换势小于 1 时, 系统的对立性就越强, 群体决策与个体决策的一致性差。

3 应用举例

某药厂生产一种药, 研制配方方案有 6 种, 4 名专家对 6 个方案评价, 各得联系度为:

$$u(e_1, A) = 3/6 + 2/6 i + 1/6 j$$
$$u(e_2, A) = 4/6 + 1/6 i + 1/6 j$$
$$u(e_3, A) = 1/6 + 3/6 i + 2/6 j$$
$$u(e_4, A) = 2/6 + 3/6 i + 1/6 j$$

系统的联系熵: $H_t = 1.2813$, $H_y = 1.3768$, $H_f = 1.3096$

$$H_t / H_f = 0.9784 < 1$$

由此可见, 4 名专家的“意见不集中”, 即群体决策与个体决策的一致性差。为此, 按德菲尔法进行再次“表决”, 这时反馈信息得到各自的联系度为:

$$u(e_1, A) = 3/6 + 2/6 i + 1/6 j$$
$$u(e_2, A) = 4/6 + 1/6 i + 1/6 j$$
$$u(e_3, A) = 3/6 + 1/6 i + 2/6 j$$
$$u(e_4, A) = 2/6 + 2/6 i + 2/6 j$$

按可转换概率的定义, 则系统的可转移矩阵为:

18/36	12/36	6/36
24/36	6/36	6/36
18/36	6/36	12/36

12/36　12/36　12/36

$H_{kt} = 1.3297, H_{kf} = 1.3296$

$S_x = H_{kt}/H_{kf} = 1.0001 > 1$。

此时的群决策可以集结个体决策。

4 结论

(1) 本文将负熵理论应用到群体与个体决策的一致性问题的研究中, 从系统论出发, 给出了系统的联系熵、可转换熵的定义及其性质, 为群体决策与个体决策的一致性的研判, 探讨了一种新方法;

(2) 本文给出的测量方法简单, 但不失合理性。通过引进系统的"势", 由"势"的值与"1"比较, 辅助作出群体决策与个体决策一致性的判断。

参考文献:

[1] 赵克勤. 集对分析及其应用[J]. 北京: 科学探索, 1992, 1.

[2] 顾昌耀, 邱菀华. 复熵及其在 Bayes 决策中的应用[J]. 沈阳: 控制与决策, 1991, 6(4): 253– 259.

Aggregation Analysis on Group Decision Making and Single Decision Making

CHENG Qi-yue, QIU Wan-hua

(School of Management, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: In this paper, aiming at aggregation question based on group decision making and a sngle decision making, the theory of entropy is applied to the set pair analysis. The notion relation entropy and transferable entropy of a system is put forward. The character is studied. Potential of the relation entropy and transferable entropy are defined, which is the consistency measure on the group decision and single decision making. A new aggregation effective definition on the group misjudge is obtained.

Key words: group decision making; a single decision making; entropy