

中国科学技术大学

2011年硕士学位研究生入学考试试题

分析与代数

所有试题答案写在答题纸上, 答案写在试卷上无效

不使用计算器

一、计算(每小题8分, 共32分)

1. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 3^x)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1^2}{n^3}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^3}\right).$$

2. 试求函数 $f(x, y) = 3x^2 + 4xy + y^2 - 2$ 在圆盘 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上的最大值与最小值.

3. 求下列式子的值:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx, \quad \max_{0 \leq s \leq 1} \int_0^1 |\ln |s-t|| dt.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 1$, 试求 $f(0)$, $f'(0)$ 和 $f''(0)$.

二、(16分) 设函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, $(1, 2)$ 上可导, 且 $f(2) = 2f(1) > 0$. 若 $f(x)$ 不是线性函数, 证明存在实数 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $f'(\xi) > f(1)$.

三、(16分) 设一曲线的方程为 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, 其中 $a > 0$ 为常数. 试求由此曲线所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的一阶导数 y' 与二阶导数 y'' , 并分别指出该曲线上具有水平切线和垂直切线的点.

四、(16分) 求下列曲面所围成的立体的体积:

$$z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = x, \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = 0.$$

