

中国科学技术大学
2011年硕士学位研究生入学考试试题
(数学分析)

所有试题答案写在答题纸上, 答案写在试卷上无效

需使用计算器 不使用计算器

1. (15 分) 计算:

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\{ \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right\}; \quad (ii) \int_0^{\pi/2} \sin^7 x dx.$$

2. (15 分) 回答下列问题, 举例说明或者证明你的结论.

- (i) 是否存在 \mathbb{R} 上处处不连续的函数, 它的绝对值却是处处连续的函数?
- (ii) 设 f, g 是 \mathbb{R} 上的连续函数, 如果 $f(x) = g(x)$ 对所有有理数 x 成立, 是否可以断言 $f(x) = g(x)$ 在 \mathbb{R} 上成立?
- (iii) 无穷区间上的连续函数是否能用多项式一致逼近?

3. (15 分) 设 a, b, c, d 是 4 个不等于 1 的正数, 满足 $abcd = 1$, 问:

$$a^{2010} + b^{2010} + c^{2010} + d^{2010} \quad \text{和} \quad a^{2011} + b^{2011} + c^{2011} + d^{2011}$$

哪个数大? 为什么?

4. (15 分) 设 $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$.

- (i) 如果 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 证明存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \xi$;
- (ii) 如果 f 是 $[a, b]$ 上的递增函数, 证明存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \xi$.

5. (20 分)

(i) 把周期为 2π 的函数

$$f(x) = x^2 - \pi^2, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

展开为 Fourier 级数.

(ii) 利用上面的级数计算下列级数的和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

(iii) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$ 的和.

6. (15 分) 证明参变量积分

$$F(u) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ux^2)}{x} dx$$

在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛, 但在 $(0, +\infty)$ 上连续.

7. (15 分) 设 $\{x_n\}$ 是一个非负的数列, 满足

$$x_{n+1} \leq x_n + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

证明 $\{x_n\}$ 收敛.

8. (15 分) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n(n+1)} = A.$$

9. (15 分) 设 f 是从区间 $[0, 1]$ 映到 $[0, 1]$ 的函数, 其图像 $\{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$ 是单位正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的闭子集. 证明 f 是连续函数.

10. (10 分) 设 D 是由封闭光滑曲线 L 围成的区域, $f(x, y)$ 在 \bar{D} 上有二阶连续偏导数, 且

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

其中 $a, b > 0$. 若 f 在 L 上等于常数 C , 证明 f 在 D 上恒等于 C .