强度和寿命分布模型的统一描述与检验

董 聪 戎海武 何庆芝

(北京航空航天大学飞机设计研究所, 北京, 100083)

UNIVERSAL DISTRIBUTION MODEL OF STRENGTH AND LIFE AND ITS TEST

Dong Cong, Rong Haiwu, He Qingzhi

(Institute of Aircraft Design, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 100083)

摘 要 证明了: ¹ 三参数 Weibull 分布可有效地拟合正态数据和对数正态数据; º 两参数 Weibull 分布(B_1)、正态分布(B_2)、对数正态分布(B_3)和三参数 Weibull 分布(B_4)的 B 基值间存在以下关系 $B_1< B_2< B_3< B_4$; » 在工程中常见的情况下, 以三参数 Weibull 分布拟合正态数据和对数正态数据, 其 B 基值的相对估值误差 $|E| < 5\%$。

关键词 强度 寿命 Weibull 分布 B 基值

中图分类号 215.5

Abstract It is proved that: ¹ It is feasible using 3 parameter Weibull distribution to fit normal or lognormal data, º The following relationship exists: $B_1< B_2< B_3< B_4$, among which, B_1, B_2, B_3 and B_4 is B value of 2 parameter Weibull, normal, lognormal and 3 parameter Weibull distribution respectively, » In the case of general engineering application, the relative error $|E|$ of B value is lower than 5 percent when 3 parameter Weibull distribution is used to fit normal or lognormal data.

Key words strength life Weibull distribution B value

可靠性工程中, 强度与寿命分布模型的选择长期以来一直是研究的热点[1~5]。疲劳是典型的耗散型不可逆动力学过程, 其风险函数应为加载历程的单调递增连续函数, 当形状参数 $a> 1$ 时, Weibull 模型满足这一条件。因此, 在理论上, 以 Weibull 分布作为疲劳寿命的理论模型是合理的, 而对数正态分布则不具备这一条件。

对强度而言, 正态分布、对数正态分布和 Weibull 分布都可找到合理的物理模型[1, 2]。因此, 本文希望证明: 三参数 Weibull 分布也具有拟合正态数据和对数正态数据的能力。若真如此, 则强度与寿命分布可用 Weibull 模型加以统一描述。

1 寿命模型和检验方法

美国军用规范 MIL-HDBK-17B 建议采用 3 种分布假设, 并按以下优先等级排列: 两参数 Weibull 分布、正态分布和对数正态分布。本文中增列了三参数 Weibull 分布。模型参数定义如下:

1995-03-17 收到, 1995-08-20 收到修改稿

国家自然科学基金、航空科学基金、中国航空博士后基金资助项目

假设 H_1: $X \sim W(A, B)$ (两参数 Weibull 分布)

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{B}\right)^{a}\right\}$$

假设 H_2: $X \sim N(L, R^2)$ (正态分布)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2P}R}\exp\left\{-\frac{(x-L)^2}{2R^2}\right\}$$

假设 H_3: $X \sim LN(L, R^2)$ (对数正态分布)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2P}Rx}\exp\left\{-\frac{(\ln x-L)^2}{2R^2}\right\}$$

假设 H_4: $X \sim W(A, B, C_0)$ (三参数 Weibull 分布)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x-C_0}{B}\right)^{a}\right\} & (x > C_0) \\ 0 & (x \leqslant C_0) \end{cases}$$

本文使用 EDF 统计量进行母体分布假设检验, EDF 统计量的子样容量修正公式和上尾临界值如表 1 和表 2 所示[2, 4, 5], B 基值的计算公式如表 3 所示[4, 5]。

表 1　EDF 统计量子样容量修正公式

统计量类型 / 概率分布类型	子样容量修正公式		
	D^*	A^*	W^*
正态分布	$D\left(\sqrt{n} - 0.01 + \frac{0.85}{\sqrt{n}}\right)$	$A^2\left(1 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2}\right)$	$W^2\left(1 + \frac{0.5}{n}\right)$
对数正态分布	同上	同上	同上
Weibull 分布	$D\left(\sqrt{n} + \frac{0.14}{\sqrt{n}}\right)$	$A^2\left(1 + \frac{0.2}{\sqrt{n}}\right)$	$W^2\left(1 + \frac{0.2}{\sqrt{n}}\right)$

表 2　显著性水平及上尾临界值

显著性水平 a	$\sqrt{n}D$	A^2	W^2
0.25	-	0.472	0.074
0.10	0.819	0.632	0.102
0.05	0.895	0.754	0.126
0.025	0.995	0.875	0.148
0.01	1.035	1.036	0.178

注: 所有分布参数均未知

表 3　几种分布条件下的 B 基值计算公式

分布类型	B 基值的计算公式
正态分布	$B - L - k_B R$
对数正态分布	$B = \exp\{L - k_B R\}$
Weibull 分布	$B = B(0.10536)^{1/A}\exp\left\{-\frac{V}{A\sqrt{n}}\right\} + C_0$
$k_B = 1.282 + \exp\left\{0.958 - 0.520\ln(n) + \frac{3.19}{n}\right\}$ $V = 3.803 + \exp\left\{1.79 - 0.516\ln(n) + \frac{5.1}{n}\right\}$	

2　Weibull 模型的普适性检验

本节将通过仿真试验证明: 三参数 Weibull 分布具有拟合正态数据和对数正态数据的能力。支持本结论的仿真结果共 1 500 组, 子样容量 $m = 50 \sim 500$, 差异系数 $C_v = 0.03 \sim 0.30$。以此为基础, 本文得出了其它一些重要的结论, 这些结论不仅在概率意义上, 而且在确定性意义上都呈现完全的一致性。惟其如此, 才以其中的 50 组子样容量为 100 的仿真结果

进行演示说明。

本文的所有仿真样本, 其均匀随机数序列的产生方式为混合同余法, 标准正态随机数序列的产生采用了变换法。

该 r_1, r_2 是相互独立的[0, 1]区间均匀分布的随机数, 则按下列方式产生的 x_1 和 x_2 相互独立且 $x_1 \sim N(0, 1)$, $x_2 \sim N(0, 1)$

$$x_1 = \sqrt{-2\ln r_1}\cos 2Pr_2$$

$$x_2 = \sqrt{-2\ln r_2}\sin 2Pr_1$$

为使结果好看起见, 正态分布仿真数据的理论均值 L 取为 10, 对数正态分布仿真数据的理论对数均值 L 取为 1。

表 4 给出了本文所采用的一组伪随机抽样序列的随机性检验结果; 表 5 给出了用三参数 Weibull 分布拟合模拟正态数据的检验结果; 表 6 给出了用三参数 Weibull 分布拟合模拟对数正态数据的检验结果; 表 7 给出了用正态分布拟合模拟对数正态数据的检验结果; 表 8 给出了用两参数 Weibull 分布拟合模拟对数正态数据的检验结果; 表 9 给出了用三参数 Weibull 分布拟合正态数据和对数正态数据时, B 基值相对估算误差分析结果。

表 4　均值为 10 的正态模拟样本

差异系数	模拟参数估值		B_2	计算统计量修正值		
$C_v = \frac{R}{L}$	$\hat{L}$	$\hat{R}$		D^*	W^*	A^*
0. 03	9. 993 8	0. 292 4	9. 547 3			
0. 06	9. 987 5	0. 584 8	9. 094 5			
0. 09	9. 981 3	0. 877 2	8. 641 8			
0. 12	9. 975 1	1. 169 6	8. 189 2			
0. 15	9. 968 8	1. 462 0	7. 736 3			
0. 18	9. 962 6	1. 754 4	7. 283 6	0. 603 3	0. 046 3	0. 286 1
0. 21	9. 956 3	2. 046 8	6. 830 8			
0. 24	9. 950 1	2. 339 2	6. 378 1			
0. 27	9. 943 1	2. 631 6	5. 925 3			
0. 30	9. 937 6	2. 924 0	5. 472 6			

表 5　表 4 数据的三参数 Weibull 分布拟合结果

差异系数	三参数 Weibull 分布			B_4	计算统计量修正值		
$C_v = \frac{R}{L}$	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}_0$		D^*	W^*	A^*
0. 03	3. 735 5	1. 087 3	9. 011 1	9. 593 2	0. 616 5	0. 045 6	0. 314 0
0. 06	3. 728 8	2. 172 0	8. 025 6	9. 186 5	0. 616 1	0. 045 7	0. 314 2
0. 09	3. 722 0	3. 251 0	7. 043 6	8. 780 0	0. 615 6	0. 045 8	0. 314 5
0. 12	3. 755 7	4. 338 7	6. 054 3	8. 373 2	0. 615 9	0. 045 7	0. 314 3
0. 15	3. 727 6	5. 425 9	5. 065 4	7. 966 4	0. 616 0	0. 045 7	0. 314 3
0. 18	3. 737 0	6. 526 1	4. 064 1	7. 558 8	0. 616 6	0. 045 6	0. 314 0
0. 21	3. 739 2	7. 618 0	3. 070 8	7. 151 7	0. 616 7	0. 045 6	0. 313 9
0. 24	3. 724 2	8. 674 1	2. 111 7	6. 746 6	0. 615 8	0. 045 7	0. 314 4
0. 27	3. 724 2	9. 758 4	1. 125 7	6. 339 9	0. 615 8	0. 045 7	0. 314 4
0. 30	3. 724 2	10. 842 6	0. 139 6	5. 933 3	0. 615 8	0. 045 7	0. 314 4

表 6　对数正态数据的三参数 Weibull 分布拟合结果

差异系数 $C_v=\frac{R}{L}$	B_3	B_4	三参数 Weibull 分布			计算统计量修正值		
			$\hat{A}$	$\hat{B}$	C_0	D^*	W^*	A^*
0. 03	2. 598 0	2. 609 5	3. 436 0	0. 275 6	2. 469 7	0. 626 1	0. 046 4	0. 322 8
0. 06	2. 483 0	2. 504 0	3. 189 7	0. 518 6	2. 254 5	0. 636 3	0. 047 2	0. 332 2
0. 09	2. 373 1	2. 401 8	2. 976 8	0. 735 7	2. 065 9	0. 646 8	0. 048 1	0. 342 4
0. 12	2. 268 0	2. 302 8	2. 790 8	0. 932 1	1. 898 9	0. 657 3	0. 049 2	0. 353 7
0. 15	2. 167 6	2. 206 8	2. 626 7	1. 111 4	1. 749 7	0. 667 8	0. 050 4	0. 365 9
0. 18	2. 071 7	2. 113 8	2. 480 8	1. 276 7	1. 615 5	0. 678 5	0. 051 7	0. 379 1
0. 21	1. 978 0	2. 023 8	2. 350 0	1. 430 2	1. 494 0	0. 689 0	0. 053 1	0. 393 3
0. 24	1. 892 3	1. 936 6	2. 232 2	1. 573 7	1. 383 5	0. 699 6	0. 054 8	0. 408 5
0. 27	1. 808 6	1. 852 2	2. 125 2	1. 708 6	1. 282 5	0. 710 1	0. 056 5	0. 424 6
0. 30	1. 728 5	1. 770 6	2. 027 6	1. 836 1	1. 189 8	0. 720 4	0. 058 4	0. 441 6

表 7　对数正态数据的正态分布拟合结果

差异系数 $C_v=\frac{R}{L}$	B_2	正态分布		计算统计量修正值		
		$\hat{L}$	$\hat{R}$	D^*	W^*	A^*
0. 03	2. 596 4	2. 717 7	0. 079 5	0. 571 5	0. 030 7	0. 268 9
0. 06	2. 476 6	2. 719 5	0. 159 1	0. 588 0	0. 037 3	0. 269 2
0. 09	2. 358 3	2. 723 6	0. 239 2	0. 607 2	0. 037 7	0. 287 4
0. 12	2. 241 1	2. 729 9	0. 320 1	0. 629 1	0. 039 7	0. 323 1
0. 15	2. 124 6	2. 738 6	0. 402 1	0. 653 7	0. 045 0	0. 379 1
0. 18	2. 008 1	2. 749 7	0. 485 6	0. 681 2	0. 053 2	0. 453 3
0. 21	1. 891 3	2. 763 1	0. 570 9	0. 711 4	0. 064 5	0. 547 0
0. 24	1. 773 7	2. 778 9	0. 658 3	0. 744 4	0. 079 0	0. 660 5
0. 27	1. 654 6	2. 797 2	0. 748 3	0. 780 2	0. 096 8	0. 794 2
0. 30	1. 533 6	2. 818 0	0. 841 2	0. 818 8	0. 118 1	0. 948 5

表 8　对数正态数据的两参数 Weibull 分布拟合结果

$C_v=\frac{R}{L}$	B_1	两参数 Weibull 分布		计算统计量修正值		
		$\hat{A}$	$\hat{B}$	D^*	W^*	A^*
0. 03	2. 575 3	34. 344 1	2. 756 4	0. 999 3	0. 182 9	1. 441 0
0. 06	2. 438 0	17. 172 3	2. 795 0			
0. 09	2. 311 4	11. 448 2	2. 834 2			
0. 12	2. 189 8	8. 586 2	2. 873 9			
0. 15	2. 074 6	6. 868 9	2. 914 0			
0. 18	1. 965 5	5. 724 1	2. 955 0			
0. 21	1. 862 1	4. 906 4	2. 996 4			
0. 24	1. 764 1	4. 293 1	3. 038 3			
0. 27	1. 671 3	3. 816 1	3. 080 9			
0. 30	1. 583 4	3. 434 1	3. 124 1			

3　结　论

对 1 500 组仿真结果的分析显示:

(1) 当显著性水平 A= 0. 01, 0. 05, 0. 10, 0. 25 时, 正态数据和对数正态数据均可用三参数 Weibull 分布拟合;

表 9　三参数 Weibull 分布的拟合误差分析

差异系数 $C_r = \frac{R}{L}$	模拟分布 B_2	拟合分布 B_4	相对误差/% $\frac{B_4 - B_2}{B_2} \times 100$	模拟分布 B_3	拟合分布 B_4	相对误差/% $\frac{B_4 - B_3}{B_3} \times 100$
0.03	9.5473	9.5932	0.481	2.5980	2.6095	0.443
0.06	9.0945	9.1865	1.012	2.4830	2.5040	0.846
0.09	8.6418	8.7800	1.599	2.3731	2.4018	1.209
0.12	8.1892	8.3732	2.247	2.2680	2.3028	1.534
0.15	7.7363	7.9664	2.974	2.1676	2.2068	1.808
0.18	7.2836	7.5588	3.778	2.0717	2.1138	2.032
0.21	6.8308	7.1517	4.698	1.9780	2.0238	2.315
0.24	6.3781	6.7466	5.778	1.8923	1.9366	2.341
0.27	5.9253	6.3399	6.997	1.8086	1.8522	2.411
0.30	5.4726	5.9333	8.418	1.7285	1.7706	2.436

(2) 当一组数据在不低于 A= 0.05 的显著性水平下可同时通过两参数 Weibull 分布、正态分布、对数正态分布和三参数 Weibull 分布的假设检验时, 其 B 基值之间存在以下关系: $B_1 < B_2 < B_3 < B_4$;

(3) 当用三参数 Weibull 分布拟合正态数据和对数正态数据时, 其 B 基值的相对估算误差随数据的差异系数 C_v 的增大单调递增;

(4) 当差异系数 $C_v \leqslant 0.30$ 时, 用三参数 Weibull 分布拟合对数正态数据, 其 B 基值之间的相对误差 $|E| < 3.0\%$; 当差异系数 $C_v \leqslant 0.20$ 时, 用三参数 Weibull 分布拟合正态数据, 其 B 基值之间的相对误差 $|E| < 5.0\%$;

从结论(2)可以看出, 美军规范 MIL-HDBK-17B 建议按两参数 Weibull 分布→正态分布→对数正态分布的优先等级处理数据遵循的是安全原则。

已有的统计资料显示: 材料的杨氏模量 E 和剪切模量 G 的差异系数 $C_v < 0.02$; 金属的静强度差异系数为: 铝合金 $C_v = 0.02 \sim 0.05$; 钢及合金钢 $C_v = 0.05 \sim 0.08$; C/C 复合材料 $C_v = 0.08 \sim 0.14$; 材料疲劳寿命的差异系数要稍大一些, 但通常也不超过 0.20。因此得出结论: 以三参数 Weibull 分布作为统一的分布拟合实验数据并计算其 B 基值在工程上是可行的。

参　考　文　献

1　董聪. 现代结构系统可靠性理论: [学位论文]. 西安: 西北工业大学, 1993

2　董聪, 戎海武, 杨庆雄. 先进拟合优度检验方法及应用. 强度与环境, 1994, (1): 23—31

3　MIL- HDBK- 17B, USA, 1988

4　董聪, 戎海武, 夏人伟. 疲劳寿命分布模型及其拟合优度检验. 航空学报, 1995, 16(2): 148—152

5　董聪, 戎海武, 夏人伟. 分布假设及其对复合材料 B 基值的影响. 强度与环境, 1994, (3): 1- 7