非线性不确定系统的鲁棒镇定

费树岷 高为炳

(北京航空航天大学第七研究室，北京，100083)

ROBUST STABILIZATION OF NONLINEAR UNCERTAIN SYSTEMS

Fei Shumin, Gao Weibing

(The 7th Research Division, Beijing University of Aero. and Astro., Beijing, 100083)

摘 要 讨论仿射非线性不确定系统的鲁棒镇定问题。给出了其鲁棒镇定的充分必要条件，以及一类非线性不确定系统，其鲁棒镇定界不依赖于其李雅普诺夫函数界的估计而仅依赖于其系统本身的结构性质与设计者的要求。

关键词 非线性系统 李亚普诺夫函数 鲁棒性

中图分类号 TP273, V249.12

Abstract The robust stabilization of nonlinear uncertain systems is discussed. The necessary and sufficient condition of its robust stabilization is given, and a class of uncertain systems is obtained, in which the bound of the robust stabilization is independent of the bound of its Liapunov function. Finally, an example is given.

Key words nonlinear systems Liapunov functions robustness

非线性不确定系统的鲁棒镇定设计自 1979 年 Gutman[1] 首次提出用李雅普诺夫函数(L- 函数) 最小- 最大方法研究以来，得到了长足的发展，吸引了众多学者的注意[1~7]。在匹配条件下，由于 Gutman[1] 的控制方案是不连续的控制律且不便计算，继而 Corless 和 Leitmann[2] 于 1981 年提出改进方案，给出连续控制规律实现实际稳定 (Practical stability) 的控制目标。针对匹配条件的严格限制，出现了各种宽松的广义匹配条件[3~6]。而对不满足匹配条件的不确定系统则是基于将其不确定项分成满足和不满足匹配条件二部分来处理[4,7,8]。然而这种分解是不唯一的，它取决于设计者的经验。另一方面，现有的实际鲁棒镇定的镇定界其估计不仅依赖于对系统 L- 函数界的估计，而且也十分粗糙。本文将给出系统鲁棒镇定的充分必要条件以及一类系统其鲁棒界不依赖于其 L- 函数界的估计，仅取决于系统本身的结构性质与设计者的要求。结果表明对给定的 L- 函数，系统的不确定项不需要进行匹配与不匹配分解。

1 定义和问题的陈述

考虑如下不确定系统

$$\dot{x}(t) = f(x,t) + \Delta f(x,\sigma(t),t) + (g(x,t) + \Delta g(x,\sigma(t),t))u \tag{1}$$

式中：$t \in I = [0, +\infty)$，$x \in R^n$，$u \in R^m$；$f: R^n \times I \to R^n$；$g: R^n \times I \to R^{n\times m}$ 表示确定项；$\sigma: I \to \Sigma$，$\Sigma \subset R^r$ 为紧集，$\Delta f: R^n \times \Sigma \times I \to R^n$；$\Delta g: R^n \times \Sigma \times I \to R^{n\times m}$ 表示不确定项。各函数均假定为其变量的连续函数向量或矩阵。不妨设 $f(0, t) \equiv 0$，$\forall t \in I$。

1994 年 3 月 3 日收到, 1994 年 12 月 6 日收到修改稿

式 (1) 的形式控制系统为

$$ẍ(t) = f(x,t) + g(x,t)u \tag{2}$$

定义 1 函数 C: R$^+$ y R$^+$ = {x I R: x \ 0} 称为是J 类的, 如果 C (0) = 0, C (s) 关于 s> 0 是严格单调增加的。且还满足 lim$_{sy]}$ C (s) =] , 则称 C 为 J$_]$ 类的。

定义 2 函数 V: R^n @ I y R$^+$ 称为系统或方程 ẍ= f (x, t) 的一个 L- 函数, 如果它是连续可微的且存在 a, b I J$_]$, c I J 满足

$$a(|x|) [V(x,t) [b(|x|) \tag{3}$$

$$\frac{5\ V}{5\ t} + \frac{5\ V}{5\ x} f(x,t) [- c(|x|) \qquad Ð(x,t) I R^n @ I \tag{4}$$

式中: $\frac{5\ V}{5\ x} \overset{def}{=} \left(\frac{5\ V}{5\ x_1}, \frac{5\ V}{5 x_n}\right)$。注意这里 L- 函数的意义是全局的, 局部意义下仅要求 a, b I J。

定义 3[7] 系统式 (1) 称为是实际鲁棒可镇定 (最终有界) 的, 如果存在常数 l > 0 (0< G$_1$< G$_2$), 连续函数 p (x, t), L- 函数 V (x, t) 满足式 (3) 以及 c I J 使得 Ð (t) I 8, (x, t) I R^n @ I, 当| x| > l (G$_1$ [| x| [G$_2$) 时, 成立

$$\frac{5 V}{5 t} + \frac{5\ V}{5\ x}[f + \$ f + (g + \$ g)p(x,t)] [- c(|x|) \tag{5}$$

假设 (H. 1) (f, g) 是全局一致渐近可镇定的。即存在连续反馈 A (x, t) 和 L- 函数 V (x, t) 满足式 (3) 及 c I J 成立

$$\frac{5\ V}{5\ t} + \frac{5\ V}{5\ x}(f(x,t) + g(x,t)A(x,t)) [- c(|x|) \qquad Ð(x,t) I R^n @ I \tag{6}$$

假设 (H. 2) 对任意满足式 (3) 的 L- 函数 V (x, t), 存在常数 k, 0< k< 1, 成立

$$(\frac{5\ V}{5\ x} g(x,t))(\frac{5\ V}{5\ x} \$ g(x,R(t),t))^T [k \left|\frac{5 V}{5 x} g\right|^2 \qquad Ð R I 8, (x,t) I R^n @ I$$

问题是在 (H. 1), (H. 2) 之下 (1) 寻求使式 (1) 实际鲁棒镇定 (最终有界) 的条件; (2) 寻求可实际鲁棒镇定的其鲁棒镇定界不依赖于被选的 L- 函数界估计的系统类。

2 主要结论

对给定的 L- 函数 V, 定义集合 $2 = \left\{(x, t): X^T = \frac{5\ V}{5\ x} g\ (x, t) = 0\right\} < R^n @ I$ 则有

定理 1 如果 (H. 2) 成立则式 (1) 实际鲁棒可镇定 (最终有界) 的充分必要条件为存在 L- 函数 V (x, t) 满足式 (3), 常数 l \ 0 (0< G$_1$< G$_2$), 以及 c I J 使当| x| > l (G$_1$ [| x| [G$_2$) 时, 成立

$$\dot{V}_{(1)} = \frac{5\ V}{5\ t} + \frac{5\ V}{5\ x}(f + \$ f) [- c(|x|) \qquad Ð R(t) I 8, (x,t) I E \tag{7}$$

注释 1 式 (7) 表明对不确定项不需要进行匹配与不匹配分解, 它是系统针对选定的 V 所能容纳的最大不匹配部分。现有的广义匹配条件也是针对给定的 L- 函数而言的[4]。定理中虽然未用到 (H. 1), 但在寻求系统 L- 函数时 (H. 1) 将提供寻求原则。

注释 2　如果反馈 u= p (x, t) 使 V̂ [- C (| x|) + U (| x|), U (| x|) \ 0, 式 (1) 为实际鲁棒可镇定的[2,3], 只要 lim$_{| x| y]}$ C (| x|) / U (| x|) = m> 1 (m 可为无穷大), 可见它满足式 (4) 。文献 [4] 中提出的广义匹配条件以及其匹配与不匹配分解要求显然是定理 1 的特殊情形。

为证明定理, 需要下列引理

引理 1　设 r: R$^+$ y R$^+$ 连续且 r (0) = 0 则存在 CI J 使 r (s) [C (s), D s I R$^+$ 。

证明: 令 r (s) = max$_{0 [t [s}$ r (t), 则 r (s) 为单调非减连续函数且 r (0) = 0, 于是取 C (s) = r (s) + s 即可。事实上, D p> 0, C (s) = r + s^p 都满足要求。

定理 1 的证明:

/ 必要性0 假定连续反馈 u= p (x, t), 常数 1 \ 0 以及 L- 函数 V (x, t) 满足式 (3) 使当| x| > 1 时, 成立

$$\hat{V}_{(1)} = \frac{5\ V}{5\ t} + \frac{5\ V}{5\ x}(f + \$f + (g + \$ g)p(x,t)) \ [\ -\ c(|\ x\ |) \qquad D R(t)\ I\ \ 8,\ t\ I\ \ I$$

则特别地, $g= 0 时上式也成立, 即式 (7) 成立。

/ 充分性0 设存在 L- 函数 V (x, t) 使式 (7) 成立, 则当| x| > 1 时

$$\hat{V}_{(1)}\ [\ -\ c(|\ x\ |) + Q(X, x, R(t), t) + X^T u + \frac{5\ V}{5\ x}\$ gu \tag{8}$$

式中: $X^T = \frac{5\ V}{5\ x} g$, Q (0, x, R (t), t) S 0, D (x, t, R (t)) I R^n @ I @8 。令 U (| X| , x, t) = sup$_{RI\ 8}$ | Q (X, x, R (t), t) |, 由 8 的紧性知 U 存在, 且 U (0, x, t) S 0, D (x, t) I R^n @I 。根据引理 1 知存在 Q (#, x, t) I J 使 U (| X| , x, t) [Q (| X| , x, t), 且 Q (0, x, t) S 0 , D (x, t) I R^n @ I。设控制律形式取为 u= - K (x, t) X, K\ 0 为待选函数, 则由 (H. 2) 知 V̂$_{(1)}$ [- c (| x|) + Q (| X| , x, t) - (1- k) K (x, t) | X|^2。因为 Q (#, x, t) I J, 故 D E> 0 存在函数 K$_E$ (x, t) 使 Q (K$_E$ (x, t), x, t) S E。显然 K$_E$ (x, t) S 0 Z E= 0。如果取 K 为

$$K(x,\ t) = \begin{cases} Q(|\ X|,\ x,\ t)/((1-\ k)\ |\ X|^2) & 当\ Q>\ E \\ Q(|\ X|,\ x,\ t)/((1-\ k)K_E^2) & 当\ Q[\ \ E \end{cases} \tag{9}$$

则有

$$\hat{V}_{(1)}\ [\ \begin{cases} -\ \ c(|\ x\ |) & 当\ Q>\ E \\ -\ \ c(|\ x\ |) +\ E & 当\ Q[\ \ E \end{cases}$$

类似于文献 [4] 的讨论即得式 (1) 是实际鲁棒可镇定的。其鲁棒界 d [max {1, a^{-1} (b (c^{-1} (E)))}。其中 a, bI J$_]$ 是使式 (3) 成立的 a, b, 上标 / - 10 表示其反函数。(由 a, b, c 的性质知存在 E> 0 , 使 d [G$_1$, 故当 G$_1$ [| x| [G$_2$ 式 (9) 成立时, 控制律式

(10) 同样实现了最终有界性)。证毕。

从定理的证明可以看到鲁棒镇定界 d 不仅与1 (系统本身结构影响) 有关，而且取决于不同的 a，b 的选取即系统 L- 函数界的估计。为达到改进的目的，假定式 (8) 中的 Q 满足

假设 (H. 3)　存在非负连续函数 Q_1 (x，t) 和实数 r > 0 使

$$|Q(X, x, R(t), t)| [| X|^{r} Q_1(x, t) \qquad) D R(t) I 8.$$

定理 2　如果 (H. 1) ~ (H. 3) 成立则式 (1) 是实际鲁棒镇定的且鲁棒镇定界为 d= max {1, E}。其中 E> 0 为设计者的要求，1 为系统结构影响由式 (7) 确定。

证明：根据定理 1 可直接从式 (8) 出发。由 H. 3 知，当| x | > 1，控制取 u = - K (x，t) X时

$$\hat{V}_{(1)} [- c(| x |) + | X|^{r} Q(x, t) - kK(x, t) | X|^{2}$$

这里 k= 1- k> 0。将 (x，t) 固定且 x X 0，X视为独立变量。令

$$F(s) = kK(x, t) s^{2} - Q(x, t) s^{r} + c(| x |)$$

若 r \ 2 则只要取 kK (x，t) \ Q_1 (x，t) s^{r-2}便有当| x |> 1 时，$\hat{V}_{(1)}$ [- c (| x|)。设 0< r < 2，由 Fc (s) = 2kKs - rQ_1 s^{r-1}得其唯一驻点 s^{*} = $[rp_1/2kK]^{1/2-r}$。当 s^{*r} [c (| x|) / ($\frac{2}{2-r}Q_1$) 时 F (s^{*}) \ 0，从而 F (s) \ F (s^{*}) \ 0。故当 K\ N$Q_1^{2/r}$/ $c^{(2-r)/r}$ (| x|)，N= $[2/(2-r)]^{(2-r)/r}$ (r/2k) 时，有 F (s) \ 0。由此分析得，如果取 K为

$$K(x, t) = \begin{cases} bQ_1^{2/r}(x, t)/c^{(2-r)/r}(| x |) & \text{当 } Q> E \\ bQ_1^{2/r}(x, t)/c^{(2-r)/r}(E) & \text{当 } Q [E \end{cases}$$

式中：b> N 为任意正数，则当| x| > d= max {1, E} 时 $\hat{V}_{(1)}$ [- c (| x|)，c I J；当 1< | x| [E时 $\hat{V}_{(1)}$ [- c (| x|) + c (E)。可见其鲁棒镇定界为 d= max {1, E}，这里 E 显然由设计者确定。证毕。

注释 3　显然，如果定理中的 1= 0 且 $\lim_{|x| y 0} Q_1^{2/r}$ (x，t) / $c^{(2-r)/r}$ (| x|) <] 则式 (1) 是全局鲁棒可镇定的。如文献 [8] 中所考虑的情形 c (s) = cs^{2}，Q_1 (x，t) = | x| Q_1 (x，t)，r= 1。

举例　考虑如下二维系统

$$\left.\begin{aligned} \hat{x} &= - x^{3} + [b | x |^{r} + y] R(t) + h(x) y R(t) u \\ \hat{y} &= x + (1 + R(t)) u \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式中：b I R，h (x) = $\begin{cases} a\sin x/x & x X 0 \\ 1 & x= 0 \end{cases}$，a I R，| a| < 1。| R (t) | [1/2，t I I，

x，y I R，0< r [3。式 (10) 的形式系统为

$$\left.\begin{array}{l} \hat{x} = -\ x^{3} \\ \hat{y} = \ x + \ u \end{array}\right\} \qquad (11)$$

显然 $u = -\ x -\ y$ 镇定 (11) 式。令 $u = -\ x -\ y + \ v$，v 为新的输入。取 $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 则按定理 2 镇定律可取为：

$$v = p(x, y)y,\ p(x, y) = \begin{cases} ba^2(|x| + |y|)^2/(TX^4 + y^2) & 当\ x^2 + y^2 > E^2 \\ ba^2(|x| + |y|)^2/(TX^4 + y^2)|_{x^2 + y^2 = E^2} & 当\ x^2 + y^2\ [\ E \end{cases}$$

按定理 1 镇定律可取为

$$v = p(x, y)y,\ p(x, y) = -\begin{cases} |a|(|x| + |y|)/|y| & 当\ |a||y|(|x| + |y|) > E \\ |a|^3|y|^2(|x| + |y|)^3/E^2 & 当\ |a||y|(|x| + |y|)\ [\ E \end{cases}$$

这里 $b > 1/k$，$k = \frac{1}{2}(1 + |a|) < 1$，$T = 1 - |b|/21^{r-3}$，当 $r < 3$；$T = 1 - \frac{1}{2}|b|$，当 $r = 3$。

3　结束语

本文给出的控制设计方案困难之处在于系统的 L- 函数的选取，即形式控制系统全局镇定的困难所在。对所选的 V 而言，定理其限制条件是较宽松的，条件式 (7) 给出了系统不满足匹配条件部分的 / 最佳0 估计。此外定理 2 给出的一类非线性不确定系统其鲁棒镇定界简单明了，它仅与系统本身结构及设计者的要求有关。

参　考　文　献

1 Gutman S. Uncertain dynamical systems- A Lyapunov Min- - Max approach. IEEE Trans, A C, 1979; 24: 437- 443

2 Corless M J, Leitmann G. Continuous state feedbackguaranteeing unform ultimate boundedness for uncertain dynamical sys2 tems. IEEE Trans A C, 1981; 26: 1139- 1144

3 Qu Z H, Dorsey J. Robust control of generalized dynamical systems without the mathout the matching conditions. ASME J Dynamical Systmes, Measurement, and Control, 1991; 113: 582- 589

4 Chen Y H. A new matehing condition for robust control design. Proc of ACC, San Francisco, 1993; 122- 126.

5 Imura J, Sugie T, Yoshikawa T. Global robust stabilization of nonliear casaded systems. Proc of 31st CDC, 1992: 3031- 3036

6 Barmish B R, Corless M J, Leitmann G, A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamcal systems. SIAM J Contr Opti, 1983; 21: 246- 255

7 Chen Y H, Leitman G. Robustness of uncertain systems in the absence of matching assumptions. Int J Control, 1987; 45: 1527- 1542

8 费树岷，高为炳. 仿射非线性联级系统的鲁棒镇定 . 控制与决策学术年会论文集. 厦门, 1994: 48- 52